

유한요소법을 이용한 수평곡선 I형교의 자유진동해석

Free Vibration Analysis of Horizontally Curved I-Girder Bridges
using the Finite Element Method

윤기용¹⁾ · 강영종²⁾
Yoon, Ki Yong Kang, Young Jong

요약 : 수평곡선 I형교에서는 곡선주형의 초기곡률로 인하여 휨과 비틀림이 서로 연성되어 복잡한 거동을 하며, 교량전체 거동에 가로보가 미치는 영향이 상당히 크다. 수평곡선 I형교의 거동특성을 파악하기 위해서는 곡선주형과 함께 가로보를 고려하여야 한다. 본 연구에서는 수평곡선 I형교에 대한 자유진동해석을 위하여 곡선주형을 유한요소 모델링하기 위한 곡선보요소와 가로보를 모델링하기 위한 직선보요소를 구성하고, 이들 보요소를 사용한 유한요소 해석 프로그램을 개발한다. 곡선보 요소는 초기곡률과 흔을 고려하기 위하여 박판곡선보 이론에 근거하여 2축 대칭단면을 갖는 I형 곡선보에 대한 유한요소 정식화를 통하여 구성되며, 이때 형상함수는 박판곡선보의 선형 정적 평형방정식의 제차해를 사용한다. 직선보 요소는 흔자유도를 포함하여 절점당 7자유도를 갖는다. 개발한 프로그램에서는 직교좌표계를 사용하여 전체 강성행렬과 전체 질량행렬을 구성하며, 고유치를 구하기 위하여 Gupta의 방법을 사용한다. 기존의 연구결과를 이용하여 구성된 곡선보 요소를 비교검증하고, 수치해석 예제를 통하여 개발한 프로그램의 결과와 엘요소를 사용하여 범용유한요소해석프로그램으로 수행한 결과를 비교한다.

ABSTRACT : The behavior of horizontally curved I-girder bridges is complex because the flexural and torsional behavior of curved girders are coupled due to their initial curvature. Also, the behavior is affected by cross beams. To investigate the behavior of horizontally curved I-girder bridges, it is necessary to consider curved girders with cross beams. In order to perform free vibration analyses of horizontally curved I-girder bridges, a finite element formulation is presented here and a finite element analysis program is developed. The formulation that is presented here consists of curved and straight beam elements, including the warping degree of freedom. Based on the theory of thin-walled curved beams, the shape functions of the curved beam elements

1) 정회원. University of Texas at Austin 박사후 연수과정
2) 정회원. 고려대학교 공과대학 토목환경공학과 부교수

본 논문에 대한 토의를 1998년 9월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

are derived from homogeneous solutions of the static equilibrium equations. Third-order hermite polynomials are used to form the shape functions of the straight beam elements. In the finite element analysis program, global stiffness and mass matrix are composed, based on the Cartesian coordinate system. The Gupta method is used to efficiently solve the eigenvalue problem. Comparing the results of several examples here with those of previous studies, the formulation presented is verified. The validity of the program developed is shown by comparing results with those analyzed by the shell element.

핵심 용어 : 곡선보, 곡선보 요소, 수평곡선 I형교, 유한요소법, 자유진동, 중심내각
KEYWORDS : curved beam element, finite element method, free vibration, horizontally curved I-girder bridge, thin-walled curved beam, subtended angle

1. 서 론

곡선교량은 교량의 접속구간이나 고속도로의 인터체인지 등과 같이 교통량이 모이고 분산되는 곳에서 널리 사용되는 교량의 형식이다. 곡선교량은 곡선주형의 형태에 따라 수평곡선 상자형교와 수평곡선 I형교로 분류할 수 있다. 현재까지 국내의 곡선교량은 수평곡선 상자형교가 대부분이나, I형 단면을 갖는 곡선주형이 작은 형고로 제작할 수 있어 도심지역에 적합하고 유지관리에 효과적 이기 때문에 세계적으로는 수평곡선 I형교가 날로 증가하는 추세에 있다.⁽⁹⁾

수평곡선 I형교에서는 곡선주형의 초기곡률로 인하여 휨과 비틀림이 서로 연성(coupling)되어 거동하므로 됨(warping)의 효과가 크게 나타난다. 또한 가로보가 교량전체에 미치는 영향이 상당히 커서 주부재로 설계하여야 한다. 따라서 수평곡선 I형교의 거동을 정확히 파악하기 위해서는 곡선주형과 함께 가로보를 고려하여야 한다.⁽²⁾

최근의 연구 동향을 살펴보면 박판 곡선보 및 수평곡선 I형교의 정적인 거동 및 좌굴 현상에 대한 분야에서는 연구가 상당히 진척되고 있다.⁽¹⁰⁾ 그러나 동적거동에 관한 분야에 있어서는 1968년 Tan과 Shore, 1969년 Culver와 Chris-

tano, 1977년 Chaudhuri와 Shore, 1981년 Yoo와 Fhrenbach 등의 연구와 1995년 국내에서 발표된 강과 죄의 연구정도로 상대적으로 미미 할 뿐만 아니라 이들 연구는 박판 곡선보 자체의 자유진동 및 동적거동 특성을 관련된 연구이다.⁽¹⁾ 이렇게 수평곡선 I형교에 대한 동적거동 특성을 파악하는 연구가 미진한 이유는 최근에야 박판 곡선보 이론이 정립되었고,⁽⁵⁾⁽⁶⁾ 정적 및 좌굴거동에 대한 최근의 연구는 주로 셀요소를 이용한 3차원 유한요소해석을 통하여 이루어져 왔기 때문이다.⁽¹⁰⁾ 즉 현재까지 수평곡선 I형교에 대한 동적 해석을 효율적으로 수행할 수 있는 해석프로그램이 개발되지 못하였기 때문이다.

본 연구에서는 수평곡선 I형교의 자유진동특성을 효율적으로 파악하기 위하여 선형 박판 곡선보 이론에 근거하여 곡선보 요소를 개발하고, 됨자유도를 고려한 절점당 7자유도를 갖는 직선보 요소를 추가한 유한요소해석 프로그램을 개발하고자 한다. 또한 기존의 박판 곡선보에 대한 자유진동 해석에 관한 연구결과와 본 연구를 통하여 개발된 곡선보 요소를 이용한 해석결과를 비교검토함으로써 사용한 곡선보 요소를 검증하고, 범용유한요소해석 프로그램인 ABAQUS의 셀요소를 이용한 해석과 보요소를 이용한 해석, 그리고 본 연구에

서 개발한 프로그램을 사용한 해석 결과를 비교함으로써 본 프로그램의 타당성과 효율성을 입증하고자 하였다.

2. 곡선보 요소

박판 곡선보 이론은 1961년 Vlasov가 곡선보 이론을 발표한 이래로 1982년 Yoo, 1986년 Yang과 Kuo 등의 연구자들에 의해 논란이 거듭되어 왔으며, 이 논란은 지배미분방정식을 유도하는 방법과 기본가정 및 곡률효과를 적용하는 과정의 차이에서 발생하였다. 1994년 Kang과 Yoo에 의해서 발표된 박판 곡선보 이론은 탄성론에 의거해 기준변위함수를 가정하여 에너지 방법으로 지배미분방정식을 구성하고, 곡률효과를 일관성 있게 적용하여 박판 곡선보 이론에서 논란의 촛점이 되고 있는 Arch Buckling 문제에서 기존의 다른 이론에 비해 합리적인 결과를 보이고 있는 것으로 발표되었다.⁽⁵⁾⁽⁶⁾

본 연구에서는 곡선보 요소를 개발하기 위하여 Kang과 Yoo의 박판 곡선보 이론에 근거하여 운동방정식을 구성하였다. 또한 선형 정직평형방정식의 제차해를 형상함수로 사용하여 선형탄성범위에서의 곡선보 요소의 강도행렬과 질량행렬을 구성하였다.

2.1 기본가정

박판 곡선보 이론을 전개하기 위한 기본가정은 다음과 같다.⁽⁴⁾

- 1) 단면은 원래의 형상을 유지한다.
- 2) 변위는 유한하다.
- 3) 휨이나 둘에 의한 법선응력의 변화에 의한 전단변형률은 무시할 수 있을 정도로 작다. (Euler-Bernoulli Hypothesis)
- 4) 박판 곡선보 단면의 중앙면을 따라 발생하는 전단변형률은 매우 작으며, 무시할 수 있다.
- 5) 보의 길이는 단면의 다른 치수보다 크다.

6) 곡률반경은 법선응력이 단면에 선형으로 분포하도록 충분히 크다.

2.2 변위와 변형률

그림 1과 같은 Curvilinear 좌표계에서 임의의 점 $A(x, y, z)$ 에서의 x 축, y 축 및 z 축으로의 변위를 각각 u , v , w 라 하고, 2.1의 기본가정과 기준변위의 선형항만을 사용하여 2축 대칭 단면에 적용하면 다음과 같은 변위의 식을 구할 수 있다.

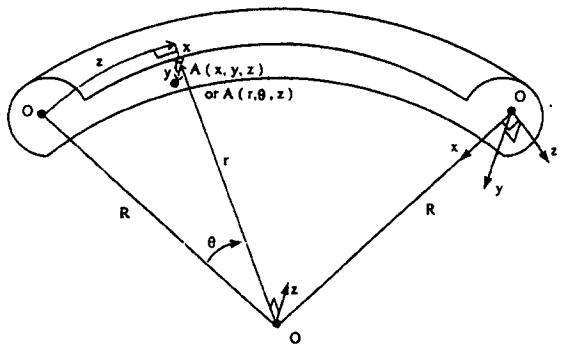


그림 1. 곡선보의 좌표계

$$u = u_0 - y\beta \quad (1a)$$

$$v = v_0 + x\beta \quad (1b)$$

$$w = w_0 - x\left(u'_0 + \frac{w_0}{R}\right) - yv'_0 - \omega\left(\beta' + \frac{v'_0}{R}\right) \quad (1c)$$

여기서, u_0 , v_0 , w_0 , β 는 각각 도심에서의 x 축과 y 축 및 z 축 방향으로의 변위와 z 축에 대한 단면의 회전으로서 기준변위라 한다.

또한 영이 아닌 변형률을 기준변위로 표현하면 다음과 같다.

$$\epsilon_z = \left(\frac{R}{R-x} \right) \left[\left(w'_0 - \frac{u_0}{R} \right) - x \left(u''_0 + \frac{w'_0}{R} \right) - y \left(v''_0 - \frac{\beta}{R} \right) - \omega \left(\beta'' + \frac{v'_0}{R} \right) \right] \quad (2a)$$

$$\gamma_{xz} = - \left[\left(\frac{R}{R-x} \right) \left(y + \frac{\omega}{R} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] \left(\beta' + \frac{v'_0}{R} \right) \quad (2b)$$

$$\gamma_{yz} = \left[\left(\frac{R}{R-x} \right) x - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \left(\beta' + \frac{v'_0}{R} \right) \quad (2c)$$

2.3 운동방정식

Hamilton의 원리에 의한 동적평형방정식은 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta T + \delta U + \delta V] dt = 0 \quad (3)$$

여기서, δT 는 변분 운동에너지이고, δU 는 곡선 보에 저장된 변분 변형에너지, δV 는 작용하중에 의한 변분 포텐셜 에너지 감소를 나타낸다.

2.3.1 변분 운동에너지

변분 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta T = \rho \int_V (\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dV \quad (4)$$

여기서, ρ 는 단위질량이며, V 는 체적이다.

일정한 곡률변경을 갖는 곡선보의 미소체적은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dV = \left(\frac{R - x}{R} \right) dA dz \quad (5)$$

따라서, 식(1)과 식(5)를 식(4)에 대입하면 다음과 같은 변분 변형에너지를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta T = & \rho \int_L \left[\left\{ A \ddot{u}_0 - I_x \ddot{u}_0'' - \frac{2I_y}{R} \ddot{w}_0 \right\} \delta u_0 + \left\{ \left(A + \frac{3I_y^2}{R^2} \right) \ddot{w}_0 + \frac{2I_y}{R} \ddot{u}_0 \right\} \delta w_0 \right. \\ & + \left\{ A \ddot{v}_0 - \left(I_x + \frac{I_\omega - 2K_{xy\omega}}{R^2} \right) \ddot{v}_0'' - \frac{I_y}{R} \ddot{\beta} - \left(\frac{I_\omega - K_{xy\omega}}{R} \right) \ddot{\beta}' \right\} \delta v_0 \\ & + \left. \left\{ \left(I_x + I_y \right) \ddot{\beta} - I_\omega \ddot{\beta}' - \frac{I_y}{R} \ddot{v}_0 - \left(\frac{I_\omega - K_{xy\omega}}{R} \right) \ddot{v}_0 \right\} \delta \beta \right] dz \\ & + \rho \int_L \left[\left\{ I_x \ddot{u}_0 + \frac{2I_y}{R} \ddot{w}_0 \right\} \delta u_0 \right]_0^L + \rho \int_L \left[\left\{ I_\omega \ddot{\beta} + \left(\frac{I_\omega - K_{xy\omega}}{R} \right) \ddot{v}_0 \right\} \delta \beta \right]_0^L \\ & + \rho \int_L \left[\left\{ I_x + \frac{2K_{xy\omega} + I_\omega}{R^2} \right\} \ddot{v}_0 + \left(\frac{I_\omega - K_{xy\omega}}{R} \right) \ddot{\beta} \right] \delta v_0 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 사용된 단면계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA, \quad I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \\ I_\omega &= \int_A \omega^2 dA, \quad K_{xy\omega} = \int_A xy\omega dA \end{aligned} \quad (7)$$

2.3.2 변분 변형에너지

곡선보에 저장된 변분 변형에너지는 영이 아닌 변형률만을 고려하므로 다음과 같다.

(8)

$$\delta U = \int_V \sigma_z \delta z dV + \int_V (\tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV$$

식(2)와 식(5)를 식(8)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_L \left[\left(M_y'' - \frac{F_z}{R} \right) \delta u_0 - \left(F_z' + \frac{M_y'}{R} \right) \delta w_0 \right. \\ & - \left(M_x'' + \frac{B_y''}{R} + T_{SV}^c \right) \delta v_0 - \left(B_z'' - \frac{M_x}{R} + T_{SV}^c \right) \delta \beta \left. \right] dz \\ & + \left[-M_y' \delta u_0 + M_y \delta u_0' + \left(F_z + \frac{M_y}{R} \right) \delta w_0 + \left(M_x' + \frac{B_y'}{R} + T_{SV}^c \right) \delta v_0 \right. \\ & \left. - \left(M_x + \frac{B_y'}{R} \right) \delta v_0' + (B_z' + T_{SV}^c) \delta \beta - B_z \delta \beta' \right]_0^L \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, 사용된 단면력은 다음과 같이 정의된다.

$$\text{축력} : F_z = \int_A \sigma_z dA$$

$$x\text{축에 관한 휨모멘트} : M_x = \int_A \sigma_z y dA$$

$$y\text{축에 관한 휨모멘트} : M_y = \int_A \sigma_z x dA \quad (10)$$

$$\text{플랜지 휨모멘트 (Bimoment)} : B_i = \int_A \sigma_z \omega dA$$

순수비틀림모멘트 (St. Venant Torsion) :

$$T_{SV}^c = \int_A \left[-\tau_{xz} \left\{ \left(y + \frac{\omega}{R} \right) + \left(\frac{R-x}{R} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \right\} + \tau_{yz} \left\{ x - \left(\frac{R-x}{R} \right) \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right\} \right] dA$$

2.3.3 변분 포텐셜 에너지 감소

본 연구에서는 3개의 등분포 하중과 3개의 등분포 모멘트, 그리고 하나의 등분포 플랜지 모멘트를 고려하였다. 따라서 하중에 의한 포텐셜 에너지 감소의 변분은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta V = & - \int_L \left[\left\{ q_x - m_y' \right\} \delta u_0 + \left\{ q_y + m_x' \right\} \delta v_0 \right. \\ & + q_z \delta w_0 + \left\{ m_z + m_\omega' \right\} \delta \beta \left. \right] dz \\ & + \left[-m_y \delta u_0 + m_x \delta v_0 + m_\omega \delta \beta \right]_0^L \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, q_x , q_y , q_z 는 x 축과 y 축 및 z 축 방향으

로 작용하는 등분포 하중이며, m_x , m_y , m_z 는 x 축과 y축 및 z축을 중심으로 작용하는 등분포 모멘트이다. 또한 m_ω 는 y축에 관한 플랜지 모멘트(Bi-moment)이다.

2.3.4 곡선보의 운동방정식

식(3)에 식(6)과 식(9) 및 식(11)을 대입하여 정리한 후, 단면력을 기준변위의 식으로 치환하여 정리하면 다음과 같은 기준변위로 표현된 곡선보의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\rho \left(A + \frac{3I_y}{R^2} \right) \ddot{w}_0 + 2\rho \frac{I_y}{R} \ddot{u}'_0 + E \left(\frac{I_y}{R^2} - A \right) \left(w''_0 - \frac{1}{R} u'_0 \right) = q_z \quad (12a)$$

$$\rho A \ddot{u}_0 - \rho I_x \ddot{u}''_0 - \rho \frac{2I_y}{R} \ddot{w}'_0 - \frac{EA}{R} \left(w'_0 - \frac{u_0}{R} \right) \quad (12b)$$

$$+ EI_x \left(u''_0 + \frac{2}{R^2} u'_0 + \frac{1}{R^3} w'_0 \right) = q_x - m_z; \quad (12c)$$

$$\rho A \ddot{v}_0 - \rho \left(I_x - \frac{2K_{yy\omega} - I_\omega}{R^2} \right) \ddot{v}'_0 - \rho \frac{I_y}{R} \ddot{\beta} + \rho \left(\frac{K_{yy\omega} - I_\omega}{R} \right) \ddot{\beta}'' \quad (12d)$$

$$+ EI_x \left(v''_0 - \frac{1}{R} \beta'' \right) + \frac{EK_{yy\omega}}{R} \left(\beta'' + \frac{2}{R} v'_0 - \frac{\beta''}{R^2} \right) \quad (12e)$$

$$+ \frac{EI_x}{R} \left(\beta'' + \frac{v''_0}{R} \right) - \frac{GK_T}{R} \left(\beta'' + \frac{v'_0}{R} \right) = q_y + m'_z \quad (12f)$$

$$A \left(I_x + I_y \right) \ddot{\beta} - A \omega \ddot{\beta}'' - \rho \frac{I_y}{R} \ddot{v}_0 + \rho \left(\frac{K_{yy\omega} - I_\omega}{R} \right) \ddot{v}'_0 - \frac{EI_x}{R} \left(v'_0 - \frac{1}{R} \beta \right) \quad (12g)$$

$$+ \frac{EK_{yy\omega}}{R} \left(v''_0 - \frac{2}{R} \beta'' - \frac{1}{R^2} v'_0 \right) + EI_x \left(\beta'' + \frac{1}{R} v''_0 \right) \quad (12h)$$

$$- GK_T \left(\beta'' + \frac{1}{R} v'_0 \right) = m_z + m'_z \quad (12i)$$

이상과 같이 표현된 2축 대칭단면을 갖는 곡선보의 운동방정식을 살펴보면, 식(12a)와 식(12b)는 곡률면내의 변위성분인 u_0 , w_0 만의 함수이고, 식(12c)와 식(12d)는 곡률면외의 변위성분인 v_0 , β 만의 함수로 구성되어 있음을 알 수 있다. 따라서 곡선보의 곡률면내 운동과 곡률면외 운동은 서로 독립적임을 알 수 있다. 그러나 각각의 운동안에서는 변위 성분이 모두 연성되어 있다. 특히 수직변위성분인 v_0 와 단면의 회전변위성분인 β 가 서로 연성되어 있기 때문에 곡선보의 거동이 복잡하게 된다.

2.4 유한요소의 정식화

식(12)의 운동방정식의 해석해는 특별한 경계 조건을 갖는 경우에 한하여 제한적으로 얻을 수 있으며, 일반적인 경우에 해석해를 구하는 과정은 매우 복잡하고 지루한 작업이다. 따라서 본 연구에서는 다양한 구조물에 적용할 수 있고, 해의 정확성과 수렴성을 확보하기 위해서 유한요소법을 이용하여 운동방정식의 해를 구하였다. 또한 곡률면내 운동과 곡률면외의 운동이 서로 독립적이기 때문에 요소의 강도행렬과 질량행렬의 구성을 곡률면내와 곡률면외로 분리하여 구성하였다.

식(3)을 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_V \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dV + \int_V \delta \mathbf{e}^T \sigma dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dz = 0 \quad (13a)$$

또는,

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} \quad (13b)$$

식(13)에서 \mathbf{M} 과 \mathbf{K} 는 곡선보 요소의 질량행렬과 강도행렬이고, \mathbf{f} 는 절점변위와 절점력을 표현하는 벡터이다. 식(13b)에서 절점력벡터를 영벡터로 취하면 구조물의 자유진동에 대한 운동방정식으로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (14)$$

2.4.1 절점력과 절점변위

곡선보 요소의 절점력과 절점변위는 그림 2와 같다. 그림에서 보듯이 곡선보 요소에 작용하는 단면력은 축방향력, F_z , 두 방향의 전단력, V_x 와, V_y 두 방향의 휨모멘트, M_x 와 M_y , 비틀림모멘트, 그리고 Bimoment, 가 있다.

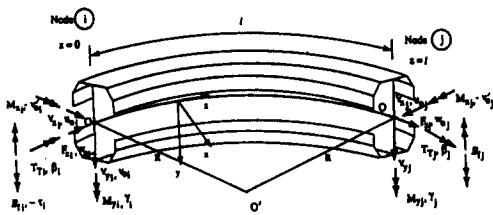


그림 2. 곡선보 요소의 절점력과 절점변위

비틀림 모멘트 T_T 는 순수 비틀림 모멘트, T_{sv}^C 와 휨비틀림 모멘트, T_ω 의 합이며, 이때 휨비틀림 모멘트는 Bimoment의 변화량과 같다.

$$T_T = T_{sv}^C + T_\omega \quad (15)$$

$$\text{여기서, } T_\omega = B_i' \quad (16)$$

또한, 전단력과 비틀림 모멘트 및 휨모멘트 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$V_x = -M'_y \quad (17)$$

$$V_y = M'_x + \frac{1}{R} T_T \quad (18)$$

곡선보 요소에서 7개의 단면력 F_z , V_x , M_y , V_y , M_x , T_T , B_i 과 이에 해당하는 변위성분은 w_0 , u_0 , γ , v_0 , $-v_0$, β , $-\tau$ 를 갖는다. 여기서 와는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\gamma = u'_0 + \frac{w_0}{R} \quad (19)$$

$$\tau = \beta' + \frac{v'_0}{R} \quad (20)$$

이들 변위성분 중 부재축방향의 변위, w_0 , 곡률중심방향으로의 변위, u_0 , 곡률평면의 수직축에 대한 회전변위, γ 는 곡률면내 절점변위성분이며, 곡률평면의 수직축에 대한 변위, v_0 , 곡률중심방

향축에 대한 회전변위, $-v_0$, 부재축에 대한 회전변위, β , 단면의 휨변위, $-\tau$ 는 곡률면외 절점변위성분이다. 식(19)와 식(20)으로부터 절점변위성분중 독립변수는 w_0 , u_0 , v_0 , β 만임을 알 수 있다.

식(12)에서 언급한 바와 같이 곡률면내 운동과 곡률면외 운동이 서로 독립적이므로 절점력과 절점변위를 곡률면내와 곡률면외로 나누어 다음과 같은 행렬을 구성할 수 있다.

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{in\ T} & \mathbf{d}^{out\ T} \end{bmatrix}^T = \mathbf{d}_k, k = 1, 2, 3, \dots, 14 \quad (21)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{in\ T} & \mathbf{f}^{out\ T} \end{bmatrix}^T = \mathbf{f}_k, k = 1, 2, 3, \dots, 14 \quad (22)$$

$$\mathbf{d}^{in} = \begin{bmatrix} w_{oi} & u_{oi} & \gamma_i & w_{oj} & u_{oj} & \gamma_j \end{bmatrix}^T \quad (23a)$$

$$\mathbf{d}^{out} = \begin{bmatrix} v_{oi} & -v'_{oi} & \beta_i & -\tau_i & v_{oj} & -v'_{oj} & \beta_j & -\tau_j \end{bmatrix}^T \quad (23b)$$

$$\mathbf{f}^{in} = \begin{bmatrix} F_{zi} & V_{xi} & M_{yi} & F_{zj} & V_{xj} & M_{yj} \end{bmatrix}^T \quad (24a)$$

$$\mathbf{f}^{out} = \begin{bmatrix} V_{yi} & M_{xi} & T_{Ti} & B_i & V_{yj} & M_{xj} & T_{Tj} & B_j \end{bmatrix}^T \quad (24b)$$

여기서, 윗첨자 in과 out은 곡률면내와 곡률면외를 의미하며, 아래첨자 i 와 j 는 절점번호이다. 한편, T는 전치를 의미한다.

2.4.2 형상함수

본 연구에서는 절점변위와 기준변위와의 관계는 박판 곡선보의 정적평형방정식의 선형제차미분방정식의 제차해를 이용하여 구한 형상함수를 사용하여 구성하였다.⁽⁴⁾

$$\mathbf{u}_{(4 \times 1)} = \mathbf{N}_{(4 \times 14)(14 \times 1)} \mathbf{d} \quad (25a)$$

또는

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{in} \\ \mathbf{u}^{out} \end{Bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{in} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^{out} \end{bmatrix}_{(2 \times 6) \quad (2 \times 8)} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^{in} \\ \mathbf{d}^{out} \end{Bmatrix}_{(6 \times 1) \quad (8 \times 1)} \quad (25b)$$

여기서, \mathbf{N} 은 형상함수이며, \mathbf{u} 는 기준변위로 다음과 같다.

$$\mathbf{u}^{in} = [u_o \quad w_o]^T, \quad \mathbf{u}^{out} = [v_o \quad \beta]^T \quad (26)$$

2.4.3 요소강도행렬

곡률면내 거동에서 v_0 , β 와 그 도함수로 표현된 항은 소거된다. 따라서, 곡률면내 거동과 관련된 변형률은 다음과 같다.

$$\varepsilon_z^{in} = \left(\frac{R}{R-x} \right) \left[\left(N'_{2k} - \frac{N_{1k}}{R} \right) - x \left(N''_{1k} + \frac{N'_{2k}}{R} \right) \right] d_k \quad (27a)$$

$$\gamma_{xz}^{in} = \gamma_{yz}^{in} = 0 \quad (27b)$$

여기서, N_{ik} 와 N_{2k} 는 각각 기준변위 u_0 와 w_0 에 대한 형상함수이며, k 는 1에서 6까지의 정수이다.

식(27)을 식(8)의 변분 변형에너지에 대입함으로써 다음과 같은 관계를 구성할 수 있다.

$$\delta U^{in} = \int_V E \varepsilon_z^{in} \delta \varepsilon_z^{in} dV = \delta \mathbf{d}^{inT} \mathbf{K}^{in} \mathbf{d}^{in} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z^{in} &= EA \int \left\{ \left(N'_{1i} N'_{1j} \right) - \frac{1}{R} \left(N_{1i} N'_{1j} + N'_{1i} N_{1j} \right) + \frac{1}{R^2} \left(N_{1i} N_{1j} \right) \right\} dz \\ &+ EI_x \int \left\{ \left(N''_{1i} N''_{1j} \right) + \frac{1}{R} \left(N''_{1i} N'_{1j} + N'_{1i} N''_{1j} \right) + \frac{1}{R^2} \left(N'_{1i} N'_{1j} \right) \right\} dz \\ &- E \frac{I_y}{R} \int \left\{ \left(N'_{1i} N'_{1j} + N''_{1i} N'_{1j} \right) + \frac{1}{R} \left(2N'_{1i} N'_{1j} - N_{1i} N''_{1j} - N''_{1i} N_{1j} \right) \right\} dz \\ &+ E \frac{I_y}{R} \int \left\{ \frac{1}{R^2} \left(N_{1i} N'_{1j} + N'_{1i} N_{1j} \right) \right\} dz \end{aligned} \quad (29)$$

여기서, i 와 j 는 1에서 6까지의 정수이다.

곡률면외 거동에서는 v_0 , β 와 그 도함수만으로 표현되므로 변형률은 다음과 같다.

$$\varepsilon_z^{out} = \left(\frac{R}{R-x} \right) \left[-y \left(N'_{3k} - \frac{N_{4k}}{R} \right) - \omega \left(N''_{4k} + \frac{N'_{3k}}{R} \right) \right] d_k \quad (30a)$$

$$\gamma_{xz}^{out} = - \left[\left(\frac{R}{R-x} \right) \left(y + \frac{\omega}{R} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] \left(N'_{4k} + \frac{N'_{3k}}{R} \right) d_k \quad (30b)$$

$$\gamma_{yz}^{out} = \left[\left(\frac{R}{R-x} \right) x - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \left(N'_{4k} + \frac{N'_{3k}}{R} \right) d_k \quad (30c)$$

여기서, N_{3k} 와 N_{4k} 는 각각 기준변위 v_0 와 β 에 대한 형상함수이고, k 는 7에서 14까지의 정수이다.

같은 방법으로 곡률면외 거동에 대한 강도행렬을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta U^{out} &= \int_V E \left(\varepsilon_z^{out} \delta \varepsilon_z^{out} \right) dV + \int_V G \left(\gamma_{xx}^{out} \delta \gamma_{xx}^{out} + \gamma_{yz}^{out} \delta \gamma_{yz}^{out} \right) dV \\ &= \delta \mathbf{d}^{outT} \mathbf{K}^{out} \mathbf{d}^{out} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\frac{1}{2}}^{out} &= EI_x \int \left\{ \left(N'_{3i} N'_{3j} \right) - \frac{1}{R} \left(N_{3i} N'_{3j} + N'_{3i} N_{3j} \right) + \frac{1}{R^2} \left(N_{3i} N_{3j} \right) \right\} dz \\ &+ EI_x \int \left\{ \left(N'_{4i} N'_{4j} \right) + \frac{1}{R} \left(N'_{3i} N'_{4j} + N'_{4i} N'_{3j} \right) + \frac{1}{R^2} \left(N'_{3i} N'_{4j} \right) \right\} dz \\ &+ E \frac{K_{yy}}{R} \int \left\{ \left(N'_{3i} N'_{4j} \right) + \frac{1}{R} \left(2N'_{3i} N'_{3j} - N_{3i} N'_{4j} - N'_{4i} N_{3j} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R^2} \left(N_{3i} N'_{3j} + N'_{3i} N_{4j} \right) \right\} dz \\ &+ GK_T \int \left\{ \left(N'_{4i} N'_{4j} \right) + \frac{1}{R} \left(N'_{3i} N'_{4j} + N'_{4i} N'_{3j} \right) + \frac{1}{R^2} \left(N'_{3i} N'_{3j} \right) \right\} dz \end{aligned} \quad (32)$$

여기서, i 와 j 는 7에서 14까지의 정수이다. 이상을 간단히 정리하면, 곡선보 요소의 요소 강도행렬은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{in} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{out} \end{bmatrix} \quad (33)$$

2.4.4 요소질량행렬

곡률면내 거동에 대한 임의의 점에서의 변위를 절점변위와 형상함수로 표현하면 다음과 같다.

$$u^{in} = N_{1i} d_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad (34a)$$

$$w^{in} = \left[N_{2k} - x \left(N'_{1k} + \frac{N'_{2k}}{R} \right) \right] d_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad (34b)$$

식(34)를 식(4)에 대입하면 곡률면내 변위성분에 관계된 변분 운동에너지를 구하게 된다.

$$\delta T^{in} = \int_V \left(\ddot{u}^{in} \delta u^{in} + \ddot{w}^{in} \delta w^{in} \right) dV = \delta \mathbf{d}^{inT} \mathbf{M}^{in} \ddot{\mathbf{d}}^{in} \quad (35)$$

$$\mathbf{M}_{ij}^{in} = \rho A_i \int \left(N_{1i} N_{1j} + N_{2i} N_{2j} \right) dz \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &+ \rho \frac{I_y}{R} \int \left(N_{2i} N'_{1j} + N'_{1i} N_{2j} + \frac{2}{R} N_{2i} N_{2j} \right) dz \\ &+ \rho I_y \int \left(N'_{1i} N'_{1j} + \frac{N'_{1i} N_{2j} + N_{2i} N'_{1j}}{R} + \frac{N_{2i} N_{2j}}{R^2} \right) dz \end{aligned}$$

여기서, i 와 j 는 1에서 6까지의 정수이다.

마찬가지로 곡률면외 거동에 대한 임의의 점에서의 변위는 아래와 같이 표현된다.

$$u^{out} = -y N_{4k} d_k \quad (37a)$$

$$v^{out} = \left(N_{3k} + x N_{4k} \right) d_k, \quad k = 7, 8, \dots, 14 \quad (37b)$$

$$w^{out} = - \left[y N'_{3k} + \omega \left(N'_{4k} + \frac{N'_{3k}}{R} \right) \right] d_k \quad (37c)$$

또한, 곡률면의 변위성분에 관계된 변분 운동에너지는 다음과 같다.

$$\delta T^{\text{out}} = \rho \int_V (\ddot{u}^{\text{out}} \delta u^{\text{out}} + \ddot{v}^{\text{out}} \delta v^{\text{out}} + \ddot{w}^{\text{out}} \delta w^{\text{out}}) dV \\ = \delta \mathbf{d}^{\text{out}}^T \mathbf{M}^{\text{out}} \ddot{\mathbf{d}}^{\text{out}} \quad (38)$$

$$M_{ij}^{\text{out}} = \rho A \int_{N_3}^{N_4} N_{3j} N_{4j} dz - \rho \frac{1}{R} \int_{N_3}^{N_4} (N_{3j} N_{4j} + N_{4j} N_{3j}) dz \\ + \rho I_z \int_{N_3}^{N_4} N_{4i} N_{4j} dz + \rho I_x \int_{N_3}^{N_4} (N_{4i} N_{4j} + N_{3i} N_{3j}) dz \\ - \rho \frac{K_{xy}}{R} \int_{N_3}^{N_4} (N_{3i} N_{4j} + N_{4i} N_{3j} + \frac{2}{R} N_{3i} N_{3j}) dz \quad (39) \\ + \rho I_x \int_{N_3}^{N_4} (N_{4i} N_{4j} + \frac{N_{4i} N_{3j} + N_{3i} N_{4j}}{R} + \frac{N_{3i} N_{3j}}{R^2}) dz$$

요소강도행렬에서와 마찬가지로 곡선보 요소의 요소질량행렬을 간단히 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\text{in}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\text{out}} \end{bmatrix} \quad (40)$$

3. 직선보 요소

직선보 요소의 절점력과 절점변위는 그림 3과 같으며, 둘자유도를 포함하여 절점당 7개의 자유도를 갖는다. 또한 곡선보 요소와 마찬가지로 2축 대칭단면에 대하여 요소강도행렬과 요소질량행렬을 구성하였다.

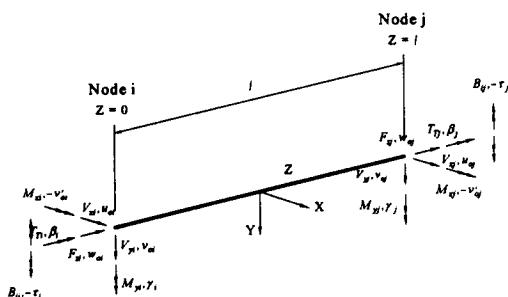


그림 3. 직선보 요소의 절점력과 절점변위

직선보 요소의 선형 운동방정식은 앞에서 구성한 곡선보의 선형 운동방정식에서 곡률항 R을 무한대로 취하면 간단히 구성할 수 있다.

$$\rho(A\ddot{u}_0 - I_y \ddot{u}_0'') + EI_y u_0^{\text{IV}} = q_x - m'_y \quad (41a)$$

$$\rho(A\ddot{v}_0 - I_x \ddot{v}_0'') + EI_x v_0^{\text{IV}} = q_y + m'_x \quad (41b)$$

$$\rho A \ddot{w}_0 - EA w_0'' = q_z \quad (41c)$$

$$\rho \left((I_x + I_y) \ddot{\beta} - I_\omega \ddot{\beta}'' \right) + EI_\omega \beta^{\text{IV}} - GK_T \beta'' = m_z + m'_z \quad (41d)$$

여기서, u_0 , v_0 , w_0 와 β 는 기준변위로 각각 서로 독립적임을 알 수 있다.

식(41)의 운동방정식에서 관성항과 하중항을 제외한 제차미분방정식의 제차해로부터 w_0 는 선형식의, u_0 와 r_0 는 3차 Hermitie다항식의 형상함수를 사용하였으며, β 에 대하여서는 v_0 의 형상함수를 사용하여 직선보 요소의 기준변위와 절점변위의 관계를 유도하였다.⁽⁷⁾

$$\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ (4 \times 1) \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{N} \\ (4 \times 14) \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{d} \\ (14 \times 1) \end{array} \quad (42a)$$

또는

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{w}_0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^u \\ (4 \times 1) \\ \mathbf{d}^v \\ (4 \times 1) \\ \mathbf{d}^w \\ (2 \times 1) \\ \mathbf{d}^\beta \\ (4 \times 1) \end{bmatrix} \quad (42b)$$

여기서, 형상함수 N 은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{N}_u = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad 1(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad 1(-\xi^2 + \xi^3)]$$

$$\mathbf{N}_v = [1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad 1(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad 1(\xi^2 - \xi^3)]$$

$$\mathbf{N}_w = [1 - \xi \quad \xi] \quad (43)$$

$$\mathbf{N}_v = \mathbf{N}_\beta \quad (\text{여기서, } \xi = z/L)$$

또한 여기서 직선보 요소의 절점변위 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{d}^u = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{oi} \\ \gamma_i \\ \mathbf{u}_{oj} \\ \gamma_j \end{bmatrix}, \mathbf{d}^v = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{oi} \\ -\mathbf{v}'_{oi} \\ \mathbf{v}_{oj} \\ -\mathbf{v}'_{oj} \end{bmatrix}, \mathbf{d}^w = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{oi} \\ \mathbf{w}_{oj} \end{bmatrix}, \mathbf{d}^\beta = \begin{bmatrix} \beta_i \\ -\tau_i \\ \beta_j \\ -\tau_j \end{bmatrix} \quad (44)$$

요소강도행렬은 곡선보 요소에서와 마찬가지로

변분 변형에너지로부터 다음과 같이 구성된다.

$$\mathbf{K} = K_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, 14 \quad (45)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 K_{(1,1)} &= -K_{(1,1)} = -K_{(1,2)} = K_{(1,3)} = \frac{EA}{L} \\
 K_{(2,2)} &= -K_{(2,1)} = -K_{(2,2)} = K_{(2,3)} = \frac{12EI_y}{L^3} \quad K_{(3,2)} = 2K_{(1,2)} = 2K_{(2,3)} = K_{(1,3)} = \frac{4EI_y}{L} \\
 K_{(3,3)} &= K_{(1,2)} = K_{(2,2)} = -K_{(3,2)} = -K_{(3,3)} = K_{(2,3)} = -K_{(1,3)} = -K_{(3,1)} = \frac{6EI_y}{L^2} \\
 K_{(4,4)} &= -K_{(1,4)} = -K_{(4,1)} = K_{(1,1)} = \frac{12EI_x}{L^3} \quad K_{(5,5)} = 2K_{(1,4)} = 2K_{(4,1)} = K_{(1,1)} = \frac{4EI_x}{L} \\
 K_{(5,4)} &= K_{(4,4)} = K_{(1,4)} = -K_{(5,1)} = K_{(4,1)} = -K_{(1,1)} = -K_{(1,2)} = -K_{(1,3)} = \frac{6EI_x}{L^2} \\
 K_{(6,6)} &= -K_{(1,6)} = -K_{(6,1)} = K_{(1,1)} = \frac{12EI_x}{L^3} + \frac{36GK_T}{30L} \\
 K_{(7,6)} &= K_{(6,6)} = K_{(1,6)} = -K_{(7,1)} = K_{(6,1)} = -K_{(1,1)} = -K_{(1,2)} = -K_{(1,3)} = \left(\frac{6EI_x}{L^2} + \frac{30GK_T}{30L} \right) \\
 K_{(7,7)} &= K_{(1,6)} = -K_{(7,1)} = K_{(6,1)} = \frac{4EI_x}{L} + \frac{4GK_T L}{30} \quad K_{(7,4)} = K_{(7,1)} = \frac{2EI_x}{L} - \frac{GK_T L}{30}
 \end{aligned}$$

그외, $K_{(i,j)} = 0, i, j = 1, 2, \dots, 14 \quad (46)$

또한, 요소질량행렬은 변분 운동에너지로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{M} = M_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, 14 \quad (47)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 M_{(1,1)} &= 2M_{(1,1)} = 2M_{(1,2)} = M_{(1,3)} = \frac{AL}{3} \\
 M_{(2,2)} &= M_{(1,2)} = \frac{13AL}{35} + \frac{6L}{5L} \quad M_{(2,3)} = M_{(1,3)} = \frac{9AL}{70} + \frac{6L}{5L} \\
 M_{(3,2)} &= M_{(2,2)} = -M_{(3,1)} = -M_{(3,2)} = \frac{11AL^2}{210} + \frac{L}{10} \\
 M_{(3,3)} &= -M_{(2,3)} = -M_{(3,2)} = M_{(2,2)} = -\frac{13AL^2}{420} + \frac{L}{10} \\
 M_{(4,3)} &= M_{(1,2)} = \frac{AL^2}{105} + \frac{2L}{15} \quad M_{(4,2)} = M_{(3,2)} = \left(\frac{AL^2}{140} + \frac{L}{30} \right) \\
 M_{(4,4)} &= M_{(1,1)} = \frac{13AL}{35} + \frac{6L}{5L} \quad M_{(4,1)} = M_{(1,1)} = \frac{9AL}{70} - \frac{6L}{5L} \\
 M_{(5,4)} &= M_{(4,4)} = -M_{(5,1)} = -M_{(4,1)} = \left(\frac{44AL^2}{210} + \frac{L}{10} \right) \\
 M_{(6,4)} &= -M_{(1,4)} = -M_{(6,1)} = M_{(4,1)} = \frac{13AL^2}{420} - \frac{L}{10} \\
 M_{(5,5)} &= M_{(1,2)} = -M_{(5,1)} = M_{(4,1)} = \frac{13AL^2}{420} - \frac{L}{10} \quad M_{(5,2)} = M_{(1,3)} = \left(\frac{AL^2}{140} + \frac{3L}{30} \right) \\
 M_{(6,5)} &= M_{(5,5)} = \frac{AL^2}{105} + \frac{2L}{15} \quad M_{(6,6)} = M_{(4,6)} = \frac{9AL^2}{70} - \frac{6L}{5L} \\
 M_{(7,5)} &= M_{(6,5)} = -M_{(7,1)} = -M_{(5,1)} = \left(\frac{11(L_x + L_y)L^2}{210} + \frac{L}{10} \right) \\
 M_{(7,6)} &= -M_{(1,6)} = -M_{(7,1)} = M_{(6,1)} = \frac{13(L_x + L_y)L^2}{420} - \frac{L}{10} \\
 M_{(7,7)} &= M_{(1,6)} = \frac{(L_x + L_y)L^2}{105} + \frac{2L}{15} \quad M_{(7,4)} = M_{(7,1)} = \left(\frac{(L_x + L_y)L^2}{140} + \frac{L}{30} \right) \\
 \text{그외, } M_{(i,j)} &= 0, i, j = 1, 2, \dots, 14 \quad (48)
 \end{aligned}$$

요소강도행렬과 요소질량행렬 구성시 절점변위 벡터는 다음과 같은 순서로 정리하였다.

(49)

4. 유한요소해석 프로그램

수평곡선 I형교의 자유진동해석을 수행하기 위하여 Fortran77 언어를 사용한 유한요소해석 프로그램을 작성하였다.

전체강도행렬과 전체질량행렬은 각각의 요소강도행렬과 요소질량행렬을 직교좌표계로의 좌표변환을 한 후 조합하여 구성하였다. 수평곡선 I형교의 다양한 경계조건을 고려하기 위해 경사좌표계를 도입하였으며, 자유진동해석을 위해 Gupta의 수치해석기법을 이용하여 진동수와 진동모드를 산출하였다.

4.1 좌표변환

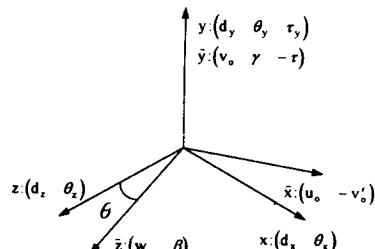


그림 4. 요소좌표계와 전체좌표계

좌표변환을 위하여 그림4와 같이 전체좌표계로 직교좌표계를 사용하였으며, 수평곡선 I형교가 전체좌표계에서의 XZ평면상에 위치하도록 하였다. 따라서, 곡선보 요소와 직선보 요소가 모두 요소좌표계에서의 \hat{y} 축과 전체좌표계에서의 y 축이 일치한다. 한편, 좌표변환에 앞서 식(23)의 절점변위순서로 구성된 곡선보 요소의 강도행렬과 질량행렬은 식(49)의 절점변위순서로 재배치하였다.

두 좌표계 사이에서의 절점변위의 관계로부터 요소별 좌표변환행렬을 구성하면 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{d}}_{(14 \times 1)} = \mathbf{T}_{(14 \times 14)} \mathbf{d}_{(14 \times 1)} \quad (50)$$

므로 \mathbf{T}_{11} 과 \mathbf{T}_{22} 가 같다.

여기서, $\hat{\mathbf{d}}$ 는 요소좌표계에서의 절점변위로 식

(49)와 같고 \mathbf{d} 는 전체좌표계에서의 절점변위이다.

$$\mathbf{d} = [d_x \ d_y \ d_z \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ \tau_x \ d_x \ d_y \ d_z \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ \tau_y]^T \quad (51)$$

따라서, 좌표변환행렬 \mathbf{T} 는 다음과 같이 구성된다.

$$\mathbf{T}_{(14 \times 14)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix}_{(7 \times 7)(7 \times 7)} \quad (52)$$

여기서, 곡선보 요소의 경우에는 요소의 i절점과 j절점에서의 그림 4에서와 같이 y축을 회전중심으로 z축으로의 회전각을 θ_i 와 θ_j 하면 좌표변환행렬의 성분은 각각 다음과 같다.

$$T_{11} = \begin{bmatrix} S_i & 0 & C_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_i & 0 & -S_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_i & 0 & -S_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_i & 0 & C_i & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{12} = \begin{bmatrix} S_j & 0 & C_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_j & 0 & -S_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_j & 0 & C_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_j & 0 & -S_j & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{12} = T_{21} = \mathbf{0} \quad (53)$$

여기서, $C_i = \cos \theta_i$, $S_i = \sin \theta_i$, $C_j = \cos \theta_j$,

$S_j = \sin \theta_j$ 이다.

한편, 직선보 요소의 경우에는 θ_i 와 θ_j 가 같으

4.2 경사좌표계

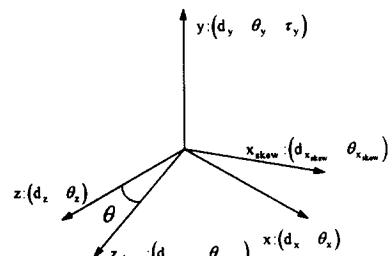


그림 5. 전체좌표계와 경사좌표계

수평곡선 I형교에서는 직교좌표계로 경계조건을 나타내지 못하는 경우가 대부분이다. 본 연구에서는 수평곡선 I형교에 대하여 xz평면상에 위치하도록 하였기 때문에 y축을 중심으로 z축으로부터 회전하는 회전각 θ 를 이용하여 절점에서 경사 지지점의 적용이 가능하도록 구성하였다.

그림 5와 같은 두 좌표계에서 절점변위의 관계로부터 좌표변환행렬을 정의하면 다음과 같다.

$$\mathbf{d}_{\text{skew}} = \mathbf{T}_{(7 \times 1)(7 \times 1)} \mathbf{d} \quad (54)$$

표 1. 내부중심각 변화에 따른 단일 곡선보의 곡률면의 고유진동수

| Angle (Deg) | Radius (in.) | Present | Yoo & Fhrenbach | | Culver | | Shore & Chaudhuri | |
|----------------|-----------------|-------------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|
| | | ω_1 (rad/sec) | ω_1 (rad/sec) | Difference (%) | ω_1 (rad/sec) | Difference (%) | ω_1 (rad/sec) | Difference (%) |
| 10 | 1155.5 | 201.3 | 204.7 | 1.7 | 202.5 | 0.6 | 203.3 | 1.0 |
| 20 | 577.8 | 183.2 | 190.2 | 3.8 | 184.3 | 0.6 | 186.3 | 1.7 |
| 30 | 385.2 | 160.9 | 165.8 | 3.0 | 162.2 | 0.8 | 164.7 | 2.4 |
| 40 | 288.9 | 139.5 | 141.7 | 1.6 | 140.0 | 0.4 | 142.8 | 2.4 |
| 50 | 231.1 | 120.1 | 121.3 | 1.0 | 120.9 | 0.7 | 122.8 | 2.2 |
| 60 | 192.6 | 103.0 | 103.9 | 0.9 | 103.8 | 0.8 | 105.2 | 2.1 |
| 70 | 165.1 | 88.3 | 89.3 | 1.5 | 88.9 | 0.7 | 90.0 | 1.9 |
| 80 | 144.4 | 75.4 | 76.8 | 1.9 | 76.0 | 0.8 | 76.8 | 1.9 |
| 90 | 128.4 | 64.1 | 64.0 | 1.6 | 64.6 | 0.8 | 65.2 | 1.7 |

여기서, \mathbf{d} 와 \mathbf{d}_{skew} 는 전체좌표계에서의 경사좌표계에서의 절점변위이며, \mathbf{T} 는 좌표변환행렬이다.

$$\mathbf{d} = [d_x \ d_y \ d_z \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z \ \tau_y]^T \quad (55a)$$

$$\mathbf{d}_{skew} = [d_{x_{skew}} \ d_{y_{skew}} \ d_{z_{skew}} \ \theta_{x_{skew}} \ \theta_{y_{skew}} \ \theta_{z_{skew}} \ \tau_y]^T. \quad (55b)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{skew} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{skew} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{skew} = \begin{bmatrix} C & 0 & -S \\ 0 & 1 & 0 \\ S & 0 & C \end{bmatrix} \quad (55c)$$

여기서, $C = \cos \theta$, $S = \sin \theta$ 이다.

4.3 유한요소해석 프로그램 흐름도

전술한 과정을 통하여 개발한 유한요소해석 프로그램의 흐름도는 그림 6과 같다.

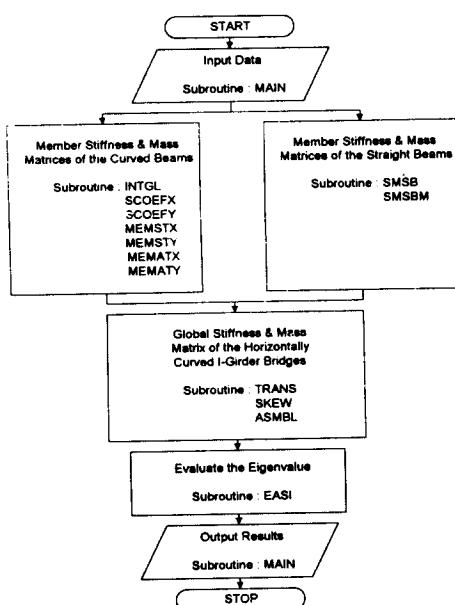


그림 6. 프로그램 개요

5. 수치해석

본 연구에서 개발된 유한요소해석 프로그램의

타당성과 효율성을 입증하기 위하여 단일 곡선보의 자유진동에 대한 기존의 연구결과와 범용 유한요소해석 프로그램인 ABAQUS를 이용한 해석결과를 비교검토하였다.

5.1 단일 곡선보의 곡률면외 자유진동

Culver는 그림 7과 같은 2축 대칭 단면을 갖는 곡선보에 대해 유한차분법을 사용하여 곡률면외 고유진동수를 산정하였으며, Shore와 Chaudhuri, Yoo와 Fhrenbach는 Culver의 해석모델에 대해 유한요소법을 이용하여 곡률면내와 곡률면외의 고유진동수를 산정하였다. 그러나 이들은 Vlasov의 고전적인 곡선보 이론에 바탕하여 곡선보의 고유진동수를 산정하였다.⁽⁸⁾

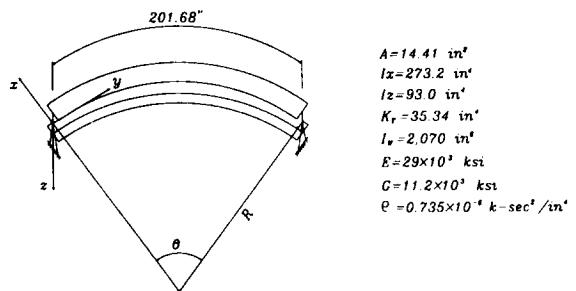


그림 7. Culver의 해석모델

본 해석모델은 양단이 핀지지인 경계조건이며, 총길이를 201.68in. (5122.7mm)로 일정하게 고정시켜 놓고 곡률반경을 변화시켜 내부중심각을 산정하였다. 본 연구결과와 타 연구결과를 표 1에 정리하여 비교하였다.

표 1을 살펴보면 본 연구결과와 타 연구결과가 좋은 상관관계를 보이고 있음을 알 수 있다. 단일 곡선보의 곡률면외 고유진동수만을 비교한 본 예제에서는 Vlasov의 곡선보이론과 Kang과 Yoo의 곡선보이론이 큰 차이를 보이고 있지 않으나, 고차모드에 대한 경우 및 비선형 동적 거동등에 대한 연구가 진행되어야 할 것으로 판단된다.

5.2 단일 곡선보의 곡률면내 자유진동

Chaudhuri는 그림8과 같은 내부중심각 97, 곡률반경 96in.(2438.4mm)의 양단이 핀지지 되어 있는 원형아치에 대하여 자유진동해석을 수행한 바있는 모델에 대하여 본 프로그램의 해석결과와 6자유도 보요소를 사용하여 ABAQUS로 해석한 결과를 표2에 정리하였다.⁽³⁾

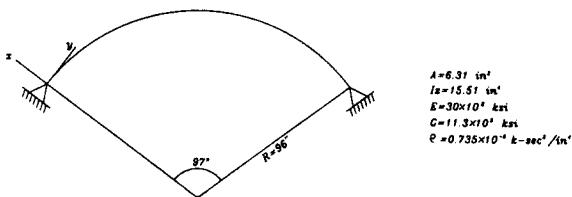


그림 8. 단일 곡선보의 곡률면내 자유진동

표 2. 단일 곡선보의 곡률평면내 자유진동

| Mode 수 | Present | | Chaudhuri | | ABAQUS | |
|-----------|---------|--------|-------------------|--------|-------------------|--|
| | Hz | Hz | Difference (%) | Hz | Difference (%) | |
| 1 | 63.18 | 61.88 | 2.1 | 63.13 | 0.1 | |
| 2 | 148.21 | 149.18 | 0.7 | 148.00 | 0.1 | |
| 3 | 286.05 | 307.85 | 7.6 | 285.86 | 0.1 | |

곡선보의 곡률면내 거동은 축방향 강성과 곡률평면의 수직축에 대한 휨강성()에 지배되므로 표2에서 보는 바와 같이 모든 해석결과의 차이는 매우 적다.

5.3 격자형 직선교의 자유진동

직선보 요소의 타당성을 검증하기 위하여 그림9와 같은 단순지지된 격자형 직선교에 대하여 본 프로그램과 ABAQUS를 이용한 해석을 수행하여 표 3에 정리하였다. 주형과 가로보는 동일한 단면을 사용하였고 단면제원과 재료성질은 다음과 같다.

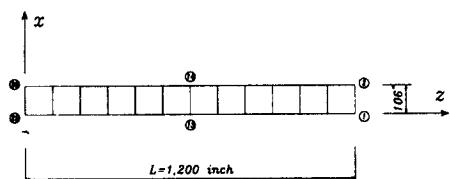


그림 9. 격자형 직선교

표 3. 격자형 직선교의 자유진동

| MODE | Present | | Yoo & Frenbach | | Culver | |
|-----------|-------------------------|-------------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|--|
| | ω_1 (rad/sec) | ω_1 (rad/sec) | Difference (%) | ω_1 (rad/sec) | Difference (%) | |
| Vertical | 1 24.91 | 24.895 | 0.06 | 24.593 | 1.27 | |
| | 2 99.07 | 99.360 | 0.29 | 94.150 | 4.97 | |
| Lateral | 1 26.07 | 26.188 | 0.45 | 25.947 | 0.47 | |
| | 2 56.29 | 56.563 | 0.48 | 56.044 | 0.44 | |
| Torsional | 1 38.17 | 26.874 | 29.59 | 37.546 | 1.63 | |

표 3에서 ABAQUS(Beam)은 6자유도 보요소를, ABAQUS(Shell)은 요소당 8절점을 갖는 웰요소를 사용하여 해석한 경우이다. Vertical 모드(x축을 중심으로한 휨모드)와 Lateral 모드(y축을 중심으로한 휨모드)에 대해서는 차이가 없으나, Torsional 모드에서는 큰 차이를 보이는고 있다. 이는 6자유도의 보요소는 텁강성을 고려하지 못하기 때문이다.

5.4 수평곡선 I형교의 자유진동

이상의 예제를 통하여 본 연구에서 구성된 각각의 요소에 대한 타당성을 대하여 비교검증하였다. 본 예제는 그림 10과 같은 단순지지된 수평곡선 I형교에 대하여 자유진동해석을 통하여 5.3 절과 같은 방법으로 본 프로그램의 효율성과 타당성을 입증하고자 한다.

사용한 단면의 제원은 격자형 직선교에서와 같으며, 길이를 고정하고 내부중심각을 10, 30, 60 와 90로 변화시켜 해석하여 표 4에 정리하였다. 여기서, 곡률면외 모드는 그림 11과 같으며, 초기

곡률의 영향으로 휨과 동시에 비틀림이 발생하는데 휨이 지배적인 경우와 비틀림이 지배적인 경우를 분리하였다. 또한 곡률면내 모드는 그림 12와 같이 곡률평면내에서의 휨모드를 말한다.

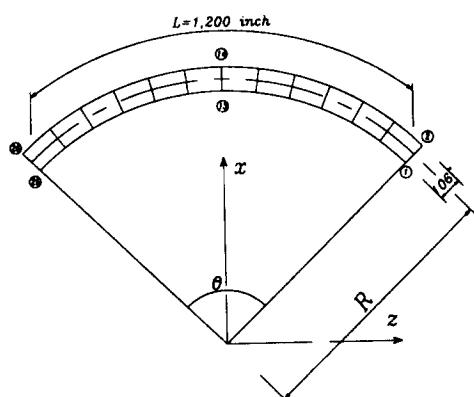


그림 10. 수평곡선 I형교

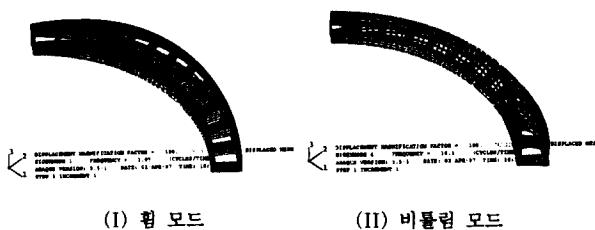


그림 11. 곡률면외 진동모드



그림 12. 곡률면내 진동모드

표 4. 수평곡선 I형교의 자유진동 (단위: rad/sec)

| Mode | θ | Present | ABAQUS (Beam) | ABAQUS (Shell) | | |
|------|----------|----------------|------------------|----------------|------------------|----------------|
| | | ω | ω | Difference (%) | ω | Difference (%) |
| 곡률면외 | 10 | 23.36 97.05 | 20.708 95.377 | 11.35 1.72 | 23.045 92.233 | 1.35 4.96 |
| | 30 | 17.45 87.74 | 13.644 83.809 | 21.81 4.48 | 17.185 83.385 | 1.52 4.96 |
| | 60 | 10.83 73.07 | 7.848 68.413 | 27.53 6.37 | 10.647 69.420 | 1.69 5.00 |
| | 90 | 6.71 60.20 | 4.712 55.686 | 29.78 7.50 | 6.616 57.383 | 1.40 4.68 |
| | 10 | 40.58 | 32.210 | 20.63 | 39.937 | 1.58 |
| | 30 | 52.98 | 47.704 | 9.96 | 52.159 | 1.55 |
| | 60 | 78.01 | 75.972 | 2.61 | 76.627 | 1.77 |
| | 90 | 106.21 | 107.10 | 0.84 | 103.82 | 2.25 |
| 곡률면내 | 10 | 26.18 56.19 | 26.310 56.467 | 0.46 0.49 | 25.923 55.931 | 0.98 0.46 |
| | 30 | 26.45 55.49 | 25.581 55.783 | 0.50 0.53 | 25.706 55.136 | 2.81 0.64 |
| | 60 | 25.72 54.08 | 25.872 54.406 | 0.59 0.60 | 24.819 53.526 | 3.52 1.02 |
| | 90 | 24.11 53.41 | 24.285 53.804 | 0.73 0.74 | 23.427 53.124 | 2.83 0.54 |

곡률면외 모드에 대한 진동수를 살펴보면, 본 연구결과와 ABAQUS(Shell)의 결과는 차이가 1.4~5.0% 정도로 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 ABAQUS(Beam)의 결과는 6자유도의 보요소가 휨강성을 고려하지 못하므로 큰 차 이를 보이며, 내부중심각이 커질수록 그 차이가 증가함을 알 수 있다. 한편, 곡률면내 모드에 대해서는 모든 해석결과가 매우 잘 일치함을 알 수 있다. 이는 곡률면내 모드는 축방향 강성과 곡률평면의 수직축에 대한 휨강성에만 관계되기 때문이다.

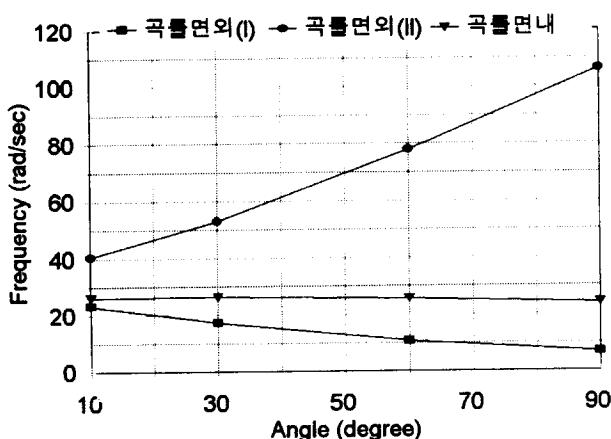


그림 13. 각 모드별 진동수

또한, 각 모드별 제1모드의 진동수를 정리하여 그림 13에 나타내었다. 그림 13으로부터 내부중심각의 크기가 증가함에 따라 곡률면외 휨모드의 진동수는 감소하고, 곡률면외 비틀림모드의 진동수는 증가함을 알 수 있다. 이는 곡률면외 진동은 강체회전운동과 내외측 주형의 질량과 강성의 변화에 영향을 받기 때문이다. 본 연구가 교량의 중심선의 길이를 일정하게 하고 내부중심각의 크기를 변화 시켰기 때문에 내부중심각의 크기가 증가 할수록 내측주형이 길이는 감소하며 외측주형의 길이는 증가하게 된다. 따라서 내부중심각의 크기가 증가하여도 교량전체의 질량의 크기는 변화하지 않으나, 내측주형의 질량은 감소하고 강성은 증가하며 반대로 외측주형의 질량은 증가하고 강성은 감소한다. 한편 곡률면외 진동모드 중 휨모드에서는 강체회전운동방향으로 단면이 회전하고, 비틀림모드에서는 강체회전운동방향과 반대방향으로 단면이 회전하게 된다. 따라서 내부중심각이 증가할수록 비틀림모드는 고차모드에서 발생하게 되며, 휨모드의 진동수는 감소하게 된다.

곡률면내 모드의 진동수는 내부중심각이 증가 함에 따라 감소하는 것으로 나타났다.

6. 결 론

본 연구에서는 Kang과 Yoo의 곡선보 이론에 근거하여 곡선보의 운동방정식을 유도하고, 곡률 R을 무한대로 취함으로써 직선보의 운동방정식을 간단히 유도하여 곡선보의 운동방정식의 타당성을 입증하였다. 또한 유한요소정식화과정을 통하여 절점당 7자유도의 곡선보 요소와 직선보 요소의 강성행렬 및 질량행렬을 구성하였으며, 수평곡선 I형교의 다양한 경계조건과 단면성질을 고려하여 자유진동해석을 수행할 수 있는 유한요소해석 프로그램을 개발하였다.

수치해석 예제를 통하여 기존의 연구결과 및 웰 요소로 해석한 결과와 비교검증함으로써 본 연구에서 사용한 곡선보 요소와 직선보 요소 및 개발된 유한요소해석 프로그램의 타당성과 효율성을 입증하였다.

수평곡선 I형교는 곡률면외 거동시 휨과 비틀림이 서로 연성되어 발생하므로 기존의 6자유도 보요소를 사용한 해석은 됨강성을 고려하지 못하고 곡선보의 연속성을 만족시키지 못함으로 수평곡선 I형교의 진동특성을 제대로 파악할 수 없다. 또한, 웰요소를 사용한 해석은 교량의 전체거동에서 국부효과를 배제하기 어려울 뿐만 아니라 간단한 해석을 수행하는데 있어서도 많은 시간과 노력이 필요해서 실용적이지 못하다. 따라서 본 연구를 통하여 개발된 유한요소해석 프로그램으로 수평곡선 I형교의 자유진동 특성을 정확하고 실용적으로 파악 할 수 있을 것이다.

본 연구를 통하여 수평곡선 I형교의 자유진동수의 크기는 내부중심각의 크기에 민감하게 반응하는 것을 알 수 있었다. 이외에도 수평곡선 I형교의 자유진동 특성은 주형 및 가로보의 강성, 초기 곡률, 경계조건 및 주형과 가로보의 연결조건 등의 다양한 인자에 영향을 받을 것으로 예상되므로 이에 대한 보다 광범위한 연구가 필요하다. 본 연구 결과는 수평곡선 I형교의 자유진동 특성뿐만 아니라 동적 거동을 파악하는 데 폭넓게 응용될

수 있는 기초 연구로서 그 의의가 크다.

참 고 문 헌

- (1) 강영종, 최영준 (1995). "박판수평곡선보의 자 유진동". 한국강구조학회 논문집, 제7권, 제4 호, pp.243-252.
- (2) 강영종, 정주호, 윤기용 (1996). "수평곡선 격 자형교의 '유한요소해석'", 대한토목학회 논문집, 제16권, 제I-3호, pp.261-270.
- (3) Chaudhuri, S.K. (1975). "Dynamic Response of Horizontally Curved I-Girder Highway Bridges Due to a Moving Vehicle," Ph.D. Thesis, Univ. of Pennsylvania.
- (4) Kang, Y.J. (1992). "Nonlinear theory of thin walled curved beams and finite element formulation," Dissertation presented to Auburn University, at Auburn, Alabama, in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
- (5) Kang, Y.J., and Yoo, C.H. (1994). "Thin-Walled Curved Beams. I : Formulation of Nonlinear Equations," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 120, No. EM10, pp.2072-2101.
- (6) Kang, Y.J., and Yoo, C.H. (1994). "Thin-Walled Curved Beams. II : Analytical Solutions for Buckling of Arches," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 120, No. EM10, pp.2102-2125.
- (7) Sekulovic, M. (1986). "Geometrically Nonlinear Analysis of Thin-Walled Members," Proceeding of the Invited Papers for the International Conference 'Steel Structures:Recent Research Advances and Their Applications to Design', Yugoslavia, Oct., pp.219-243
- (8) Yoo, C.H., and Fehrenbach, J.P. (1981). "Natural Frequencies of Curved Girders," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.107, No. EM2, Apr., pp.339-354
- (9) Yoo, C.H. (1996). *Design and Construction of Horizontally Curved Steel Bridges*, Lecture Note, Auburn University.
- (10) Yoo, C.H., Kang, Y.J., and Davidson, J.S. (1996). "Buckling Analysis of Curved Beams by Finite Element Discretization," *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 122, No. EM8, pp.762-770.

(접수일자 : 1998. 1. 8)