

## 정상파 문제의 방사조건에 관한 연구

이 광 호\* · 전 호 환\*\* · 성 창 경\*  
(98년 3월 21일 접수)

### A Study on the Numerical Radiation Condition in the Steady Wave Problem

Kwang Ho Lee\* · Ho Hwan Chun\*\* · Chang Kyung Sung\*

**Key Words** : Steady Wave(정상파), Radiation Condition(방사조건), Dispersion Error(분산오차), Damping Error(감쇠 오차), Finite Difference(유한차분), Panel Shift(패널 이동), Higher Order Boundary Element(고차경계요소), Wave Resistance(조파 저항), Kelvin Free Surface Condition (Kelvin자유표면조건)

#### Abstract

The numerical damping and dispersion error characteristics associated with difference schemes and a panel shift method used for the calculation of steady free surface flows by a panel method are analysed in this paper. First, 12 finite difference operators used for the double model flow by Letcher<sup>11)</sup> are applied to a two dimensional cylinder with the Kelvin free surface condition and the numerical errors with these schemes are compared with those by the panel shift method. Then, 3-D waves due to a submerged source are calculated by the difference schemes, the panel shift method and also by a higher order boundary element method(HOBEM). Finally, the waves and wave resistance for Wigley's hull are calculated with these three schemes. It is shown that the panel shift method is free of numerical damping and dispersion error and performs better than the difference schemes. However, it can be concluded that the HOBEM also free of the numerical damping and dispersion error is the most stable, accurate and efficient.

#### 1. 서 론

균일한 속도로 이동하는 선박에 의해 생성된 포텐셜 파(potential wave)문제는 여러 가지 방법에 의해 접근될 수 있으며 크게 아래와 같이 3가지로

분류 된다.

- a. 켈빈 소오스(Kelvin source)법: 물체표면 경계조건을 제외한 다른 모든 경계조건을 만족하는 그린함수(Green function)를 사용함.

\* 학생회원, 부산대학교 조선공학과 대학원

\*\* 정회원, 부산대학교 조선·해양공학과

b. 랭킨소오스(Rankine source)법: 어떤 경계조건도 만족하지 않는 단순한 그린함수 즉 랭킨소오스를 사용함.

c. 직접법(Direct)법: 유한 차분법과 유한 요소법.

위의 3가지는 각각 장단점을 가지고 있으나 어느하나가 다른 것에 비해 특별히 우수하다고 이야기할 수는 없다. 전통적으로 켈빈 소오스법이 선호되어져 왔으나 지난 15년동안에는 랭킨소오스법에 의한 문제 해결이 압도적으로 선호되고 있다. 그 원인으로는 고속 컴퓨터의 개발로 인한 비선형 조파문제의 해결이 현실성있게 접근됨에 따라 단순한 랭킨함수의 이용이 장점으로 부각되기 때문이다.

그러나 랭킨소오스를 이용할 경우 자유표면의 유한 영역은 수많은 요소(element)로 분할해야 되고 이로 인해 해의 유일성 문제와 직결되는 방사조건(radiation condition)을 만족시켜 주어야하는 새로운 문제가 발생한다.

방사조건이란 파가 이동하는 물체의 앞으로 전달되지 않는 자연적(물리적)현상을 의미하는데 이 조건을 만족하기 위해 여러 가지 방법들이 강구되어져 왔으나 크게 두 가지로 분류될 수 있다. 하나는 상류 유한차분법(upstream finite difference)이고 다른 하나는 계산점(collocation point)을 이동시키는 패널이동법(panel shift method 혹은 collocation shift method)이다. 최근 Slavounos & Nakos<sup>1)</sup>는 평면 패널에 2차원 spline함수를 도입하고 그들이 제시한 상류절단 경계면에  $\phi_x = \phi_{xx} = 0$ 항을 사용하여 수치 감쇠를 없애고 분산성을 개선한 결과를 발표하였다.

#### 유한차분법

Dawson<sup>2)</sup>은 저속선 이론이라고 불리는 이중모형(double body)근사법에 의한 선형자유표면 조건식에 4점유한 차분법을 도입하여 조파저항 계산의 실용화에 길을 열어 놓았다. 그는 2점(two point), 3점, 4점등의 차분에 의한 수치 실험 결과 수치적 감쇠등의 영향으로 4점 상류 차분법이 가장 합리적인 결과를 주는 것으로 보고하였으나, 차분에 의해 유발되는 수치 감쇠(numerical damping)와 분산성

(dispersion) 오차에 관한 합리적인 근거를 설명하지는 못했다.

그 이후로 4점 상류 유한차분법을 사용하거나, 이의 확장 혹은 수정된 차분법을 사용하여 선박의 조파저항에 대한 많은 연구 결과들이 발표되어 왔으며<sup>3,4,5,6)</sup>, 비선형 문제<sup>7,8)</sup>, 양력 문제<sup>9)</sup>등으로의 확장 또한 시도되어 오고 있다.

Slavounos & Nakos<sup>1)</sup>는 정상파 문제에 대한 패널법의 안정성(stability) 연구를 하여 차분법의 사용에 대한 수치 감쇠와 분산성에 대한 체계적인 분석을 통하여 차분의 차수와 속도에 관계없이 항상 불안정성(unstablensness)을 가지고 있다는 결론을 내렸다. Jensen<sup>10)</sup>은 상류 유한차분의 사용은 Kelvin형 자유표면조건에 Rayleigh 점성이라고 불리는 인위적 점성(artificial viscosity)의 도입과 동일하다는 것을 식으로 유도하였다. 또한 다음에 언급하는 패널이동법의 사용으로 보다 향상된 파형을 보였다. 이것을 바탕으로 Letcher<sup>11)</sup>는 이중모형 근사 자유표면 조건에 Dawson이 사용한 4점 차분법을 포함한 12개의 다른 차분 공식에 적용하여 수치적 감쇠 오차와 분산성 오차를 정량화 하였다. 그는 Dawson의 선택에 대한 합리성을 부여하고, 사용된 모든 차분 공식은 고속에서 방사 조건을 만족시킬 수 없다는 다소 어두운 결론을 내리고 Jensen이 제시한 대안(패널 이동법)이 많은 장점을 가지고 있으며 이에 대한 연구가 더 필요하다고 하였다.

#### 패널이동법

패널이동법 혹은 계산점 이동(collocation point shift)법은 누가 최초로 도입하였는지는 참고 문헌들을 통해서 정확히 알 수가 없다. 다만 상류차분법과 계산점 이동의 조합에 대한 계산 결과가 수치적 안정성을 향상시킨다는 논문들<sup>10, 12, 13)</sup> 이 발표되었다. Ando & Nakatake<sup>14)</sup>는 Jensen et al<sup>12)</sup>의 방법을 다소 수정한 계산점 이동법을 사용하여 수치 감쇠와 분산오차에 많은 향상이 있음을 보였다. 그러나 Ando & Nakatake의 방법은 이미 Jensen<sup>10)</sup>에 의해 사용된 방법이라고 생각된다.

패널이동법 혹은 계산점 이동법이란 자유 수면을 x방향으로 M+1, y방향으로 N개의 패널을 만들

고, x방향 첫 번째 패널 요소에 분포한 소오스의 세기를 0으로하고 소오스를 두 번째 패널 요소부터 분포시켜 자유수면조건을 1번 요소부터 M번째의 패널요소에 적용시켜 방사 조건을 만족시켜 주는 방법이다. 이럴 경우, 자유수면조건을 속도 포텐셜의 2차미분항을 차분에 의해 구하는 것이 아니라 해석적으로 직접 구한다.

Sclavounos & Nakos법

Sclavounos & Nakos<sup>1)</sup>는 평면 패널에 2차원 spline함수를 도입하고, 그들이 제시한 상류절단 경계면에  $\phi_x = \phi_{xx} = 0$ 항을 사용하여 수치 감쇠를 없애고 분산성을 개선한 결과를 발표하였다.

Hong & Choi<sup>15)</sup>은 물체의 곡면 요소와 물리량의 변화를 8절점 Lagrangian 요소로 나타내고 자유 수면에서의 물리량의 변화는 2차 spline함수를 도입하여 보다 향상된 결과를 발표하였다. Park & Chun<sup>16)</sup>은 9절점 경계요소로 확장하여 해의 수렴성이 아주 우수함을 보였고 3차원 양력 문제로 확장하였다.

본 논문의 목적은 지금까지 알려진 방사 조건을 모두 비교하여 수치 감쇠와 분산성에 대한 특성을 조사하는데 있다. Letcher에 의해 이중모형 자유수면조건에 12개의 차분공식을 적용하여 수치감쇠와 분산성 오차를 정량화한 것을 Kelvin형 자유수면조건에 적용하였다. 먼저 2차원 문제에 적용하여 요소 길이의 변화에 따른 수치 계산 결과를 해석해와 비교하였다. Taylor전개에서  $\phi_{xx}$ 와  $\phi_{xxx}$ 를 제외한 4점상류차분법(Dawson이 제시한)이 방사 조건을 가장 우수하게 만족함을 보였고, 요소 길이를 감소시키면 수치 감쇠는 거의 0으로 되었으나 분산성의 오차는 다소 존재하였다. 반면 패널이동법은 감쇠와 분산성의 오차가 거의 제거되어 해석해와 일치하였다. 2차원 결과를 3차원 문제로 확장하여 단위 소오스에 의해 생성된 파형과 Kelvin해를 비교하여 역시 패널이동법의 우수함을 보였다. 그러나 9절점 Lagrangian요소와 2차 spline물리량을 사용한 고차 경계요소법의 결과가 위의 두방법보다 더 우수한 결과를 보였다. Wigley선형에 적용하여 파형과 조파저항을 계산하여 상류 차분법과 패널

이동법에 의해 계산한 파형은 다소 다를지라도 조파저항값은 서로 비슷한 결과를 주었다. 역시 고차 경계요소법에 의한 파형과 조파저항값이 두 방법에 의한 계산 결과보다 우수함을 보였다.

2. 경계치 문제

유체는 비점성, 비압축성의 이상유체와 비회전성으로 가정하였으며, 표면 장력, 물보라, 쇄파의 영향은 무시하였다. 따라서 유체의 전 속도 포텐셜  $\phi$ 는 다음과 같다.

$$\phi = \phi_0 + \phi \tag{1}$$

여기서  $\phi_0$ 는 기본 유동(basic flow)으로써 이중모형(double body)해 혹은 자유유동(free stream)의 포텐셜  $Ux$ 로 둘 수 있다. 사용된 좌표계는 음의 x축 방향으로 선박이 일정한 유속  $U$ 로 전진하고

y축을 좌현으로 하는 xyz 우수 직교 좌표계를 사용한다.  $\phi$ 는 섭동(perturbed) 포텐셜이며, 전체 속도 포텐셜  $\phi$ 는 전 유체영역에서 질량보존법칙이 성립하므로 지배방정식은 Laplace방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{2}$$

무한유체의 자유수면상을 이동하는 선박의 조파 문제의 해를 구하기 위해서는 자유수면에서의 동역학적 (Dynamic) 및 운동학적(Kinematic)조건, 물체 표면에서의 비침투 조건, 바다 경계조건 및 방사조건을 만족해야한다.

위에서 언급한 바와같이 기본 유동으로 이중모형해 혹은 자유유동을 택하여 동역학 및 운동학적 자유수면조건을 결합한 선형화된 조건을 유도할 수 있는데 본 연구에서는 자유유동에 대하여 선형화한 다음의 Kelvin형 자유수면 조건을 사용한다.

$$\phi_{xx} + K\phi_z = 0 \quad \text{on } z = 0 \tag{3}$$

여기서  $K = \frac{g}{U^2}$  는 파수이다.

파형은 다음의 식에 의해 계산한다.

$$\zeta = -\frac{1}{g} [U\phi_x] \quad \text{on } z = 0 \tag{4}$$

베르누이 방정식으로 부터 압력계수는 다음식에 의해 구해진다.

$$C_p = 1 - \frac{1}{U^2} [U^2 + 2U\varphi_x + (\nabla\varphi)^2] \quad (5)$$

조파저항계수는 압력 계수  $C_p$ 로 부터 다음과 같이 구해진다.

$$C_w = -\frac{\int C_{p_n} ds}{S} \quad (6)$$

여기서  $S$ 는 선체 침수 표면적이고  $n_x$ 는 단위 법선 벡터의  $x$  방향성분이다.

### 3. 차분 연산자의 유도

정상과 문제의 해의 유일성을 결정하기 위하여 Rayleigh는 Kelvin형의 선형화된 자유 수면 조건식(3)에 인위적 점성(artificial viscosity)을 다음과 같이 도입했다.

$$\varphi_{xx} + K\varphi_z + \nu\varphi_x = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (7)$$

여기서  $\nu$ 는 작은 상수 (1/길이 차원) 이며 궁극적으로 0에 접근한다. 이것은 복소평면에서 적분축을 따라 존재하는 극을 적분영역안으로 이동시키는 역할을 하며<sup>17)</sup> 방사조건을 자율적으로 만족시켜 주는 역할을 한다.<sup>18)</sup>

Letcher<sup>11)</sup>는 균등한 간격을 가지는 점들( $x+nh$ ,  $n=-\infty \dots \infty$ )에 대해 12개 차분공식을 유도하여 식(7)에 대입하여 감쇠와 분산성 오차를 계산하였다. 문제의 일관성을 유지하기 위하여 여기서 간략히 소개한다.

$x+nh$ 에서  $x$ 에 대해 Taylor's series는 다음과 같다.

$$f(x + nh) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (nh)^k f^{(k)}(x) \quad (8)$$

1차 미분에 대한 미분 연산자는 몇몇 좌표의 weight함의 형태를 가진다.

$$f'(x) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n f(x + nh) \quad (9)$$

식(8)을 (9)식에 대입하면

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k h^{k-1} f^{(k)}(x) \quad (10)$$

여기서

$$e_k = \frac{1}{k!} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n n^k \quad (11)$$

윗식은 식(10)의  $k$ 차 미분계수이며, 오차항을 의미한다. Letcher는 윗식으로부터  $h$ 를 단위길이 (즉  $h=1$ )로 두고 12개의 차분공식에 대한  $w_n$ 과 오차  $e_k$ 를 계산하여 그의 논문 Table 1에 주었으며, 본 연구에서도 재 유도하여 계산하고 Table 1에 주었다.

Table 1이 계산되는 과정 중에서 2번째 연산자의 경우에 대해 예시하면 다음과 같다. 이 경우는 Taylor급수 전개시 2, 4, 6번째 미분항을 포함하고 2점 중앙차분을 사용하는 것이다. 여기서 배제된 3, 5번째 미분항들은 오차항들이 되고,  $i$ 는  $i+1$ 과  $i-1$ 에 대해 Taylor전개하여 각각을 (9)식에 대입하면, 다음과 같은 행렬형태로 표시된다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{-1} \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이것을 Gauss 소거법에 의해 풀면  $w_{-1}$  과  $w_1$  은  $-1/2$ 와  $1/2$ 가 되며 이것을 (11)식에 대입하면 3번째 오차항인  $e_3 = 0.167$ 이 되고, 5번째 오차항인  $e_5$ 는 0.0083이 된다.

정확한 미분을 계산하는 대신 차분연산자를 사용하는 영향은, 예를 들어, 방정식(7)식은  $\varphi_{xx}$ 의 여러 고차 미분을 포함하는 새로운 항의 유한 급수형태로 된다.

$$\varphi_{xx} + \sum_{k=2}^{\infty} e_k h^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \varphi_x + k\varphi_z + \nu\varphi_x = 0 \quad (12)$$

물체로부터 멀리 떨어진 해를 다음과 같이 가정하고

$$\varphi_x = e^{K'y} \sin K'x, \quad \varphi_z = e^{K'y} \cos K'x$$

이것을 (12)식에 대입하면 다음과 같이 된다.

Table 1 Weights and error coefficients for 12 first-derivative difference formulas

No	Operator		Weights, W								Errors, e				
	Name	Zeroed deriv.	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	2	3	4	5	6
#1	2-Point Upstream	—					-1.0000	1.0000			-0.500	+0.167	-0.042	+0.008	-0.001
#2	2-Point Central	2,4,6					-0.5000		+0.5000		0	+0.167	0	+0.008	0
#3	3-Point Upstream	2				+0.5000	-2.0000	+1.5000			0	-0.333	+0.250	-0.117	+0.042
#4	4-Point Upstream	2,3			-0.3333	+1.5000	-3.0000	+1.8333			0	0	-0.250	+0.300	-0.208
#5	4-Point Upstream	2,4			-0.1667	+1.0000	-2.5000	+1.6667			0	-0.167	0	+0.092	-0.083
#6	4-Point Upstream	2,3				+0.1667	-1.0000	+0.5000	+0.3333		0	0	+0.083	-0.033	+0.014
#7	5-Point Upstream	2,3,4		+0.2500	-1.3333	+3.0000	-4.0000	+2.0833			0	0	0	-0.200	+0.333
#8	5-Point Upstream	2,3,4			-0.0833	+0.5000	-1.5000	+0.8333	+0.2500		0	0	0	+0.050	-0.042
#9	4-Point Central	2,3,4,6				+0.0833	-0.6667		+0.6667	-0.0833	0	0	0	-0.033	0
#10	6-Point Upstream	2,3,4,5	-0.2000	+1.2500	-3.3333	+5.0000	-5.0000	+2.2833			0	0	0	0	-0.167
#11	6-Point Upstream	2,3,4,5		+0.0500	-0.3333	+1.0000	-2.0000	+1.0833	+0.2000		0	0	0	0	+0.033
#12	6-Point Upstream	2,3,4,5			-0.0333	+0.2500	-1.0000	+0.3333	+0.5000	-0.0500	0	0	0	0	-0.017

$$\begin{aligned} & \cos K'x [K' - K - e_3(K'h)^2 K' + e_5(K'h)^4 K' \\ & - e_7(K'h)^6 K' + \dots] + \sin K'x [\nu - e_2(K'h)K' \\ & + e_4(K'h)^3 K' + e_6(K'h)^5 K' + \dots] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$\cos K'x$  와  $\sin K'x$ 의 계수로 분리하여 0으로 놓으면 2개의 방정식을 가진다.

$$\begin{aligned} K &= K' [1 - e_3(K'h)^2 K' + e_5(K'h)^4 K' \\ & - e_7(K'h)^6 K' + \dots] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \nu &= K' [e_2(K'h) - e_4(K'h)^3 K' \\ & + e_6(K'h)^5 K' - \dots] \end{aligned} \quad (15)$$

여기서  $Kh$  는  $2\pi / (\text{과장당 패널 수})$  이다. 식(14)는 만일  $e_k$ 가 작고  $Kh$ 가 너무 크지도 않

다면 새로운 파수  $K'h$ 는  $O(Kh)^2$ 의 범위 안에서  $K$ 와 같다는 것을 의미한다. 위의 두 식에서 알 수 있는 것은 홀수 오차항들은 과장에 관계되는 반면, 짝수오차 항들에 의해서는 감쇠에 기여한다는 것을 알 수 있다. 크지도 작지도 않는  $Kh$ 에 대해서 (14)식으로부터 반복에 의해  $K'h$ 를 구할 수 있으며, 이를 (15)식에 대입하면 감쇠량  $\nu$ 를 계산할 수 있다.

Table 2는 12개의 차분공식에 대해서 5개의  $Kh$ 에 대해서 계산한 값들이다.  $K'/K$ 값은 파길이 오차에 대한 차분연산자들의 상대적 비교이며  $\nu h$ 는 파 감쇠량을 비교할 수 있는 척도이다. 예로서 #1은 큰 감쇠로 파가 곧 사라짐을 예측할 수 있으며, 중앙차분을 사용한 #2와 9 연산자는 감쇠가 없음을 알 수 있다. #4는 양의 감쇠를 가지기 때문에 하류로 갈수록 파가 증폭될 것이다. #5는 Dawson이 사용한 연산자이며 적당한 파고를 주는 것으로

Table 2 Dispersion and damping characteristics of 12 difference operators

No	K = 0.2 (λ = 31.4)		K = 0.4 (λ = 15.7)		K = 0.6 (λ = 10.8)		K = 0.8 (λ = 7.9)		K = 1.0 (λ = 6.3)	
	K'h	νh	K'h	νh	K'h	νh	K'h	νh	νh	νh
#1	0.20136	-0.02020	0.41152	-0.08348	0.64350	-0.20000	0.92730	-0.40000	π/2	-1.00000
#2	0.20136	0.00000	0.41152	0.00000	0.64350	0.00000	0.92730	0.00000	π/2	0.00000
#3	0.19747	-0.00038	0.38231	-0.00521	0.55018	-0.02178	0.70315	-0.05626	0.84535	-0.11325
#4	0.19991	0.00039	0.39720	0.00543	0.58224	0.02118	0.74405	0.04523	0.88046	0.06803
#5	0.19867	-0.00001	0.38940	-0.00028	0.56541	-0.00251	0.72330	-0.01046	0.86367	-0.02867
#6	0.20001	-0.00013	0.40034	-0.00208	0.60254	-0.01034	0.81080	-0.03226	1.03481	-0.07981
#7	0.20006	0.00002	0.40160	0.00126	0.60832	0.01332	0.81386	0.06274	0.98851	0.16104
#8	0.19998	-0.00000	0.39953	-0.00016	0.59682	-0.00172	0.78883	-0.00859	0.97328	-0.02790
#9	0.20001	0.00000	0.40034	0.00000	0.60254	0.00000	0.81080	0.00000	1.03481	0.00000
#10	0.20000	-0.00001	0.40050	-0.00044	0.60748	-0.00207	0.85378	0.01401	1.20383	0.31591
#11	0.20000	0.00000	0.39993	0.00012	0.59899	0.00104	0.79365	0.00392	0.97674	0.00773
#12	0.20000	-0.00000	0.40001	-0.00007	0.60019	-0.00071	0.80134	-0.00376	1.00612	-0.01339

알려져 있으며  $Kh=0.45\sim 0.80$ 의 범위내에서는 약 5%의 파길이 오차를 주고 있다. 하지만 이러한 감쇠량과 파길이의 오차는 패널길이(h)를 적게하면 감소함을 식(14) 및 (15)로부터 알 수 있으며 이는 3차원 문제에서 급격한 패널수의 증가를 초래해 계산시간의 증가와 큰 컴퓨터 용량(RAM)을 필요로 한다.

#### 4. 2차원 유동

Letcher<sup>11)</sup>는 앞에서 유도한 12개의 차분공식을 이용하여 이중모형 자유표면조건식을 사용하여 자유수면하를 일정 속도로 이동하는 점 다이폴(dipole)에 의해 생성된 파를 계산하고 각 차분의 특성을 논하였다. 여기서는 선형화된 Kelvin형의 자유수면 조건식에 적용하여 간단히 그 특성을 논하고 패널이동법을 사용한 결과 및 해석해와 비교하여 2방법의 특성을 비교한다. 특이점은 깊이 8에 위치하고 강도  $\mu = Ua^2$ 를 가지는 다이폴이다. 본 계산에서는  $a = 4$ 로 고정 하였다. 자유수면은 균일하게 단위길이 1인 요소로 분할하고 다이폴의 위치로부터 32개의 상류와 64개의 하류 패널로 구성된다. Letcher가 제시한바대로 하류 끝의 8개 패

널들은 모든 경우에 대해 #1연산자 (2-Point)를 사용하였다. 이 8개의 패널은 감쇠영역대(damping strip)의 역할을 하며 모든 경우가 그런 것은 아니지만, 이의 도입은 하류영역에서 파의 깨짐을 방지하고 해의 수렴성을 향상시켜 주었다. 3개의 속도  $Kh = 0.4, 0.6, 0.8$ 에서 (각각 파장당 15.7개, 10.5개, 7.9개의 패널), 앞에서 언급한 12개의 차분 연산자에 적용하였고, 패널이동법에 의한 계산결과 및 해석해와 비교 하였다.

Fig. 1에서는 주어진 12개의 차분연산자를 사용하여 3개의 속도 (즉,  $K = 0.4, 0.6, 0.8$ )에 대한 계산 결과를 보이고 있는데 표2에서 제시한 수치적 분산성 및 감쇠 특성과 잘 일치함을 보이고 있으며, 또한 Letcher가 이중모형 자유표면조건에 적용한 결과와 유사함을 보이고 있다. #1 과 #3 연산자들은 2, 3점 상류차분법을 사용한 결과로 파가 빨리 사그러짐을 볼 수 있는 데 이는 표2에서 보여주는 바와 같이 큰 감쇠량 때문이다. #2, #9 연산자는 중앙차분법을 사용하는 경우인데, 이는 짝수 오차항들이 대칭성 때문에 자동적으로 0이되기 때문에 감쇠는 0이 되나 파가 축에 대칭으로 뽀족 뽀족하게 발생하고 또한 파가 상류로도 전달됨을 알 수 있다. 또한 양의 감쇠를 가지는 경우(#4, #7, #10)는 하류

정상파 문제의 방사조건에 관한 연구

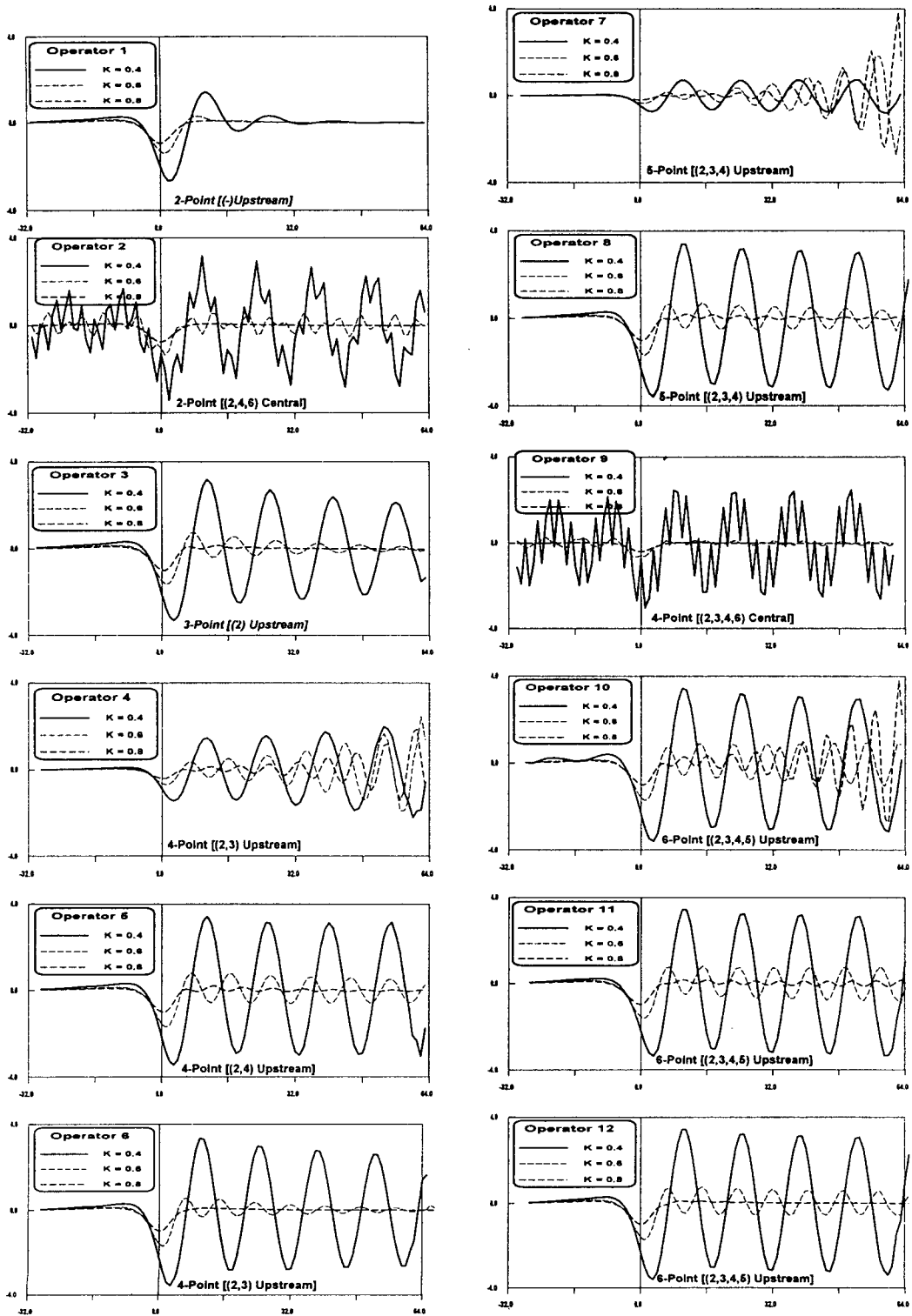


Fig. 1 Computed wave elevation  $\zeta$  due to a submerged doublet at 3 speeds

로 갈수록 파가 커짐을 볼 수 있다. 하류영역에 1점 또는 2점을 포함하는 #8, #12 와 Dawson이 사용한 #5는 파가 잘 보존됨을 알 수 있다. 3점 차분을 사용한 #3은 패널 크기를 적게하면 적절한 감쇠를 주며 고속에서는 #5와 #3을 혼합하여 사용한 계산결과가 발표되고 있다.

패널이동법은 서론에서 언급한대로 파길이 및 감쇠의 오차등에 대한 이론적 규명 없이 경험적으로 좋은 결과를 주는 것으로 확인되어 널리 사용되어 왔으며, Scavonous & Nakos<sup>1)</sup> 오차 분석에서 오차가 거의 제거될 수 있음을 밝혔다. 본 연구 수행과정에서 발견한 중요한 점의 하나는 패널이동법에서 계산점(control point)의 위치가 파 감쇠에 결정적인 역할을 한다는 것이다. Fig. 2는  $K=0.4$ 에서 균일 패널 크기( $h$ )를 사용한 경우, 계산점의 위치에 따른 파형 변화를 보여 주고 있다. 계산점이 앞패널의 중앙점보다 앞에 위치하는 경우 파가 발산하고, 또한 뒤에 위치했을 경우 감쇠하는 경향을 볼 수 있으며 중앙점에 위치하면 파는 보존됨을 알 수 있다. 불 균일한 패널 크기를 사용한 경우에는 계산점이 각 패널의 중점에서 계산되면 파는 보존됨을 알 수 있었다.

Fig. 3은 방사 조건으로 4점 유한차분법과 패널이동법에 대해서 패널 크기에 따른 수치결과와 해석해를 비교한 것이다. 4점 상류차분법을 사용하는 경우  $h=1.0$ 에서 해석해에 비해 약 4%정도 파장이 줄어드는 것과 약간의 감쇠가 있으며, 패널 크기가 감소함에 따라 감쇠는 거의 0으로 되나 파길이 오차는 남아 있음을 볼 수 있다. 반면에, 패널이동법의 결과는  $h=1.0$ 에서도 해석해와 비슷한 결과를 주며,  $h=0.5$ 에서는 거의 해석해와 일치함을 알 수 있다.  $h=1.0$  (파장당 15.7개의 패널 분포)을 사용한 패널이동법의 계산결과가  $h=0.2$ (파장당 78.5개의 패널 분포)를 사용한 차분법의 계산 결과와 비슷하여 패널이동법이 차분법보다 우수함을 알 수 있다. 문제를 3차원으로 확장할 경우 뒤에서 언급 하였듯이,  $x$ 방향으로 5배의 패널수 증가는 안정적인 수치결과를 주는 패널 가로세로비 1을 사용하는 경우 총 패널수의 엄청난 증가로 인해 아주 큰 용량의 컴퓨터를 필요로 한다.

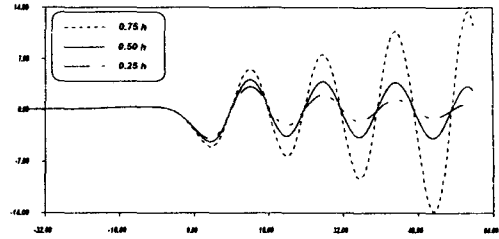


Fig. 2 Wave elevation variations at  $K=0.4$  by panel shift distance changes

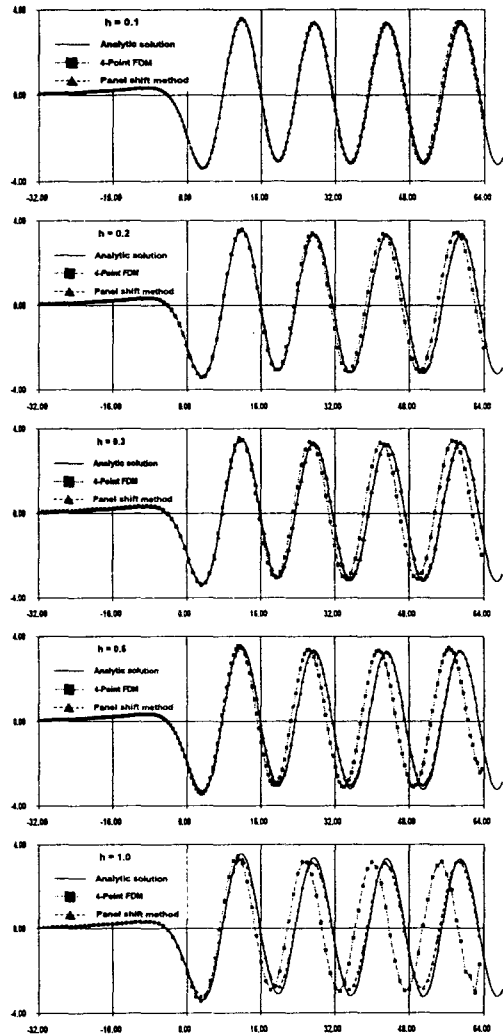


Fig. 3 Wave elevation due to a submerged doublet at  $K=0.4$  by three methods



### 5. 3차원 유동

먼저 자유수면하를 일정 속도로 이동하는 점 소오스에 대해 방사 조건으로 3점, 4점 상류차분법과 패널이동법을 적용하였고, Park & Chun<sup>8)</sup>이 사용한 고차 경계요소법에 의한 수치 결과 및 해석해와 비교하였다. 다음으로 Wigley 선형에 적용하여 각각의 방사 조건에 따른 파형, 선속파고 및 조파 저항을 비교 하였으며, 마지막으로 조파저항 값의 수렴성을 조사해 보았다.

#### 점 소오스 (Point source)

소오스의 잠긴 깊이(d)는 (0,0,-1)이며, 속도는  $Fn_d = 1.0$ 으로 하였다. 자유 수면의 계산 영역은  $-7 < x < 22$ 와  $0 < y < 10$ 이며, y방향으로 10개로 고정하고 x방향으로 한 파장당 20개의 패널수를 사용하여 각각의 방사 조건에 적용하여 비교하였으며, 또한 x방향으로 한 파장당 패널수를 변화시켜 수렴성도 조사하였다.

Fig. 4는 해석해인 Kelvin 소오스 해와 파형을 비교하고 있다. 방사 조건으로 3, 4점 유한차분법을 사용했을 경우, 하류 부근으로 갈 경우, 2차원 결과에서와 같이 파가 약간 깨지는 것을 볼 수 있다. 패널 이동법을 사용하는 경우는 해석해와 비슷한 파형을 보이고 있으며, 고차경계요소법을 사용하였을 경우 해석해와 가장 근접한 파형을 보이고 있다.

Fig. 5는 Fig. 4의 측면 파고를 보여 주고 있다. 3점 및 4점 차분법의 결과는 하류에서 큰 감쇠를 볼 수 있으며 패널이동법을 사용하는 경우 2차원 결과에서처럼 해석해와 근접함을 볼 수 있다. 또한 고차경계요소법에 의한 결과가 전체적으로 가장 우수함을 알 수 있다.

Fig. 6은 방사 조건으로 3점, 4점유한 차분법 및 패널 이동법을 사용한 경우에 한 파장당 패널수를 변화시킴 (6, 12, 20개)에 따라 해석해와 비교한 결과이다. 파장당 패널수를 증가 시키더라도 3점, 4점 유한차분법에서는 2차원 결과와 마찬가지로 감쇠와 분산성에 오차가 있음을 알 수 있고, 패널 이동법을 사용하는 경우는 패널수를 증가시키기에 따라 해석해와 근접한 결과를 줄을 알 수 있다.

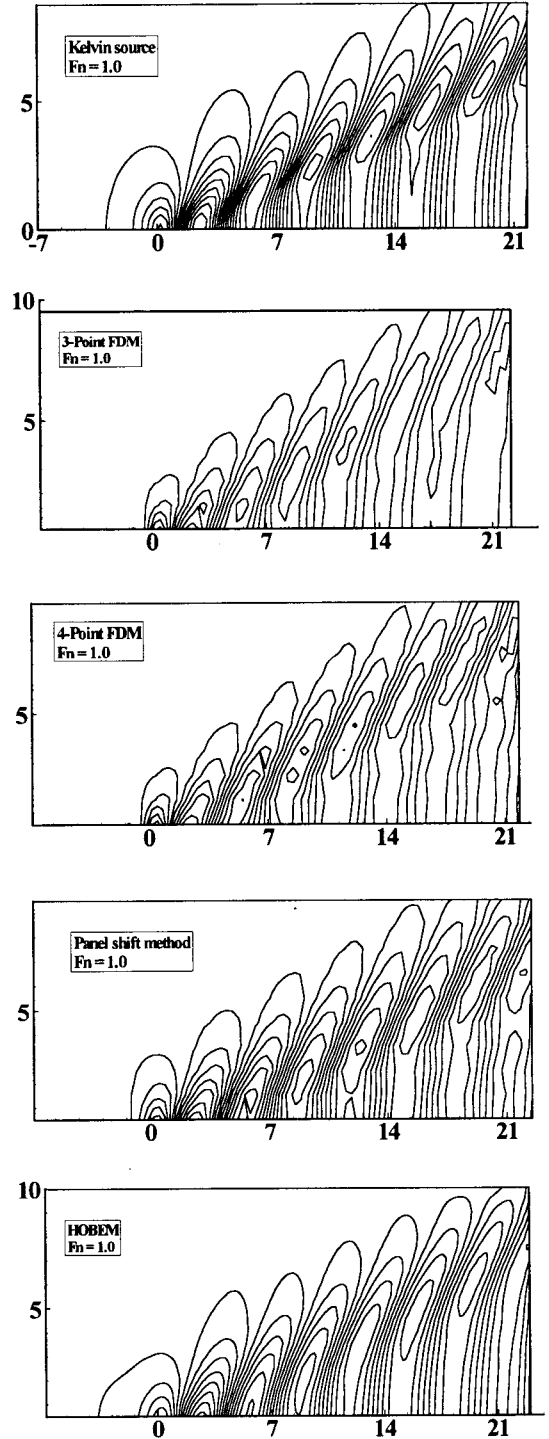


Fig. 4 Wave contours due to a submerged point source at  $Fn_d = 1.0$

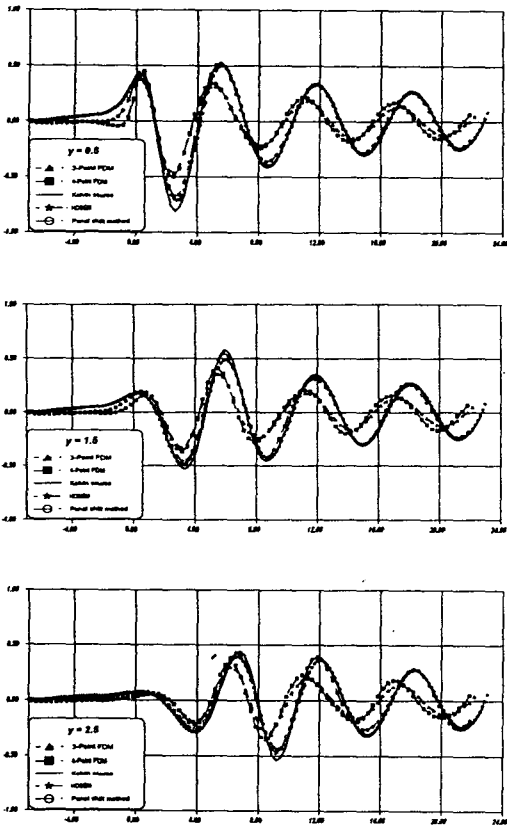


Fig. 5 Wave cut profiles for Fig. 4

Wigley 선형

실험 결과가 많이 알려진 Wigley선형에 대해 선측 파형 및 조파저항을 계산하였다. 편의상 모든 수치는  $L_{pp}/2$ 로 무차원화하여  $x=-1.0$ 은 F.P,  $x=1.0$ 을 A.P로 하였다. 계산 조건은 침하와 트림을 구속시켰고, 계산에 사용된 Wigley선형의 2차식 선형은 다음과 같이 주어진다.

$$y = \frac{B}{2} \left[ 1 - \left( \frac{2x}{L} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{z}{H} \right)^2 \right]$$

여기서 L, B, H는 각각 선체의 길이, 폭, 흘수를 나타내고 있으며  $-L/2 \leq x \leq L/2$ ,  $-H \leq z \leq 0$ ,  $B/L = 0.1$ ,  $H/L = 0.0625$ 이다.

자유 수면의 패널배치 영역은 많은 수치 계산 시도에 의해 최적의 수렴조건을 주는 영역을 사용

하였으며 Table 3에 주었다. 충분히 수렴된 해를 구하기 위해 표에 주어진 영역에서 패널의 분포는 뒤에서 언급하는대로 x방향으로 1단위길이가당 25개 정도의 패널수를 사용하고, 패널요소의 가로세로비는 수치해에 가장 안정적인 결과를 주는 1로 하였다. 선체의 패널분포는 자유표면의 분포보다 해에 많은 영향을 주지 않았으며 충분한 수렴해를 주는 패널 분포를 사용 하였다.

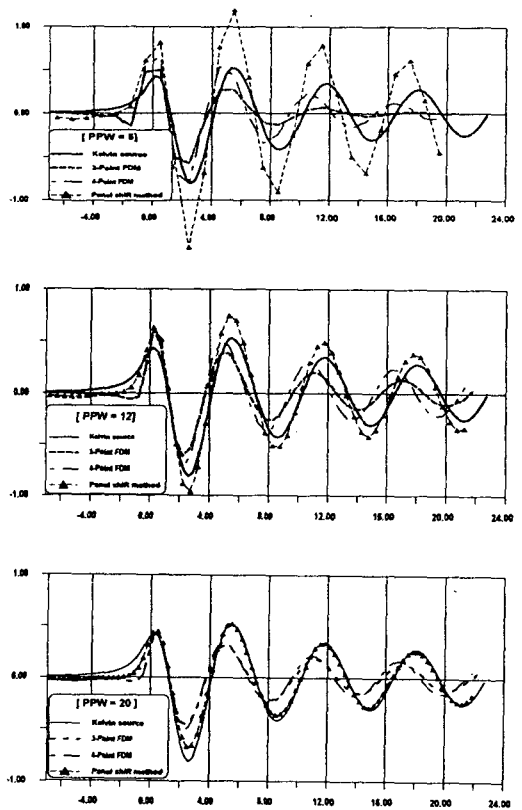


Fig. 6 Wave cut profile variations at  $y=0.5$  due to panel number per wave length Point source

Fig. 7은  $F_n = 0.35$ 에서 Wigley선형의 파형 (wave contour)을 보여주고 있다. 4점 상류차분법을 사용하는 경우 끝에서 파가 다소 깨지는 것을 볼 수 있는데 이는 파장이 다소 짧아지는 영향으로 볼 수 있으며, 패널이동법을 사용하는 경우는 고차

경계요소법을 사용하는 경우와 다소 근접한 결과를 주고 있다. 그러나  $2y/L=0.031, 0.0937, 0.15$ 에서의 선측파고(wave cut) 형상은 다소 다르게 나타남을 Fig. 8에서 보여주고 있다. 선수 어깨 파형은 패널이동법이 가장 뒤로 밀리고 있으며, 선미파는 고차경계요소법에 의한 결과가 가장 큼을 알 수 있다. 이렇게 달리 나타나는 파형에 대해 조파저항값의 비교는 다소 흥미로울 수 있다고 본다.

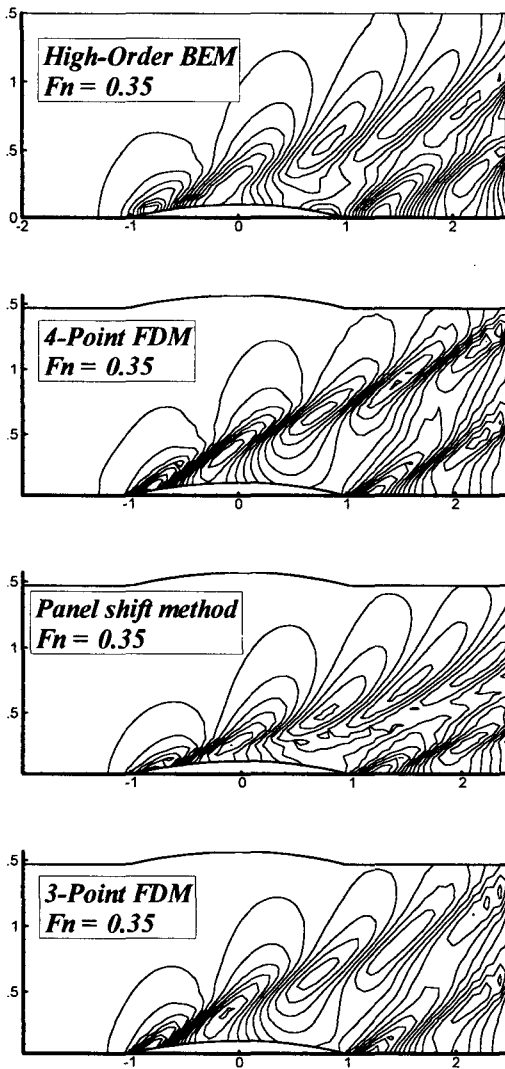


Fig. 7 Wave contours for Wigley hull at  $Fn=0.35$

ship)이론, 3, 4점 유한차분법, 패널이동법, 고차경계요소법에 의해 계산한 조파저항 계수를 비교하고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 3, 4점 유한차분법 및 패널이동법에 대한 계산결과는 뒤에서 언급하는 적절한 패널수 및 배치를 사용하면, 각각의 방법들에 의해 계산한 파형은 다를지라도 조파저항값이 모두 같은 값으로 수렴함을 알 수 있다. 이는 예상한 결과이며 발표된 논문들의 결과에서 많은 분산성이 나타나는 것은 충분히 수렴되지 않은 패널수를 사용한 것으로 생각된다. 또 하나 특이한점은 고차경계요소법이 고속으로 갈수록 조파저항값이 차분법과 패널이동법에 의한 계산결과보다 큰값을 주고 있으며 그 경향은 박선이론의 계산결과와 비슷함을 알 수 있다. 같은 경계치 문제의해는 수치계산의 방법의 차이에도 불구하고 동일한 결과(따라서 해의 유일성이 보장됨)를 주어야 되나(예로서 위에서 언급한 차분법과 패널이동법의 결과는 같음) 이렇게 차이가 나는 것은 차후에 원인을 밝혀야 될 것으로 본다. 차분법과 패널이동법에서 수치감쇠와 분산성 오차를 없앨수 있는 충분히 작은 패널크기를 사용하였기 때문에 현재로서는 명확한 이유를 찾아 낼수 없으나 저차패널법의 한계가 아닌가 생각된다.

Table 3 Free surface domain used in the computation

$Fn$	$Lw$	Range in $x$	Range in $y$
0.17	0.363	$-1.4 \leq x \leq 1.4$	$y \leq 0.5$
0.20	0.503	$-1.5 \leq x \leq 1.5$	$y \leq 0.7$
0.25	0.785	$-1.5 \leq x \leq 1.8$	$y \leq 1.0$
0.30	1.131	$-1.5 \leq x \leq 2.2$	$y \leq 1.0$
0.35	1.539	$-2.0 \leq x \leq 2.54$	$y \leq 1.5$
0.40	2.010	$-2.0 \leq x \leq 3.0$	$y \leq 1.5$
0.45	2.545	$-2.0 \leq x \leq 3.6$	$y \leq 1.5$
0.50	3.150	$-2.0 \leq x \leq 4.2$	$y \leq 1.5$

Fig. 9에서는 실험한 잉여저항계수, 박선(thin

현재의 Wigley선형에 적용해 본 결과, 고차경계요소법의 계산시간이 속도에 따라서 다소 차이는 있었지만 패널법의 1/2-2/3정도 소요되어 앞으로

계산정도와 계산시간의 측면에서 고차경계요소법의 활용이 바람직한 것으로 생각된다.

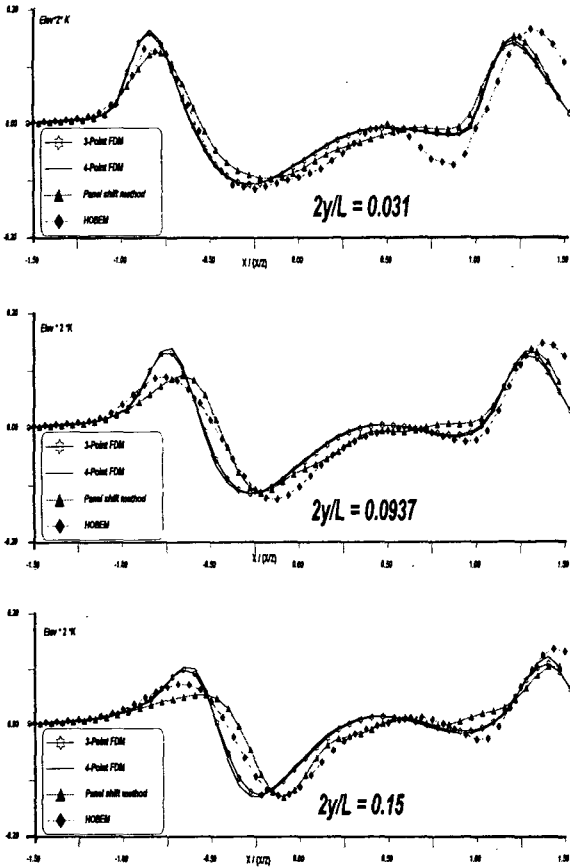


Fig. 8 Wave cut profiles for Wigley hull at  $Fn=0.35$

자유표면에서의 계산영역, 패널수 및 패널의 가로세로비에 따른 조파저항의 수렴성에 대해 광범위하게 조사하여 보고하였다<sup>19)</sup>. 가장 적절한 계산영역은 앞에서 언급하였듯이 Table 3에 주었으며, 하류방향으로는 1파장 정도의 영역에서 Table 4에 주어진 속도별 패널수이면 충분히 수렴함을 알 수 있었다. 또한 패널의 가로세로비는 1이 가장 안정적인 결과를 주었다. 저속에서는 파장당 10개 이상이면 수렴하고 고속으로 갈수록 파장이 길어지기 때문에 파장당 패널수가 증가해야 된다고 본다. 즉, 단위 길이당 길이 방향 패널 크기  $h$ 는 25개 정도의

밀도를 가져야 수렴됨을 알 수 있었다( $1/h = 25$ 개). 이 결과는 지금까지 제시된 파장당 10~12개의 패널배치에 전적으로 위배되는 결과이며 이런 맥락에서 Letcher<sup>11)</sup>의 모든 차분 공식은 고속에서 방사조건을 만족 시킬수 없다는 결론은 부적당하며 패널의 요소 길이를 적게하면 고속에서도 수렴된 결과를 얻을 수 있다고 생각된다. 참고로 본 계산에 사용된 컴퓨터는 586 Pentium II (CPU= 266Mhz, RAM=256 Mega bytes)이며 Table 4에 보여주는 최대속도는 컴퓨터의 용량에 의해 제한되었다.

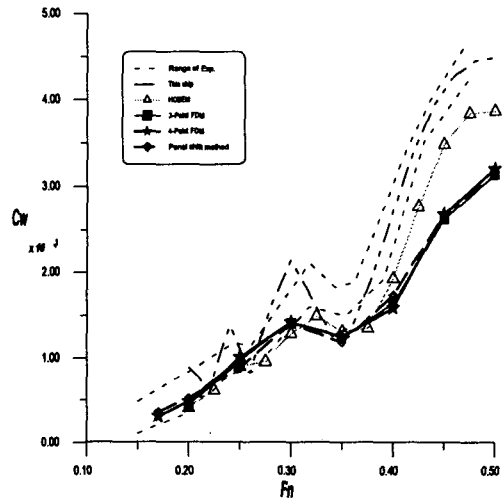


Fig. 9 Wave resistance coefficient for Wigley hull

Table 4 x-directional panel numbers per wave length which give good converged results at different speeds

$Fn$	$Lw = 2 \pi * U^2/g$	$Lw / h = 2 \pi * Fn_h^2$
0.17	0.3631	10
0.20	0.503	12
0.25	0.785	20
0.30	1.131	30
0.35	1.539	34
0.40	2.010	40
0.45	2.545	46
0.50	3.15	64

## 6. 결론

정상파 문제의 방사조건을 만족하기 위해 사용된 유한차분법, 패넬이동법 및 고차경계요소법을 2차원 및 3차원 문제에 적용하여 파형 및 조파저항을 비교하고 다음의 결론을 얻었다.

1) 유한 차분법은 항상 파분상 및 감쇠오차를 수반하고 패넬 이동법은 이러한 오차가 제거 되었다. 또한, 고차 경계요소법과 S-N법의 방사조건 사용은 수치 오차를 제거시켜 주며 가장 우수한 결과를 주었다.

2) 본 논문에서 제시한 패넬 배치법을 사용한다면 차분법 및 패넬이동법에 의해 계산한 파형은 다를지라도 조파저항 값은 거의 비슷한 값을 주었다.

3) 고차경계요소법에 의한 조파저항계산 결과는 저속과 중속에서는 위 두 방법과 동일하였으나 고속으로 갈수록 두 방법에 의한 계산 결과값 보다 다소 큰값을 주었으며 크기는 다소 작았지만 그 경향은 박선이론의 계산결과와 비슷 하였다.

4) 고차경계요소법에 의한 계산시간이 차분법이나 패넬이동법에 의한 계산시간의 1/2-2/3정도 소요되어 계산시간과 정도면에서 우수하였다.

5) 같은 경계치 문제의 해 (조파저항)는 수치계산 방법의 차이에도 불구하고 동일한 결과 (따라서 해의 유일성이 보장됨)를 주어야 되나 (예로서 차분법과 패넬이동법의 결과는 같음), 고차경계요소법과 차이가 나는 것은 패넬수를 증가시켜도 결과의 향상은 기대되지 않기 때문에 저차패넬법의 한계가 아닌가 생각되지만 이에 대한 명확한 원인 규명이 따라야 된다고 본다.

## 후 기

본 연구는 1996년 한국학술진흥재단의 신진 교수과제 연구비에 의해 수행된 결과이며 지원에 감사드린다.

## 참고문헌

1) Sclavounos, P. D. & Nakos, D. E., "Stability Analysis of Panel Methods for

Free Surface Flows with Forward Speed", Proceedings, 17th Symposium on Naval Hydrodynamics, 1988

2) Dawson, C.W., " A Practical Computer Method for Solving Ship-Wave Resistance", 2nd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, 1977

3) Van Beek, C. M., Piers, W. J, and Slooff, J. W., " Boundary Integral Method for Computation of the Potential Flow about Ship Configurations with lift and free surface effect ", NLR, Report, TR-85-142 U, 1985

4) Xia, F., "Numerical Calculations of Ship Flows with Special Emphasis on the Free Surface Potential Flow", Dissertation, Chalmers University, Goteborg, Sweden, 1986

5) Aanesland, V., "A Theoretical and Numerical Study of Ship Wave Resistance", Ph. D. Thesis, Department of Marine Technology, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, 1986

6) Raven, H. C., "A Note on the Radiation Condition in Dawson's Method ", MARINE Report No. 50700-1-RF, 1988

7) Kim K. J., "Ship Flow Calculations and Resistance Minimization", Ph. D. Dissertation, Chalmers Univ. Tech. Goteborg, 1989

8) Park I. R., Chun H. H., "Nonlinear Flow Characteristics of Two-Dimensional Hydrofoils Moving below the Free Surface", Pro. of the Autumn Meeting of The Society of Naval Architecture of Korea, 1995 (in Korean)

9) Xia, F., and Larsson, L., "A Calculation Method for the Lifting Potential Flow around Yawed, Surface Piercing 3-D bodies", 16 th Symposium on Naval Hydro - dynamics, U.S.A., 1986

10) Jensen, P. S. " On the Numerical Radiation Condition in the Steady State Ship Wave Problem ", Journal of Ship Research, 31, 1, March, 1987

- 11) Letcher, J . S., "Properties of Finite - Difference Operator the Steady-Wave Problem', Journal of Ship Research, Vol.37, No. 1, March 1993
- 12) Jensen, G., Mi, Z. X. and Soding, H., "Rankine Source Methods for Numerical Solutions of the Steady Wave Resistance Problem", 16th Symposium on Naval Hydrodynamics, USA, 1986
- 13) Raven, H. C., "Alternative Resistance Expression for Free Surface Panel Methods", MARIN Report No. 50700-2-RF, 1988
- 14) Ando, J., and Nakatake, K., "A Method to Calculate Wave Flow by Rankine Source", West-Japan Society of Naval Architecture, Japan, 1987
- 15) Hong S, Y. and Choi H. S., "Analysis of Steady of Steady and Unsteady Flow Around a Ship Using a Higher-Order boundary Element Method", Transactions of The Society of Naval Architecture of Korea, Vol. 32, No. 1, 1995 ( in Korea )
- 16) Park I. K., Chun H. H., Kim S. H., Ha D. D., "Free Surface Flow Analysis around Three Dimensional Hydrofoils by a Higher order Boundary Element", Proc. of China-Korea Marine Hydrodynamics Meeting, Shanghai, China, Aug. 1997
- 17) Lamb, H., Hydrodynamics, Dover, New York, Art. 242, 1945
- 18) Wehausen J. V. and Laitone, E. V., "Surface Wave", Handbuch der Physik, 9, Springer, Berlin, 479
- 19) Lee K. H. "A Study on the Numerical Radiation Condition in the Steady-State Wave Problem", Msc Thesis, Dept of Naval Architecture & Ocean Engineering, Pusan National University, Korea (in Korean)