

3차원 8절점 비적합 고체요소에 의한 복합재 판의 순수굽힘문제의 정적·동적해석

윤 태 혁* · 권 영 두**
(97년 8월 5일 접수)

Static and Dynamic Analyses of Pure Bending Problems of Composite Plates using Non-Conforming 3-Dimensional 8-Node Solid Element

Tae-Hyeok Yun* · Young-Doo Kwon**

Key Words : Static Scondensation(정적수축), Stiffness Stiffening Phenomenon(강성과잉현상), Modified Gauss Sampling Points(가우스적분점수정), Non-Conforming 3-Dimensional 8-Node Solid Element(비적합 3차원 8절점 고체요소)

Abstract

In this paper, a non-conforming 3-D 8-node solid element(MQM10) has been applied to the analyses of static and dynamic bending problems of laminated composite plates. The QM10 element exhibits stiffer bending stiffness which is caused by the reduction of degree of freedom from Q11 element.

As an effective way to correct the relative stiffness stiffening phenomenon, the modification of Gauss sampling points for composite plates is proposed. The quantity of modification is a function of material properties. Also, another two modified equations are obtained, one is modification for stress, and the other is modification of coefficient of shear modulus in free vibration.

It is noted that MQM10 element can analyse the static and free vibration problems of various 3-dimensional composite plates composed of unidirectional laminae, woven laminae, or braided laminae. The results of MQM10 element are in good agreement with those of 20-node element.

1. 서 론

최근 기계나 구조물의 경량화와 고성능·고기능

화의 추세로 인하여 기존의 금속재료로는 새로운 요구에 부응하기에는 그 기능성에 한계가 있다. 이러한 새로운 요구에 부응하는 신소재로써 복합재

* 정회원, 구미전문대학 기계설계과
** 경북대학교 기계공학부

료가 각광을 받고 있으며, 자동차산업, 항공·우주 산업, 해양·조선산업 등의 광범위한 산업분야에 적용이 늘어나는 추세에 있다.

복합재료로 구성된 평판구조물의 해석을 위한 고전적 적층판이론은 Kirchhoff⁽¹⁻⁴⁾의 가정에 근거를 두고 있으며, 주로 두께가 얇은 복합재 판의 변위와 응력해석에 적용되었다. 고전적 적층판 이론으로 두께가 두꺼운 적층 복합재 판의 굽힘문제를 해석하면 횡전단 변형률과 두께 방향의 횡법선 변형률의 영향을 무시함으로써 변위들은 작게 평가되고 강성은 과대하게 평가된다. 1차 전단변형 이론은 Reissner-Mindlin^(5, 6)의 판 이론에 근거를 둔 것으로서 굽힘변형과 전단변형을 동시에 고려하였다.⁽⁷⁾ 이 이론에서는 수직변위와 회전변위가 독립적으로 가정되므로 형상함수는 C_0 연속조건만 만족하면 되고 고전적 적층판 이론보다 정확한 해를 얻었다. 그러나, 이들은 두께가 두꺼운 적층판들이나, 응력 기울기가 매우 큰 경우나, 응력의 불연속성이 존재하는 경우 등에 대해 부적합하다. 고차 전단변형 이론⁽⁸⁻¹²⁾은 1차 전단변형의 문제점을 해결하기 위해 두께방향으로 불균일한 전단변형을 가정하였다. 이 중에서 Reddy^(8, 9)는 3차 전단변형 판이론을 제안하였는데 여기서는 횡법선 효과는 무시하고 두께방향으로 횡전단 변형률이 포물선 형태로 분포한다고 가정하여 해를 구하였다.

적층 복합재판의 굽힘문제 해석에 사용할 수 있는 평판/셀요소중 곡면요소는 해석할 수 있는 구조물의 형태가 제한되고, 많은 자유도를 가지는 단점이 있다^(13, 14). 평면요소도 평판/셀의 해석에 사용될 수 있으나 요소의 형태가 평면이므로 요소와 요소 사이의 굽힘의 불연속이 존재하게 된다⁽¹⁵⁾. 등매개 변수요소를 변형시켜 회전변위와 이동변위를 각각 독립적으로 구성하는 퇴화요소(degenerated element)도 있으나 완전히 문제가 해결되지 않고 있다^(16, 17).

한편, 적층판의 굽힘문제를 해석할 수 있는 3차원 등매개 변수요소로는 20절점요소⁽¹⁸⁾, 수정 16절점요소^(19, 20), Q11요소⁽²¹⁾ 등이 있으며, 판요소나 셀요소 등과 더불어 사용되고 있다. 그러나, 고체요소는 고차요소일수록 너무 많은 미지수로 인해 계산량이 방대해 지는 단점이 있다. 20절점요소는 3

차원 완전요소이므로 계산량이 방대해지는 단점을 제외하고는 적층판의 굽힘문제에 아무런 문제없이 적용될 수 있다. 16절점요소를 이용하여 적층판의 굽힘문제를 해석하는 경우 3차원 20절점요소 보다 자유도나 소요기억 용량 등을 줄일 수 있으나, 20절점요소에 비해 저차 요소이므로 판의 두께가 얇아짐에 기인한 전단잠김(shear locking) 현상과는 다른 굽힘강성이 과대해 지는 상대적 강성과잉 현상(stiffness stiffening phenomenon)이 나타나게 된다. 이러한 상대적 강성과잉 현상을 제거하기 위한 방법으로써 강성행렬 등의 수치적분시 가우스 적분점 위치 수정법이 제안되었다.^(19, 20) Q11요소⁽²²⁾는 8절점 3차원 고체요소에 내부 무절점 자유도와 관계되는 3개의 비적합 형상함수를 추가한 요소로 구조해석용 상용 패키지인 NISA II 등에서 사용되고 있다.⁽²¹⁾

본 연구에서는 적층 복합재판의 굽힘문제를 해석할 수 있는 3차원 고체 요소를 대상으로 하고, 3차원 고체 요소중 자유도가 최소인 MQM10요소를 복합재 판용 요소로 제안한다. MQM10요소는 3차원 등매개 8절점요소에 2개의 비적합 형상함수를 추가한 3차원 10절점 상당요소(3-D 10-node equivalent element)로서 Q10요소가 조각시험(patch test)을 통과하기 위해 무차원 자연좌표계 $r = s = t = 0$ (zero)에서의 자코비안 값을 사용한 QM10요소의 상대적 강성과잉 현상을 제거하기 위해 가우스 적분점 위치를 수정한 요소이다. Q10요소, QM10요소를 적층판의 굽힘문제 해석에 적용할 때 20절점요소에 비해 자유도가 줄어들어 기인한 상대적 강성과잉 현상이 발생되고, 이를 제거할 수 있는 방법으로써 가우스 적분점 수정 방법을 적용하고, 20절점요소에 대한 QM10요소의 가우스 적분점 위치를 수정할 수 있는 적분점 수정식을 유도하였다. 제안된 요소를 이용하여 요소의 비사각 분할에 따른 거동을 검토하기 위해 요소의 비사각 분할 정도를 변화시키면서 변위와 응력을 해석하여 20절점요소의 결과와 비교하여 수정식의 타당성을 확인하였다. 해의 정확성을 확인한 적분점 수정식을 적용하여 여러가지 형태로 적층된 복합재판의 정적·동적해석과 층간응력 해석을 수행하여 그 효용성을 확인하였다.

2. 평형식 및 가우스 적분점 수정식

2.1 대변위문제의 유한요소해석

비선형 대변위를 수반되는 구조물의 대한 유한요소해석을 위해서는 일반적으로 고체문제의 해석에 많이 적용되는 total Lagrange(T.L.) 방식에 의한 가상변위의 원리를 사용하여 평형 방정식을 유도하고, 이를 이용하여 등매개변수 요소에 대한 유한요소 평형식으로 정식화한다. 그러나, 정식화된 평형식은 선형화에 기인한 오차가 발생하므로 외력과 등가절점력의 차이($\{ {}^{t+\Delta t}R \} - \{ {}^t F \}$)가 충분히 작을 때까지 평형반복 계산이 필요하다. 이러한 평형반복 계산을 Newton-Raphson 방법에 의하여 평형반복 계산식으로 나타내면 식 (1)과 같다.

$$[{}^{t+\Delta t} K]^{(i-1)} \{ \Delta U \}^{(i)} = \{ {}^{t+\Delta t} R \} - \{ {}^{t+\Delta t} F \}^{(i-1)} \quad (1)$$

여기서, 강성행렬은 선형강성행렬과 비선형강성행렬의 합으로 나타난다.

$$[{}^{t+\Delta t} K]^{(i-1)} = [{}^{t+\Delta t} K_L]^{(i-1)} + [{}^{t+\Delta t} K_{NL}]^{(i-1)} \quad (2)$$

선형강성행렬은

$$[{}^{t+\Delta t} K_L]^{(i-1)} = \int_{\circ V} ([{}^{t+\Delta t} B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t} B_{L1}])^T [D] \cdot ([{}^{t+\Delta t} B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t} B_{L1}]) d(\circ V) \quad (3)$$

비선형강성행렬은

$$[{}^{t+\Delta t} K_{NL}] = \int_{\circ V} ([{}^{t+\Delta t} B_{NL}]^T [{}^{t+\Delta t} S] \cdot [{}^{t+\Delta t} B_{NL}]) d(\circ V) \quad (4)$$

등가절점력은

$$\{ {}^{t+\Delta t} F \} = \int_{\circ V} ([{}^{t+\Delta t} B_{L0}] + [{}^{t+\Delta t} B_{L1}])^T [{}^{t+\Delta t} S] d(\circ V) \quad (5)$$

로 나타나고 이들의 좌측 아래첨자와 위첨자는 기

준시간 0을 기준으로 한 시간 t에서의 각각의 값들을 나타내며, i는 반복계산횟수, $\{ \Delta U \}$ 는 증분변위 벡터, $\circ V$ 는 초기상태의 체적을 나타낸다. 위 식들에 나타난 변위-변형을 행렬들은 각각 아래의 식들과 같이 나타난다.

$$\begin{bmatrix} t \\ \circ \end{bmatrix} B_L = \begin{bmatrix} t \\ \circ \end{bmatrix} B_{L0} + \begin{bmatrix} t \\ \circ \end{bmatrix} B_{L2}, \quad \begin{bmatrix} t \\ \circ \end{bmatrix} B_{L1} = 2 \begin{bmatrix} t \\ \circ \end{bmatrix} B_{L2} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} t \\ \circ \end{bmatrix} B_{L0} = \begin{bmatrix} \circ h_{1,1} & 0 & 0 & \circ h_{2,1} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \circ h_{1,2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \circ h_{1,3} & 0 & \dots & \dots & \circ h_{N,3} \\ \circ h_{1,2} & \circ h_{1,1} & 0 & \circ h_{2,2} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \circ h_{1,3} & \circ h_{1,2} & 0 & \dots & \dots & \circ h_{N,2} \\ \circ h_{1,3} & 0 & \circ h_{1,1} & \circ h_{2,3} & \dots & \dots & \circ h_{N,1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} t \\ \circ \end{bmatrix} B_{L2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_{11}h_{1,1} & P_{21}h_{1,1} \\ P_{12}h_{1,2} & P_{22}h_{1,2} \\ P_{13}h_{1,3} & P_{23}h_{1,3} \\ P_{11}h_{1,2} + P_{12}h_{1,1} & P_{21}h_{1,2} + P_{22}h_{1,1} \\ P_{12}h_{1,3} + P_{13}h_{1,2} & P_{22}h_{1,3} + P_{23}h_{1,2} \\ P_{11}h_{1,2} + P_{12}h_{1,1} & P_{21}h_{1,2} + P_{23}h_{1,1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{31}h_{1,1} & \dots & P_{31}h_{N,1} \\ P_{31}h_{1,2} & \dots & P_{32}h_{N,2} \\ P_{33}h_{1,3} & \dots & P_{33}h_{N,3} \\ P_{31}h_{1,2} + P_{32}h_{1,1} & \dots & P_{31}h_{N,2} + P_{32}h_{N,1} \\ P_{32}h_{1,3} + P_{33}h_{1,2} & \dots & P_{32}h_{N,3} + P_{33}h_{N,2} \\ P_{31}h_{1,3} + P_{33}h_{1,1} & \dots & P_{31}h_{N,3} + P_{33}h_{N,1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서, $\circ h_{k,j} = \partial h_k / \partial \circ h_j$, $P_{ij} = \sum_{k=1}^N \circ h_{k,j} {}^t u_k^i$,

${}^t u_k^i$ 는 시간t에서 k번째 절점의 i방향의 변위, N은 절점수를 의미하며, h_k (k는 절점번호)는 형상함수이다. 한편, $\{ {}^{t+\Delta t}R \}$ 는 외력벡터를 나타낸다.

식 (1)은 정적 비선형 평형방정식을 나타내며,

동적인 문제에 있어서는 관성력이 부가되므로 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$[{}^t+\Delta t K]^{(i-1)} \{\Delta U\}^{(i)} = \{{}^t+\Delta t R\} - \{{}^t+\Delta t F\}^{(i-1)} - [M] \{{}^t+\Delta t \ddot{U}\}^{(i)} \quad (9)$$

한편, 판의 적층수가 NL인 복합재판의 경우 질량 행렬과 강성행렬은 각각 식 (10), 식 (11)과 같이 나타난다.

$$[M] = \int_{\circ} \rho [M]^T [M] d(\circ V) \quad (10)$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\rho [M]^T [M] J) (h_{(k)}/h) dr ds dt$$

$$[{}^t+\Delta t K]^{(i-1)} = \int (([{}^t+\Delta t B_{L\omega}] + [{}^t+\Delta t B_{U\omega}])_{(k)}^T [D]_{(k)} ([{}^t+\Delta t B_{L\omega}] + [{}^t+\Delta t B_{U\omega}])_{(k)}^{(i-1)} d(\circ V)$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (([{}^t+\Delta t B_{L\omega}] + [{}^t+\Delta t B_{U\omega}])_{(k)}^T [D]_{(k)} ([{}^t+\Delta t B_{L\omega}] + [{}^t+\Delta t B_{U\omega}])_{(k)}^{(i-1)}) (h_{(k)}/h) dr ds dt \quad (11)$$

여기서, NL은 적층판의 수, h는 판의 전체 두께, $h_{(k)}$ 는 k번째 층의 두께, ρ 는 밀도, [N]은 형상함수 행렬, J는 Jacobian determinant를 나타내며, r, s, t는 무차원 좌표계를 나타내며 이들은 $-1 \leq r, s, t \leq 1$ 의 값을 갖는다. $t_{(k)}$ 는 $-1 \leq t_{(k)} \leq 1$ 의 값을 가지며 t와의 관계는 아래와 같다.

$$t = -1 + [-h_{(k)}(1-t_{(k)}) + 2 \sum_{j=1}^k h_{(j)}/h] dt = (h_{(k)}/h) dt_{(k)} \quad (12)$$

식 (11)에서 [D]_(k)는 k번째층 구성물질의 특성행렬로써 식 (13)과 같이 나타난다.⁽²⁵⁾

$$D_{(k)} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & 0 & 0 \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & D_{34} & 0 & 0 \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & D_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{56} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$D_{11} = m^4 Q_{11} + 2m^2 n^2 (Q_{12} + 2Q_{44}) + n^4 Q_{22}$$

$$D_{12} = m^2 n^2 (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{44}) + (m^4 + n^4) Q_{12}$$

$$D_{13} = m^2 Q_{13} + n^2 Q_{23}$$

$$D_{14} = mn((m^2 Q_{11} - n^2 Q_{22} - (m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{44}))$$

$$D_{22} = n^4 Q_{11} + 2m^2 n^2 (Q_{12} + 2Q_{44}) + m^4 Q_{22}$$

$$D_{23} = n^2 Q_{13} + m^2 Q_{23}$$

$$D_{24} = mn((n^2 Q_{11} - m^2 Q_{22} - (m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{44}))$$

$$D_{33} = Q_{33}$$

$$D_{34} = mn(Q_{13} - Q_{23})$$

$$D_{44} = m^2 n^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{12}) + (m^4 - n^4) Q_{44}$$

$$D_{55} = m^2 Q_{55} + n^2 Q_{66}$$

$$D_{56} = mn(Q_{66} - Q_{55})$$

$$D_{66} = m^2 Q_{66} + n^2 Q_{55}$$

$$m = \cos \theta_{(k)}, \quad n = \sin \theta_{(k)}$$

$$\theta_{(k)} = \text{layer angle of } k\text{th layer}$$

식 (13)에서 $Q_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 는 직교성 재료의 주축에 대한 탄성계수로써 식 (14)와 같다.

$$Q_{11} = E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})/\Delta, \quad Q_{12} = E_1(1 - \nu_{21}\nu_{31}\nu_{23})/\Delta$$

$$Q_{13} = E_3(1 - \nu_{13}\nu_{12}\nu_{23})/\Delta, \quad Q_{22} = E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})/\Delta$$

$$Q_{23} = E_3(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})/\Delta, \quad Q_{33} = E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})/\Delta$$

$$Q_{44} = G_{12}, \quad Q_{55} = G_{12}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \quad (14)$$

감쇠가 없는 복합재 적층판에 대한 자유진동시의 운동방정식은 식 (9)를 미소변위 문제로 국한하면 식 (15)와 같다.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{0\} \quad (15)$$

식 (15)에서 $U = e^{i\omega t}$ 라 두고 다시 정리하면 식 (16)과 같은 고유치 문제가 된다.

$$[\lambda] [M] \{\Psi\} = [K] \{\Psi\} \quad (16)$$

식 (16)을 subspace iteration method⁽²³⁾ 및 generalized Jacobi method⁽²³⁾를 사용하여 고유치 $\lambda_i = \omega_i^2$ 과 모드 형상벡터 ψ_i 를 구한다.

2.2 Q10요소의 형상함수 및 가우스 적분점 수정식

평판의 거동은 두께가 얇아지면 전단변형은 거의 없어지고 굽힘변형에 의한 거동이 전체의 거동을 지배하게 된다. 판/셀요소에 의한 해석시 변위차수와 회전차수의 불일치 등에 기인하여 전단변형이 약간 부정확하게 평가되고 이에 상대적으로 매우 큰 전단강성이 곱해지게 되어 전단변형 에너지에 외부일이 소모되어 굽힘변형이 작게 평가되는 전단 잠김(shear locking) 현상이 발생한다⁽²²⁾. 제안된 요소는 고체요소로 이러한 강성과잉 현상은 없으나, 절점의 축소에 의한 자유도가 줄어들어 기인한 상대적 강성과잉 현상이 발생되고, 이를 해결하기 위한 방법으로써 복합재 판용 3차원 Q10요소의 가우스 적분점 수정식을 유도한다. Q10요소는 8절점 등매개 입체요소에 2개의 비적합 변위모드가 추가된 10절점 상당요소로 굽힘변형을 나타낼 수 있는 고체 요소중 최소의 자유도를 가지고 있다. Q10요소는 해의 수렴성을 검증하는 조각시험(patch test)을 통과하지 못하므로 무차원 자연좌표계 $r = s = t = 0$ 에서의 자코비안 값을 사용해야 하며 이를 QM10요소라 한다. 따라서, QM10요소는 Q10요소에서 자코비안(Jacobian)을 무차원 자연좌표계 $r = s = t = 0$ 에서의 값을 사용한 것을 의미한다. 복합재판용 요소로 제안된 MQM10요소는 QM10요소로 평판의 굽힘문제 해석에서 발생하는 상대적 강성과잉 현상을 제거하기 위해 강성행렬 등의 수치계산 때 가우스 적분점 위치를 수정한 것을 의미한다.

2.2.1 Q10요소의 형상함수 및 정적수축

Q10요소는 3차원 8절점 입체요소에 2개의 비적합(non-conforming) 형상함수를 추가한 것이다.

$$h_9 = 1 - r^2, \quad h_{10} = 1 - s^2 \quad (17)$$

3차원 평판의 경우 일반적으로 두방향에 다른 한방향 보다는 상대적으로 길이가 길고, 길이가 짧은 방향을 두께방향(t방향)으로 한다. 평판의 굽힘변형시 굽힘이 일어나는 방향은 길이가 긴 방향(r, s 방향)으로 일어나며 길이가 짧은 방향으로는 굽힘

이 불가능하거나 굽힘이 발생하더라도 지극히 미소하므로 무시할 수 있다. 따라서, 3차원 평판의 굽힘문제에서 동시에 세 방향의 굽힘은 발생하지 않거나 길이가 짧은 방향의 변형은 무시할 수 있으므로 3방향의 굽힘을 고려한 Q11요소의 3개의 형상함수가 전부 필요치 않다고 할 수 있다. 특별한 경우 길이가 짧은 방향이 국소좌표계의 r방향이나 s 방향이 되어 변형이 일어난다면 수치해석 프로그램의 입력문에서 요소의 절점번호를 바꾸어 읽음으로써 해결이 가능하므로 3방향으로 동시에 굽힘이 발생하는 아주 특별한 경우를 제외하고는 변형에 대한 거동을 충분히 표현할 수 있으며 굽힘방향에 따라 제한적이라 할 수 없다.

요소내의 변위장은 식 (18)과 같이 표시된다.

$$\{uvw\}^T = \sum_1^4 h_i \{u_i \ v_i \ w_i\}^T + h_9 \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6\}^T + h_{10} \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6\}^T \quad (18)$$

여기서 $\{a_i\}$ 는 무절점 자유도로서 식 (18)에서 추가한 2개의 비적합 변위모드에 관계하는 자유도들이다. 이들은 수치해석시 변위 등은 계산되지 않고 단지 자유도가 줄어들어 기인한 강성과잉 현상을 방지하기 위해 추가된 자유도들로서 수치계산 과정에서 정적수축(static condensation)되어 소거된다.⁽²²⁾

변형률은 변위의 도함수(gradient)로 정의되며 식 (19)와 같다.

$$\{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ 2\varepsilon_{xy} \ 2\varepsilon_{yz} \ 2\varepsilon_{zx}\}^T = \sum_1^8 [B_i] \{u_i \ v_i \ w_i\}^T + [G] \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6\}^T \quad (19)$$

여기서,

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_i}{\partial z} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} & \frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_i}{\partial z} & \frac{\partial h_i}{\partial y} \\ \frac{\partial h_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_9}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_9}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h_9}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial z} \\ \frac{\partial h_9}{\partial y} & \frac{\partial h_9}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial y} & \frac{\partial h_{10}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_9}{\partial z} & \frac{\partial h_9}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial z} & \frac{\partial h_{10}}{\partial y} \\ \frac{\partial h_9}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_9}{\partial x} & \frac{\partial h_{10}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h_{10}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (21)$$

무절점 자유도 $\{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6\}^T$ 는 계의 자유도에 포함되지 않고 요소의 강성행렬 구성의 최종 단계에서 정적수축에 의해 소거된다. 따라서, 추가적인 자유도 $\{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6\}^T$ 는 관련된 절점이 없고, 절점하중도 없으므로 유한요소 평형방정식은 식 (22)와 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & K_{ra} \\ K_{ar} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u_0\} \\ \{a_0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{r\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서, $[K_{rr}]$ 는 적합 형상함수의 강성행렬, $[K_{aa}]$ 는 비적합 형상함수의 강성행렬, $\{u_0\}$ 는 요소의 8개 절점 변위벡터, $\{a_0\}$ 는 비적합 변위에 의한 무절점 자유도, $\{r\}$ 은 절점에 작용하는 외력벡터이다. 식 (22)를 나누면 식 (23)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} ([K_{rr}] - [K_{ra}][K_{aa}]^{-1}[K_{ar}])\{u_0\} &= \{r\} \\ \{a_0\} &= -[K_{aa}]^{-1}[K_{ar}]\{u_0\} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, 조각시험(patch test)을 통과하기 위해서는 균일응력에 대해 무절점 자유도 $\{a_0\}$ 는 $\{0\}$ 이 되어야 하며, $[K_{aa}]$ 는 양의 값을 가지므로 $[K_{ar}]\{u_0\}$ 가 $\{0\}$ 이 되어야 한다^(3, 21).

$$\begin{aligned} [K_{ar}]\{u_0\} &= \int_{ov} [G]^T [D]\{u_0\} d^oV \\ \{0\} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G]^T \{\sigma_o\} t J dr ds dt \end{aligned} \quad (24)$$

일반적인 형태의 입체요소에 대해 식 (24)가 항상 만족되기 위해서는 $[G]$ 의 계산시 야코비안 $J = J_o$ ($r=s=t=0$)의 값을 사용하고 $dV_o = t J_o dr ds dt$ 를 사용해야 한다.

2.2.2 3차원 20절점요소에 의한 복합재 판의 굽힘현상

평판의 일반적인 변형은 순수굽힘 변형과 전단 변형으로 볼 수 있으며, 판의 두께에 따라 발생하는 전단잠김 현상이나 저차요소를 사용할 때 발생하는 강성의 과대화는 주로 굽힘변형에서 발생하고 있다. 적층평판의 원주형 굽힘변형은 일반적으로 굽힘이 동시에 3방향으로 일어나지 않고 2방향으로 일어나거나, 3방향으로 굽힘이 발생하더라도 평판의 구조상 한쪽 방향의 길이가 다른 두방향의 길이에 비해 상당히 적으므로 인해 변형량은 무시될 수 있다. 또한, 원주형굽힘이나 3차원 굽힘문제를 M. Levy 등이 2차원적으로 간주하여 해석한 바도 있다⁽²⁴⁾. 굽힘변형이 발생하는 면에 대해 생각하면 3차원 20절점요소의 경우 8개의 절점이 존재하고 있고 굽힘이 발생하는 면은 2차원 평면으로 구성되어 있으므로 2차원 8절점요소의 2차원적 굽힘문제로 볼 수 있다. 이는 요소의 중앙 단면에 존재하는 4개의 절점을 포함하여 요소 전체가 하나의 구성체로서 20절점요소가 거동하여 굽힘변형이 일어나고 2차원 8절점요소와 유사하게 거동하기 때문이다. 3차원 20절점요소의 중앙 단면에 존재하는 4개의 요소는 평면거동에서 실제적인 작용을 하지 못하며 이는 3차원 16절점요소에서 밝혀져 있다.

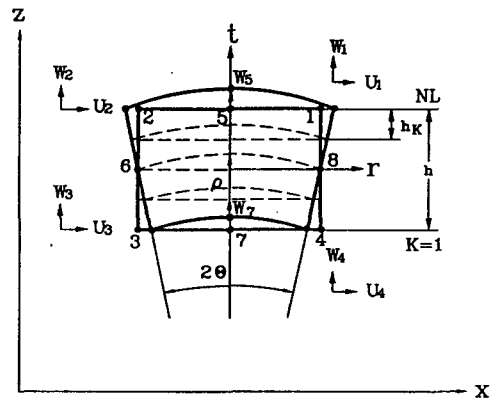


Fig. 1 8-node composite plane stress element under pure bending

본 연구에서 고려하는 복합재에서 임의의 k층의

재료구성 행렬은 대칭행렬이며 직교 이방성재 (orthotropic material)의 특성을 나타낸다. 복합재는 적층의 방향에 따라 기계적인 성질을 변화시킬 수 있으므로 재료 구성행렬은 방향 변환에 대한 고려가 포함되어야 한다. 따라서, 2차원적 순수굽힘에서 폭 방향이 평면응력 상태인 경우, 재료물성치 변환행렬로부터 굽힘이 일어나는 x-z면에 대한 구성물질의 특성 행렬을 식 (13)으로부터 선택하여 응력-변형률 관계식으로 나타내면 식 (25)가 된다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = [D]_{(k)} \{ \epsilon \} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{11} & \overline{D}_{12} & 0 \\ \overline{D}_{21} & \overline{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{D}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} DD &= D_{24}^2 - D_{22}D_{44} \\ \overline{D}_{11} &= D_{11} - (2D_{12}D_{14}D_{24} - D_{14}D_{14}D_{22} - D_{12}D_{12}D_{44})/DD \\ \overline{D}_{12} &= D_{13} - (D_{34}D_{12}D_{24} - D_{34}D_{14}D_{22} \\ &\quad + D_{23}D_{14}D_{24} - D_{23}D_{12}D_{44})/DD \\ \overline{D}_{21} &= \overline{D}_{12} \\ \overline{D}_{22} &= D_{33} - (2D_{23}D_{24}D_{34} - D_{34}D_{34}D_{22} - D_{23}D_{23}D_{44})/DD \\ \overline{D}_{33} &= D_{66} - D_{56}^2/D_{55} \end{aligned} \quad (26)$$

3차원 20절점요소에서 순수굽힘이 일어나는 면을 x-z면이라 한다면 이면에는 8개의 절점이 존재하고 있다. 이들 절점의 변위는 순수굽힘 변형이 일어나는 요소의 곡률 또는 회전각도에 의해 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \rho\theta &= 1 \\ U_1 &= \sin\theta \approx \theta, \quad W_1 = \cos\theta - 1 \approx -\theta^2/2 \\ U_2 &= -\sin\theta \approx -\theta, \quad W_2 = \cos\theta - 1 \approx -\theta^2/2 \quad (27) \\ U_3 &= \sin\theta \approx \theta, \quad W_3 = 1 - \cos\theta \approx \theta^2/2 \\ U_4 &= -\sin\theta \approx -\theta, \quad W_4 = 1 - \cos\theta \approx \theta^2/2 \\ U_5 &= 0, \quad W_5 = \rho(1 - \cos\theta) \approx \theta/2 \\ U_6 &= 0, \quad W_6 = 0 \\ U_7 &= 0, \quad W_7 = \rho(1 - \cos\theta) \approx \theta/2 \\ U_8 &= 0, \quad W_8 = 0 \end{aligned}$$

여기서 ρ 는 요소의 곡률이며, θ 는 요소 양면의 회전 각도이다. 위 관계를 벡터형으로 나타내면 식 (28)과 같이 표시할 수 있다.

$$\{U\}_{20} = \left(\theta \frac{-\theta^2}{2} \quad -\theta \frac{-\theta^2}{2} \quad \theta \frac{\theta^2}{2} \quad -\theta \frac{\theta^2}{2} \quad 0 \quad \frac{\theta}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\theta}{2} \quad 0 \quad 0 \right)^T \quad (28)$$

한편, 20절점요소의 변위-변형률 행렬을 $[B]_{20}$ 라 하고 θ 에 대한 고차항들을 무시하면 20절점요소의 변형률 $\{\epsilon\}_{20}$ 은 식 (29)와 같이 계산된다.

$$\{\epsilon\}_{20} = [B]_{20}\{U\}_{20} = [t \ \theta \ 0 \ 0]^T \quad (29)$$

20절점요소의 평면응력 $\{\sigma_{20}\} = [D]\{\epsilon\}_{20}$ 이므로 식 (30)과 같다. $[D]$ 는 구성물질의 특성행렬이다.

$$\{\sigma\}_{20} = [D][B]_{20}\{U\}_{20} = [t\theta\overline{D}_{11} \quad t\theta\overline{D}_{21} \quad 0]^T \quad (30)$$

2차원적 굽힘상태에 있는 x-z면의 20절점요소에 대한 등가절점력을 구하면 식 (31)과 같이 나타난다.

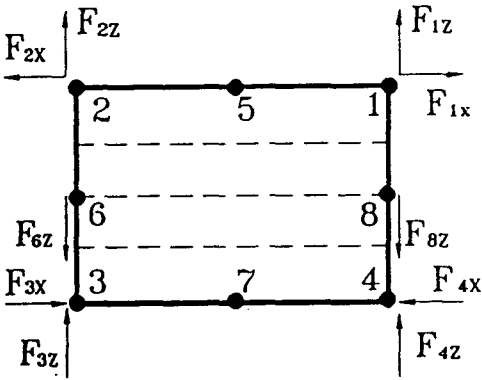
$$\begin{aligned} \{F\}_{20(x-z)} &= \int_{\sigma} [B]_{20}^T [S]_{20} d(\circ V) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N [B]_{20}^T [D] [B]_{20} [U]_{20} \\ &\quad \cdot J W_{ki} W_{kj} h_{(k)} b_{(k)} / h \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N t_{k20}^2 \frac{\theta}{4} \begin{bmatrix} 2\overline{D}_{11} \\ 4\overline{D}_{21} \\ -2\overline{D}_{11} \\ 4\overline{D}_{21} \\ 2\overline{D}_{11} \\ 4\overline{D}_{21} \\ -2\overline{D}_{11} \\ 4\overline{D}_{21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8\overline{D}_{21} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8\overline{D}_{21} \end{bmatrix} J W_{ki} h_{(k)} b_{(k)} / h \quad (31)$$

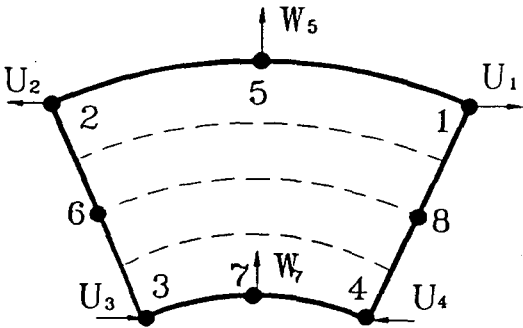
여기서, t_{k20} 는 k층의 두께 방향 적분점, NL은 적층수, N은 절점번호, W_{ki} , W_{kj} 는 가우스 적분점 가중치(weight functions), h 는 평판의 전체 두께, $h_{(k)}$ 는

k 번째 층의 두께, $b_{(k)}$ 는 k 번째 층의 폭을 나타낸다.

식 (31)에 나타난 힘의 각 성분을 보면 굽힘이 일어나는 평면상에 있는 절점중 변위를 구속한 절점 6, 8에 z 방향(t 방향)의 하중들이 존재하며, 이 하중에 의해 각 모서리 절점에 부적합한 z 방향의 하중들이 나타남을 알 수 있다. 이러한 힘과 변위의 관계를 Fig. 2에 나타내었다.



(a) Forces



(b) Displacements

Fig. 2 Forces and displacements of nodes

Fig. 2(a)는 각 절점의 등가절점력을, Fig. 2(b)는 그 때의 변위를 나타낸다. 따라서 적합한 등가절점력을 가지기 위해 절점 6, 8은 구속되지 않아야 한다. 부적합한 z 방향의 하중들을 제거하기 위해 구

속조건이 풀린 절점 6과 절점 8의 변위를 U_6, W_6, U_8, W_8 이라 한다면 변위벡터 $\{U\}'_{20}$ 는 식 (32)와 같이 나타나며, 그때의 변형률을 $\{\epsilon\}'_{20}$ 이라 두면 식 (33)과 같이 나타난다.

$$\{U\}'_{20} = \begin{pmatrix} \theta \frac{-\theta^2}{2} & -\theta \frac{-\theta^2}{2} & \theta \frac{\theta^2}{2} & -\theta \frac{\theta^2}{2} \\ 0 & \frac{\theta}{2} U_6 & W_6 & 0 \\ \frac{\theta}{2} U_8 & W_8 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (32)$$

$$\{\epsilon\}'_{20} = [B]_{20} \{U\}'_{20} = [t\theta \quad -2Wt \quad 0]^T \quad (33)$$

식 (33)의 계산에서 대칭적 위치에 있는 변위는 같으므로 $U_6 = U_8 = U$ 와 $W_6 = W_8 = W$ 로 두고 중립축 변위중 X축의 변위는 미소하므로 $U = 0$ 으로 가정하고 고차항은 무시하였다.

구속조건이 풀린 변위에 의한 20절점요소의 등가절점력 $\{F\}'_{20}$ 는 식 (34)와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \{F\}'_{20(x-z)} &= \int_0^V [B]_{20}^T [S]_{20} d(\circ V) \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N [B]_{20}^T [D] [B]_{20} [U]_{20} \\ &\quad \cdot JW_k W_{kj} h_{(k)} b_{(k)} / h \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{1}{4} t_{k20j}^2 \begin{pmatrix} \overline{\theta D_{11}} - 2\overline{W D_{12}} \\ \overline{\theta D_{21}} - 4\overline{W D_{22}} \\ -\overline{\theta D_{11}} + 2\overline{W D_{12}} \\ 2\overline{\theta D_{21}} - 4\overline{W D_{22}} \\ \overline{\theta D_{11}} - 2\overline{W D_{12}} \\ 2\overline{\theta D_{21}} - 4\overline{W D_{22}} \\ -\overline{\theta D_{11}} + 2\overline{W D_{12}} \\ 2\overline{\theta D_{21}} - 4\overline{W D_{22}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4\overline{\theta D_{21}} + 8\overline{W D_{22}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4\overline{\theta D_{21}} + 8\overline{W D_{22}} \end{pmatrix} JW_k h_{(k)} b_{(k)} / h \quad (34)$$

이러한 순수굽힘의 경우에 있어서 구속조건이 해제된 절점 6과 8의 z 방향의 힘이 0이 되어야 하므로 $t_{k20j}^2 (-4\overline{\theta D_{21}} + 8\overline{W D_{22}}) = 0$ 의 관계가 만족되어야 한다. 따라서 $W = \overline{\theta D_{21}} / (2\overline{D_{22}})$ 이 되어야 한

다. 구해진 W 값을 식 (34)에 대입하여 정리하면 식 (35)와 같이 나타난다.

$$(F)'_{20(x-z)} = \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{N_j} \frac{1}{2} t_{k20j}^2 \theta \begin{pmatrix} (\overline{D}_{11} - \frac{D_{12} D_{21}}{D_{22}}) \\ 0 \\ -(\overline{D}_{11} - \frac{D_{12} D_{21}}{D_{22}}) \\ (\overline{D}_{11} - \frac{D_{12} D_{21}}{D_{22}}) \\ 0 \\ -(\overline{D}_{11} - \frac{D_{12} D_{21}}{D_{22}}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} J W_{kj} h_{(k)} b_{(k)} / h \quad (35)$$

식 (35)의 등가절점력에 의한 요소의 변형 에너지는 식 (36)과 같다.

$$E_{20} = \frac{1}{2} (U)'_{20}{}^T (F)'_{20(x-z)} \\ = \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{j=1}^{N_j} \frac{1}{2} t_{k20j}^2 \theta^2 \begin{pmatrix} (\overline{D}_{11} - \frac{D_{12} D_{21}}{D_{22}}) \\ 0 \\ -(\overline{D}_{11} - \frac{D_{12} D_{21}}{D_{22}}) \\ (\overline{D}_{11} - \frac{D_{12} D_{21}}{D_{22}}) \\ 0 \\ -(\overline{D}_{11} - \frac{D_{12} D_{21}}{D_{22}}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} J W_{kj} h_{(k)} b_{(k)} / h \quad (36)$$

2.2.3 3차원 QM10요소에 의한 복합재 판의 굽힘현상

Fig. 3과 같이 순수굽힘 변형 중인 적층 복합재 판의 폭방향은 평면응력 상태로 볼 수 있다. QM10 요소는 3차원 8절점 고체요소에 2개의 비적합 변위모드가 추가된 요소이므로 굽힘이 일어나는 면을 x - z 면이라 하면 이면에는 4개의 절점이 존재한다. 따라서 굽힘이 일어나는 면에 대해 2차원적 4절점요소의 굽힘문제라 나타낼 수 있다.

Fig. 3에서의 좌표 x , z 의 각 절점의 변위를 U_i ,

W_i 라 하면 식 (37)과 같이 표시된다.

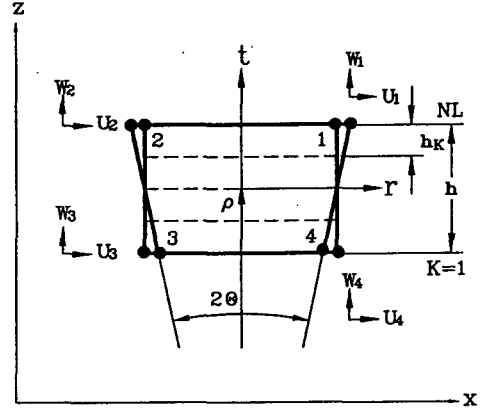


Fig. 3 4-node composite plane stress element under pure bending

$$\rho\theta = 1 \\ U_1 = \sin\theta \approx \theta, \quad W_1 = 0 \\ U_2 = -\sin\theta \approx -\theta, \quad W_2 = 0 \\ U_3 = \sin\theta \approx \theta, \quad W_3 = 0 \\ U_4 = -\sin\theta \approx -\theta, \quad W_4 = 0 \quad (37)$$

위 관계를 벡터형으로 나타내면 식 (38)과 같이 표시할 수 있다.

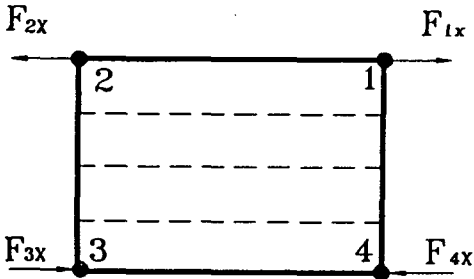
$$\{U\}_{10} = \{\theta \ 0 \ -\theta \ 0 \ \theta \ 0 \ -\theta \ 0\}^T \quad (38)$$

한편, QM10요소의 변위-변형률 행렬을 $[B]_{10}$ 라 하면 QM10요소의 변형률 $\{\epsilon\}_{10}$ 식 (39), 응력 $\{\sigma\}_{10}$ 은 고차항을 무시하면 식 (40)과 같이 계산된다.

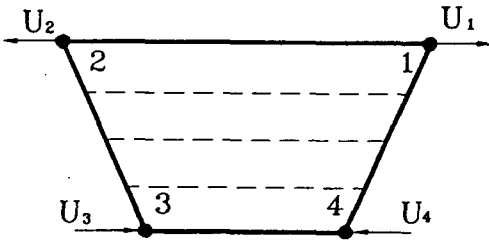
$$\{\epsilon\}_{10} = [B]_{10} \{U\}_{10} = [t\theta \ 0 \ 0]^T \quad (39)$$

$$\{\sigma\}_{10} = [D] \{\epsilon\}_{10} = [D][B]_{10} \{U\}_{10} \\ = \begin{bmatrix} \overline{D}_{11} & \overline{D}_{12} & 0 \\ \overline{D}_{21} & \overline{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{D}_{33} \end{bmatrix} \{t\theta \ 0 \ 0\}^T = [t\theta \overline{D}_{11} \ t\theta \overline{D}_{21} \ 0]^T \quad (40)$$

한편, QM10요소의 등가절점력 $\{F\}_{10}$ 를 구하면 식 (41)과 같다.



(a) Forces



(b) Displacements

Fig. 4 Forces and displacements of nodes

$$\begin{aligned} \{F\}_{10} &= \int_{\sigma} [B]_{10}^T [D] [B]_{10} \{U\}_{10} d(\sigma^V) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N [B_{L_{10}}]_{10}^T [D] [B_{L_{10}}]_{10} \{U\}_{10} J W_k W_j b_k \quad (41) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{4} t_{k10j}^2 \begin{bmatrix} \overline{D_{11}} \\ 0 \\ -\overline{D_{11}} \\ 0 \\ \overline{D_{11}} \\ 0 \\ -\overline{D_{11}} \\ 0 \end{bmatrix} J \theta W_k b_k (h_k/h) \end{aligned}$$

여기서, t_{k10j} 은 절점수를 줄인 QM10요소의 임의의 k층에서 두께 방향의 가우스 적분점 위치를 나타낸다.

식 (41)의 등가절점력에 의한 요소의 변형 에너지는 식 (42)와 같다.

$$\begin{aligned} E_{10} &= \frac{1}{2} \{U\}_{10}^T \{F\}_{10} \quad (42) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} t_{k10j}^2 \theta^2 \begin{bmatrix} \overline{D_{11}} \\ 0 \\ -\overline{D_{11}} \\ 0 \\ \overline{D_{11}} \\ 0 \\ -\overline{D_{11}} \\ 0 \end{bmatrix} J W_k b_k (h_k/h) \end{aligned}$$

2.2.4 복합재 판용 QM10요소의 가우스 적분점 수정식

동일한 하중과 조건에서 20절점요소와 제안된 MQM10요소가 동일한 변형을 하자면 변형에 대한 강성이 같아야 하므로 변형에 소요되는 에너지가 같아야 한다. 따라서, 변형량이 같게 되자면 굽힘변형이 일어나는 x-z 평면에서 20절점요소의 굽힘변형과 MQM10요소의 굽힘변형에 소요된 변형에너지가 같아야 하므로 식 (36)과 식 (42)는 같아야 한다.

$$E_{20} = E_{10} \quad (43)$$

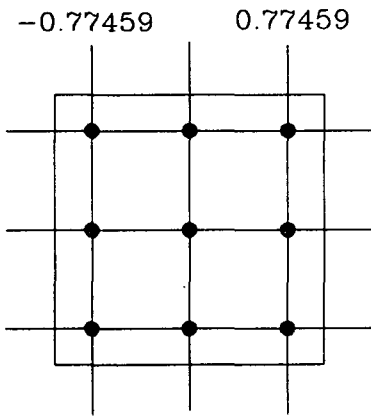
식 (43)의 변형 에너지 등가 관계로부터 식 (44)와 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$(\overline{D_{11}} - \overline{D_{12}} \overline{D_{21}} / \overline{D_{22}}) t_{k20j}^2 = t_{k10j}^2 \overline{D_{11}} \quad (44)$$

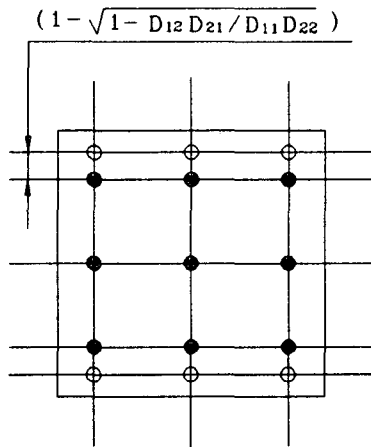
식 (44)의 관계로부터, 절점수를 줄인 QM10요소의 임의의 k층에서 두께 방향의 가우스 적분점 위치 t_{k10j} 와 20절점 요소의 k층에서 가우스 적분점 위치 t_{k20j} 의 관계는 식 (45)와 같은 가우스 적분점 수정식을 구해진다.

$$t_{k10j} = t_{k20j} \sqrt{1 - \overline{D_{12}} \overline{D_{21}} / (\overline{D_{11}} \overline{D_{22}})} \quad (45)$$

한편, 식 (45)의 의미는 제안된 MQM10요소의 적분점 위치는 3차원 완전요소인 20절점요소의 적분점 위치에서 임의의 k층에 대해 재료의 특성행렬에 관계되는 식 (45)와 같은 양만큼 적분점 위치가 수정되어야 함을 나타낸다. 다시 말하면 원래의 위치에서 Fig. 5와 같이 $(1 - \sqrt{1 - \overline{D_{12}} \overline{D_{21}} / (\overline{D_{11}} \overline{D_{22}})})$ 의 위치로 수정됨을 의미한다.



(a) 20-node element



(b) MQM10 element

Fig. 5 Gauss sampling points of used elements

식 (45)로 부터 적층의 각도가 0° 인 경우 식 (46), 90° 인 경우 가우스 적분점 수정식은 식 (47)과 같이 단순화 된다.

$$t_{k10j} = t_{k20j} \sqrt{1 - \nu_{13} \nu_{31}} \quad (46)$$

$$t_{k10j} = t_{k20j} \sqrt{1 - \nu_{23} \nu_{32}} \quad (47)$$

이 수정식들을 복합재 판의 해석문제에 적용한 결과 가우스 적분점 수정이 굽힘 강성에 대해 바람직한 영향을 주게 된다. 한편 새로이 평가된 변위에 의해 응력을 계산하기 위해서는 그만큼 강성을 수정하여 평가해야 된다. 따라서 응력의 계산에는

식 (48)과 같이 수정함으로써 원래의 응력을 회복하도록 하였다.

$$t_{k10j} = t_{k20j} (1 - \overline{D_{12} D_{21}} / (\overline{D_{11} D_{22}})) \quad (48)$$

한편, 이 수정식들을 복합재 판의 고유진동수 해석문제에 적용한 결과 굽힘모드에서는 20절점요소와 MQM10요소의 결과가 잘 일치하지만 비틀림모드에서는 MQM10요소의 결과가 QM10요소의 결과보다 오차가 크게 나타났다. 이는 가우스 적분점 수정이 굽힘강성에 대해 바람직한 영향을 주게 될 때 동시에 비틀림강성을 과소하게 평가하게 됨을 알 수 있다. 따라서, 자유진동 해석때는 식 (45)에 추가하여 식 (49)와 같이 재료상수를 수정하여 원래의 비틀림 강성을 회복하도록 하였다.

$$G_{k(10)12j} = G_{k(20)12j} / (1 - \overline{D_{12} D_{21}} / (\overline{D_{11} D_{22}})) \quad (49)$$

여기서, $G_{k(10)12j}$ 는 MQM10요소에서의 k번째 층의 1-2평면상의 전단탄성 계수, $G_{k(20)12j}$ 는 20절점요소에서의 k번째 층의 1-2평면상의 전단탄성 계수이다. 이는 식 (45)가 포함된 변형률- 변위 관계 행렬 요소의 제곱과 곱해져서 원래의 값을 갖게 된다.

3. 수치해석 및 고찰

구조요소(판요소)에 의해 적층 복합재 판의 해석시 발생하는 전단잠김(shear locking) 현상을 해결하기 위해, 감차적분법(reduced integration method)⁽¹⁴⁾, 혼합 유한요소법(mixed finite element method)⁽²⁶⁾, 혼합 유한요소법과 선택적 감차 적분법⁽²⁷⁾ 등을 이용하여 해석이 수행되었다. 본 연구에서는 고체 요소를 사용하므로 이러한 강성과잉은 없으나⁽²⁰⁾ 자유도가 줄어들어 기인한 상대적 강성과잉 현상을 제거하기 위해 식 (45)에서 구한 직교 이방성 복합재에 대한 MQM10요소의 가우스 적분점 수정식을 이용하여 상대적 강성과잉 현상을 제거한다. 본 장에서는 이 식의 타당성을 검토하고, MQM10요소를 이용한 해석시 요소의 분할이 비사각 분할로 될 경우에 비사각 분할의 정도에 따른 변위와 응력의 변화를 검토하였다. 자유진동 해석에서 20절점요소의 해석결과를 실험결과, 참고문헌

등과 비교하여 수치해석의 타당성을 확인한 후 MQM10요소의 결과를 20절점요소의 결과와 비교하여 제안된 요소의 타당성을 확인하였다.

3.1 2차원 요소와 3차원 요소의 검증

굽힘변형에 대한 2차원 요소와 3차원 요소들의 변형에 대한 거동의 신뢰성을 검증하기 위해 길이 180mm, 폭 14.815mm, 두께 5.055mm의 일단 고정 판을 10개의 요소로 분할하여 정적선형해석과 비선형해석을 수행하여 그 결과를 Table 1에 비교하였다. 하중은 끝단에 600N의 집중하중이 작용하였다.

Table 1 Displacement comparison of 2-dimension al and 3-dimensional elements

Element Analysis	2-dimension				3-dimension	
	MQM5	QM6	8-node	9-node	20-node	MQM10
Linear	34.8349	34.7867	34.8239	34.8240	34.5264	34.6964
Non-linear	33.6803	33.5935	33.6610	33.6611	32.9910	33.0672

위의 표에서 보는바와 같이 2차원 요소와 3차원 요소의 해석 결과는 선형해석에서 변위/길이 ≃ 0.2, 변위/두께 ≃ 6.7, 비선형해석에서 변위/길이 ≃ 0.2, 변위/두께 ≃ 6.5에 해당하는 대변형에서도 거의 오차가 없이 일치하고 있음을 알 수 있다. 위의 결과를 통해 본 논문에서 고려한 3차원 20절점 요소의 굽힘변형을 굽힘면에 존재하는 8개 절점의 변형으로 고려한 것에 대응하는 2차원 8절점요소의 결과나, 제안된 3차원 MQM10요소에 대응하는 2차원 MQM5요소나 QM6요소의 결과는 별다른 오차가 없이 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

3.2 재료상수에 따른 복합재 판의 수정량 계산

식 (45)에서 구한 복합재 판용 MQM10요소의 가우스 적분점 수정식을 이용하여 3차원 복합재의 구성판이 일방향성 적층(unidirectional laminae), 직물로 적층(woven laminae), 망상으로 적층(braided lamina)된 경우들에 대한 가우스 적분점 수정량은 적층의 각도에 따라서 계산되어야 한다. 수정량 계산에 사용된 재료의 물성치는 Table 2의 A, B, C에 나타내었다.

Table 2 Material properties of composite laminae

Type	E ₁ (Gpa)	E ₂ (Gpa)	E ₃ (Gpa)	G ₁₂ (Gpa)	G ₁₃ (Gpa)	ν ₁₂	ν ₁₃	ν ₂₃	ρ (kg/m ³)
A Unidirect. lamina	132.4	10.80	10.80	5.70	5.70	.24	.2	.4	253.8
B Woven lamina	132.4	132.4	10.80	55.2	5.70	.20	.2	.2	253.8
C Braided lamina	120.0	120.0	120.0	48.0	48.0	.25	.2	.2	253.8

순수굽힘 상태에 있는 3차원 복합재 판의 적층 판의 한 판이 x-z면에서 2차원적 굽힘이 일어날때 굽힘의 방향과 판의 재료의 주방향이 이루는 각도를 고려하여, 이들 두 방향 사이의 각도가 0°에서 수직이 되는 90°까지의 각도와 재료상수에 따른 수정량(1-√(1-D₁₂D₂₁/(D₁₁D₂₂)))을 구하면 Fig. 6과 같다.

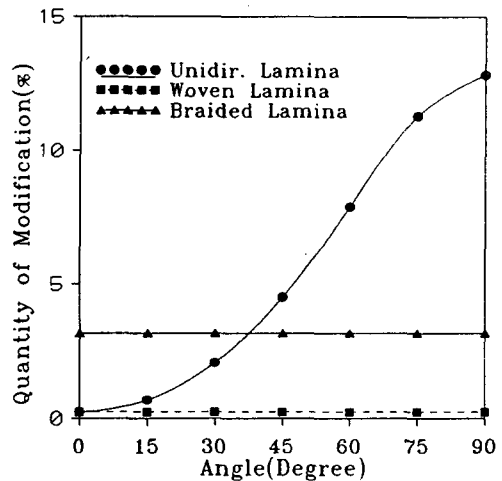


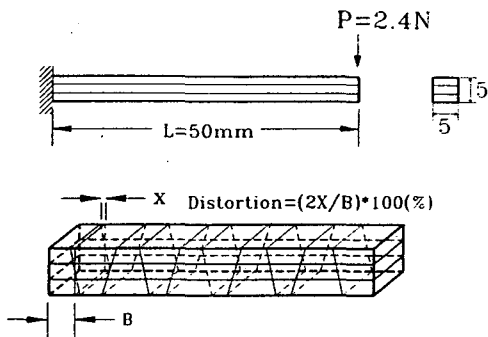
Fig. 6 Modification quantities of Gauss integral point of laminae

Fig. 6에서 보는 바와 같이 일방향으로 적층된 판에서는 적층의 각도가 90°에 가까울수록 수정량이 커지는 것은 굽힘이 포아송비(ν₂₃, ν₃₂)가 큰 y-z면으로 일어나기 때문이다. 직물로 적층된 복합재와 망상으로 적층된 복합재의 경우는 수정량이 방향에 따라 거의 일정하게 나타나는데, 이는 직물로 적층된 경우 서로 수직인 강화섬유(fiber)에 의해 준등방성이 나타나고, 망상으로 적층된 경우는

재료상수가 입방체(cubic)에 대한 것으로 등방성재에 유사한 성질을 나타내고 있기 때문이다. 그리고 직물로 적층된 복합재의 경우 $\nu_{31} = \nu_{32} \approx 0$ 이므로 수정량이 0에 가깝게 된다.

3.3 요소 변형의 영향 평가

복합재 판의 굽힘변형에 대한 MQM10요소의 적용시 해의 정확성을 검증하기 위해 Fig. 7과 같은 일단이 고정되고 끝단에 집중하중이 작용하는 $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$, $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ 으로 적층된 외팔보를 해석하였다. 모델의 제원은 길이×폭×두께 = $50 \times 5 \times 5$ mm로 크기가 같은 10개의 요소로 분할하였다. 재료상수는 Table 2의 C와 같고, 하중의 크기는 끝단에 24N의 집중하중을 가하였다. 본 모델을 요소의 경계에 위치한 상하 절점을 좌우 반대 방향으로 일정량씩 이동시키면서 유한요소 해석을 수행하였다.



(a) Geometry and mesh of model

(b) 20-node (c) MQM10

Fig. 7 Trapezoidal mesh of 3-layer laminae

요소분할의 변형정도를 변화시켜 가면서 끝단의 변위를 비교한 $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ 의 변위 결과를 Table 3에, 응력의 결과를 Table 4에 나타내었다. Table 5는 $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ 의 변위 결과를, Table 6은 응력의 결과를 나타내었다. 변위의 결과를 비교하면

$(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ 의 경우 요소의 경계면에 위치한 상하 절점의 변형량이 좌우로 10%까지도 사각으로 분할된 20절점요소의 결과에 대해 MQM10요소, QM10요소 모두 별다른 오차(.44%, 1.1%)가 발생치 않으나, $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ 의 경우 MQM10요소는 요소의 변형도가 10%때 0.57%의 오차가 발생되나 QM10요소의 경우 21%의 오차가 발생되어 적분점 수정이 불가피함을 알 수 있다. 응력의 결과에서도 $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ 의 경우는 오차가 크지 않아 적분점을 수정하지 않아도 무방하나, $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ 의 경우에는 MQM10요소의 1.2% 오차에 대해, 적분점을 수정하고 응력을 수정하지 않은 MQM10요소는 32%의 오차가 발생되어 적분점을 수정할 경우에는 응력의 수정이 불가피함을 알 수 있다.

이 모델의 20절점요소의 총방정식수와 소요기억 용량은 370과 14851이며, MQM10요소는 124와 2134로 각각 66%와 86%가 줄어듦을 알 수 있다.

Fig. 8에 $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ 의 경우에 대해 MQM10요소와 20절점요소의 비사각 분할에 따른 변위의 오차를 비교하였으며, Fig. 9는 그때의 응력 오차를 나타내었다. 양쪽 모두 오차는 적으나 MQM10요소가 20절점요소와 보다 더 유사하게 거동함을 알 수 있다.

Fig. 10은 $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ 의 경우에 대해 MQM10요소와 20절점요소의 비사각 분할에 따른 변위의 오차를 비교하였으며, Fig. 11은 그때의 응력 오차를 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 변위의 경우에는 적분점을 수정하지 않으면 오차가 상당히 크므로 적분점 수정이 불가피하다. 응력의 경우에는 적분점을 수정한 만큼 불필요한 수정을 함으로 인해 MQM10요소의 결과가 오차가 크게되나 원래의 강성을 회복하게 하는 응력수정식을 적용한 결과 오차가 아주 작아짐을 알 수 있다.

Table 3 Displacement(mm) error of $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ composite plate

Distortion Element	0.0%	2.0%	4.0%	6.0%	8.0%	10.0%
20-node	.392628 (---)	.392626 (.0005)	.392622 (.0015)	.392617 (.0028)	.392611 (.0043)	.392603 (.0064)
QM10	.388578 (1.0)	.388575 (1.0)	.388535 (1.0)	.388459 (1.1)	.388347 (1.1)	.388198 (1.1)
MQM10	.391286 (.34)	.391282 (.34)	.391242 (.35)	.391165 (.37)	.391050 (.40)	.390899 (.44)

Table 4 Stress(MPa) error of (0°/90°/0°) composite plate

Distortion Element	0.0%	2.0%	4.0%	6.0%	8.0%	10.0%
20-node	56.53 (---)	56.42 (.20)	56.32 (.37)	56.21 (.57)	56.10 (.76)	56.00 (.94)
QM10	56.47 (.11)	56.47 (.11)	56.46 (.12)	56.46 (.12)	56.45 (.14)	56.44 (.16)
MQM10 ⁽¹⁾	56.85 (.57)	56.85 (.57)	56.85 (.57)	56.84 (.55)	56.84 (.55)	56.83 (.53)
MQM10 ⁽²⁾	56.56 (.053)	56.56 (.053)	56.56 (.053)	56.55 (.035)	56.55 (.035)	56.54 (.018)

- (1) : modified Gauss sampling points for stiffness
- (2) : modified Gauss sampling points for stiffness and stress

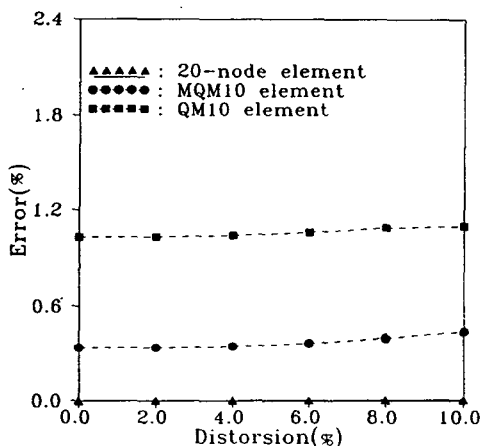


Fig. 8 Displacement error of 20-node and MQM10 element of (0°/90°/0°) laminae

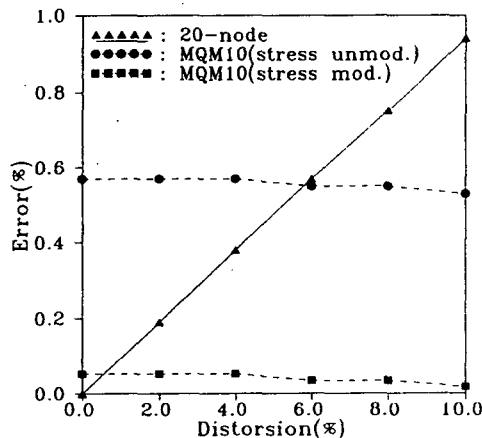


Fig. 9 Stress error of 20-node and MQM10 element of (0°/90°/0°) laminae

Table 5 Displacement(mm) error of (90°/0°/90°) composite plate

Distortion Element	0.0%	2.0%	4.0%	6.0%	8.0%	10.0%
20-node	2.11092 (---)	2.11091 (.00047)	2.11088 (.0019)	2.11083 (.0043)	2.11076 (.0076)	2.11067 (.012)
QM10	1.67654 (21)	1.67627 (21)	1.67530 (21)	1.67364 (21)	1.67130 (21)	1.66829 (21)
MQM10	2.11190 (.064)	2.11143 (.024)	2.10988 (.049)	2.10725 (.17)	2.10355 (.35)	2.09880 (.57)

Table 6 Stress(MPa) error of (90°/0°/90°) composite plate

Distortion Element	0.0%	2.0%	4.0%	6.0%	8.0%	10.0%
20-node	44.84 (---)	44.74 (.22)	44.64 (.45)	44.54 (.67)	44.43 (.91)	44.33 (1.1)
QM10	46.91 (4.6)	46.91 (4.6)	46.90 (4.6)	46.88 (4.6)	46.86 (4.5)	46.83 (4.4)
MQM10 ⁽¹⁾	59.24 (32.)	59.23 (32.)	59.22 (32.)	59.19 (32.)	59.16 (32.)	59.11 (32.)
MQM10 ⁽²⁾	44.40 (.98)	44.39 (1.0)	44.38 (1.0)	44.36 (1.1)	44.34 (1.1)	44.30 (1.2)

- (1) : modified Gauss sampling points for stiffness
- (2) : modified Gauss sampling points for stiffness and stress

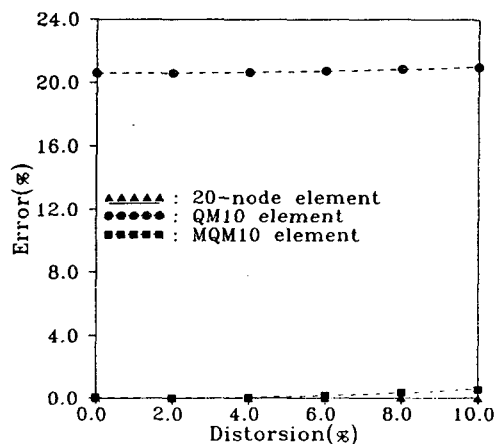


Fig. 10 Displacement error of 20-node and MQM10 element of (90°/0°/90°) laminae

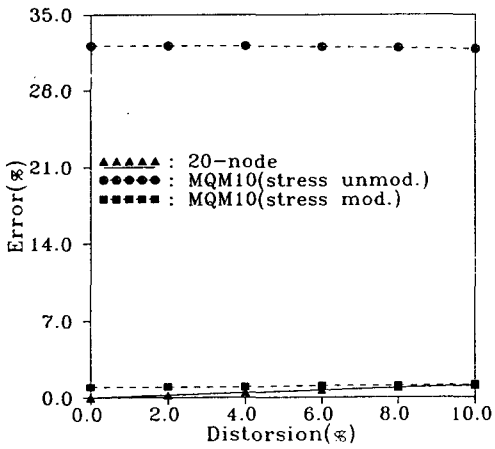


Fig. 11 Stress error of 20-node and MQM10 element of $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ laminae

3.4 길이/두께 비에 따른 결과비교

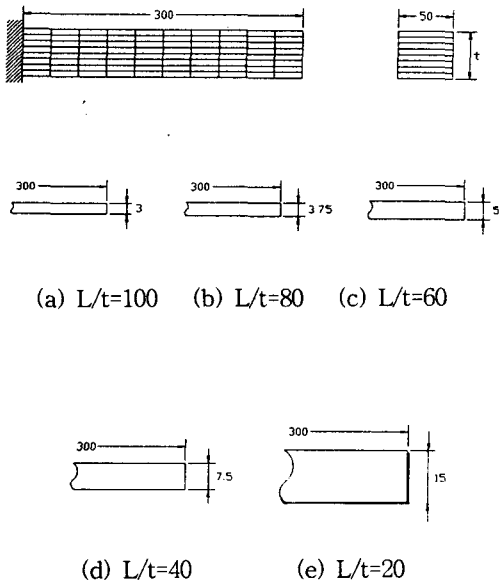


Fig. 12 Geometry and finite element of $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ s Composite plate

평판 구조물에서 길이/두께의 비에 따른 해석의 정확성을 검증하기 위해 Fig. 12와 같이 길이/두께 비가 20, 40, 60, 80, 100인 경우까지 해석한 결과를 Table 7에 나타내었다. 모델의 제원은 길이 300mm, 폭 50mm이고 두께를 변화시키면서 해석하였다. 적층수는 8층으로 $(90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ 로 적층되었다. 재료상수는 Table 9의 A와 같고, 하중은 끝단에 2.4N을 가하였다. 요소의 분할은 20절점요소와 MQM10요소 각각 10개의 요소로 분할하였다.

Table 7 Displacement error of variable L/t ratio

Element \ L/t	20	40	60	80	100
20-node	.0761175	.606142	2.04309	4.83946	9.44773
QM10	.0699278 (8.1)	.556707 (8.2)	1.87709 (8.1)	4.44764 (8.1)	8.68467 (8.1)
MQM10	.0760915 (.034)	.605982 (.026)	2.04344 (.017)	4.84183 (.049)	9.45433 (.070)

Table 7에서 보는 바와 같이 제안된 MQM10 요소는 길이/두께 비의 변화에 대해서도 3차원 20절점요소의 해석결과와 별다른 오차가 없이 잘 일치함을 알 수 있다.

3.5 MQM10요소에 의한 다층 복합재 판의 해석

적층 복합재판의 해석에 제안된 MQM10요소를 적용하여 해석의 타당성을 검토하기 위해 Fig. 13과 같이 4층으로 적층된 여러 형태의 복합재판을 해석하였다. 일방향성 적층판, 직물적층, 망상 적층판의 재료상수는 Table 2의 A, B, C에 나타내었다.

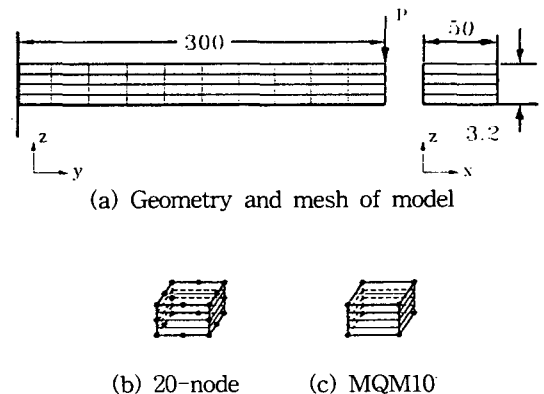


Fig. 13 Geometry and finite element of 4-layer composite plate

일방향성으로 적층된 경우는 적층의 각도가 $(0^\circ/90^\circ)_s$, $(90^\circ/90^\circ)_s$, $(90^\circ/0^\circ)_s$ 이고, 직물로 적층된 경우는 적층의 각도가 $(0^\circ/90^\circ)_s$, $(0^\circ/0^\circ)_s$ 이며, 망상으로 적층된 경우의 재료축의 각도는 0° 인 경우로써 판의 크기는 길이×폭×두께가 $300 \times 50 \times 3.2\text{mm}$ 이다. 판의 형상은 외팔판으로 크기가 같은 10개의 요소로 분할하여 MQM10요소와 QM10요소에 의한 해석 결과를 20절점요소의 해석 결과와 비교한 것을 Table 8에 나타내었다.

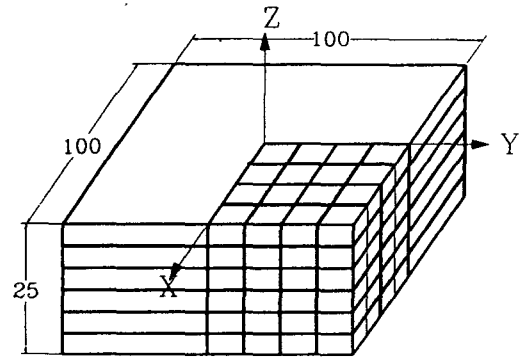
Table 8 Comparison of the deflections of MQM10 and QM10 model with the results of 20-node model

Type of Layer	Angle of Layer	Displacement [mm]		
		20-node element	QM10 element (% error)	MQM10 element (% error)
Unidirection Lamina	$(0^\circ/90^\circ)_s$	0.48956	0.483253 (1.3)	0.487555 (.41)
	$(90^\circ/0^\circ)_s$	2.20144	1.96416 (11.)	2.19397 (.34)
	$(90^\circ/90^\circ)_s$	5.31159	4.03972 (24.)	5.31383 (.042)
Woven Lamina	$(0^\circ/0^\circ)_s$	0.431776	0.431813 (0.0086)	0.433848 (0.48)
	$(0^\circ/90^\circ)_s$	0.431776	0.431813 (0.0086)	0.433848 (0.48)
Braided Lamina	$(0^\circ/0^\circ)_s$	0.469443	0.443379 (5.6)	0.472730 (.70)

Table 8에서 보는 바와 같이 MQM10요소의 해석 결과가 QM10요소의 경우보다 20절점요소의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 일방향성으로 적층된 경우 적층의 각도에 따라 차이는 있으나 MQM10요소의 경우가 QM10요소의 경우보다 20절점요소의 결과와 잘 일치한다. 적층의 각도가 $(90^\circ/90^\circ)_s$ 와 $(90^\circ/0^\circ)_s$ 인 QM10요소는 오차가 각각 24%, 11%로 적분점 수정이 불가피하며, $(0^\circ/90^\circ)_s$ 인 QM10요소의 경우는 수정을 거의 필요로 하지 않는다. 직물로 적층된 경우에는 MQM10요소와 QM10요소의 오차가 모두 작고, 적분점 수정량도 작으므로 적분점 위치를 수정하지 않아도 된다. 망상으로 적층된 경우는 등방성에 유사한 성질을 나타내므로 적분점 위치를 수정하지 않은 경우 큰 오차(5.6%)가 발생하므로 수정이 불가피하다.

3.6 적층판의 층간 응력해석

제안된 요소를 이용하여 Pagano 등⁽²⁸⁾에 의해 해석이 수행된 복합재 판의 응력을 해석하였다. 모델은 길이/두께 = 4이고 적층의 각도는 $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ 로써 3층으로 적층되었으며 모델의 형상과 재료상수를 Fig. 14에 나타내었다. 하중은 사인(sine)함수로 분포된 횡하중이 작용되었다. 요소의 분할은 두께 방향으로 6개, 가로와 세로로 각각 4개씩 총 96개의 등요소로 분할되었다. 수치적분 차수는 $2 \times 2 \times 2$ 차의 수치적분을 이용하였다.



$$\begin{aligned}
 E_1 / E_2 &= 2.5 & G_{12} / G_{23} &= 2.5 \\
 E_3 &= E_2 & G_{13} &= G_{12} \\
 \nu_{12} = \nu_{23} = \nu &= 0.25
 \end{aligned}$$

Fig. 14 Geometry and material properties of finite element

해석의 결과는 3차원 탄성해(3-D elasticity)⁽²⁸⁾, 고전적 적층판 이론(CLPT)과 1차 전단변형이론(FSDT)의 결과⁽²⁹⁾, layerwise 유한요소 해석(LWLT, $2 \times 2 \times 2$ -D mesh and 3 quadratic line elements through the thickness)의 결과⁽²⁵⁾와 비교하였으며, 그 결과를 Fig. 15에 나타내었다.

Fig. 15에서 보는 바와 같이 무차원된 α_x 는 3차원 탄성해 및 layerwise 유한요소 해석의 결과와 별 오차가 없이 잘 일치하였다. 따라서 제안된 MQM10요소는 3차원 층간응력 문제의 변위 및 응력해석에서 효과적임을 알 수 있다.

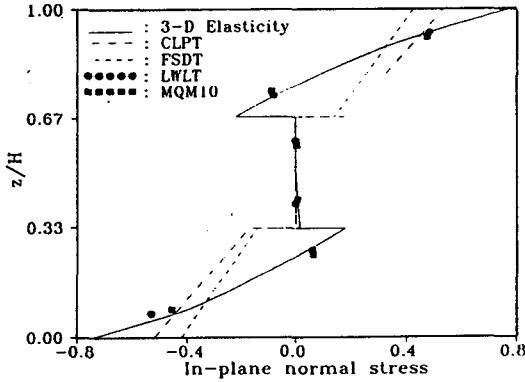


Fig. 15 Distribution of inplane normal stress through the thickness of a simply-supported, square (0°/90°/0°) laminate under sinusoidal transverse load(L/H=4)

3.7 자유진동의 해석

제안된 MQM10요소를 복합재 판의 자유진동 해석에 적용할때 그 타당성을 검증하기 위하여 여러 가지 적층형태의 3차원 복합재 판을 해석하였다.

수치해석은 20절점요소로 진동해석을 수행하고 이를 실험결과와 비교하여 수치 해석의 타당성을 확인하였다. 일방향성 적층판, 직물적층판, 망상적층판에 대해 MQM10요소 및 QM10요소의 결과를 20절점요소의 결과와 비교하였다. 자유진동 해석시 비틀림 모드에서 비틀림 강성의 과소 평가 현상의 예를 들고 비틀림 전단 탄성 계수 수정식의 필요성을 확인하였다.

3.7.1 실험결과[30]와의 비교에 의한 수치해석 과정의 검증

계산에 사용한 유한요소 해석의 수치해석 과정의 타당성을 검토하기 위해 재료상수가 Table 9의 A와 같고, 모델의 제원이 Table 10에 주어진 것과 같은 시편을 제작하고, 크기가 같은 10개의 20절점 요소로 분할한 후 모드해석 및 실험을 실시하였다.

수치해석시 강성행렬의 계산에는 3×3×3차의 가우스 르장드르 적분을 수행하였다. 실험을 위해 시편의 적정 위치에 가속도계를 부착한 후 시편의 경계조건이 완전히 자유로운 상태를 유지하기 위해 탄성이 적절한 세션 고무줄로 사각의 링을 만든

후 시편의 양끝단이 약 30mm 정도 걸치도록 얹어 놓았다. 실험은 충격함마(impact hammer)로 시편에 충격을 준 후, 이때 발생한 미소전압 변화를 주파수 분석기(FFT)를 통해 고유 진동수를 구하였다. 실험의 결과와 3차원 20절점요소의 해석 결과를 Table 10에 나타내었으며, 이 둘의 결과는 최대 오차가 세번째 모드에서 2.4% 정도로 큰 오차가 없이 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 9 Material properties of unidirectional laminae

Type	E ₁ (Gpa)	E ₂ (Gpa)	E ₃ (Gpa)	G ₁₂ (Gpa)	G ₁₃ (Gpa)	ν ₁₂	ν ₁₃	ν ₂₃	ρ (kg/m ³)
A	47.96	7.450	7.450	3.25	3.25	.19	.19	.50	1943.
B	46.63	7.770	7.770	3.25	3.25	.19	.19	.50	1943.
C	172.7	7.2	7.2	3.76	3.76	.3	.3	.50	1551

Table 10 Comparison of the frequency of 20-node model with the experimental results

Size (mm)	Angle of Layer	Method	1st Mode (Hz) (error %)	2nd Mode (Hz) (error %)	3rd Mode (Hz) (error %)
300×50×3.25	Isotropic Material (0°/0°/0°/0°) _s	Exp.	192.5	532.5	705.0
		F20	190.1 (.73)	533.8 (.24)	699.3 (.81)
300×50×3.2	Orthotropic Composite (90°/0°/90°/0°) _s	Exp.	117.5	325.0	635.0
		F20	117.4 (.085)	326.7 (.52)	650.3 (2.4)

3.7.2 선행연구[30]에 의한 수치해석 과정의 검증 한편 계산에 사용한 수치해석 과정의 타당성을 검토하기 위해 선행 연구자들의 결과와도 비교하였다. Table 11에 나타난 참고문헌[31]과 동일한 모델을 크기가 같은 10개의 20절점요소로 분할한 후 수치해석한 결과를 Table 11에 나타내었다. 재료상수는 Table 9의 B에 나타내었으며, 강성행렬의 계산에는 3×3×3차의 가우스 르장드르 적분을 수행하였다.

Table 11 Comparison of the results of 20-node model with the results of Ref. [28]

Size (mm)	Layer and Angle	Method		1st Mode (Hz)	2nd Mode (Hz)	3rd Mode (Hz)
		Ref. [31]	Comp. / Exp.	82.8	392.1	526.3
120×19.6×0.88	8-Layer (0°/0°/0°/90°)s	Ref. [31]	Comp.	82.8	392.1	526.3
			Exp.	83.0	379.5	515.7
		Present Study	83.0 (24)	393.5 (36)	523.1 (61)	
120×19.3×0.98	8-Layer (0°/45°/-45°/90°)s	Ref. [31]	Comp.	75.6	480.1	661.7
			Exp.	77.4	485.1	669.5
		Present Study	76.5 (1.2)	480.8 (15)	669.4 (1.2)	

Table 11에서 보는 바와 같이 본 계산에 사용한 20절점요소의 모드 해석 결과는 참고문헌[31]과도 최대오차 1.2%이내로 잘 일치함을 알 수 있다.

3.7.3 전단탄성 계수 수정의 타당성 검토

복합재 판의 경우에 있어서 가우스 적분점 및 재료상수 수정의 효율성을 검증하기 위해 20절점요소와 MQM10를 사용하여 경계조건이 완전히 자유상태이고, 재료상수들이 Table 9의 C와 같은 길이×폭×높이가 300.0×50.0×3.2(mm)인 판(plate)을 크기가 같은 10개의 3차원 20절점요소로 분할하여 모드 해석을 수행하여 보았다. 이때 제안된 MQM10요소는 20절점요소의 길이 방향에 위치한 절점들에 제안된 요소의 절점들이 존재하도록 20개의 요소로 분할하였다. 적층수는 3층이며, 적층의 각도는 (90°/0°/90°)로 적층되었다. 수치해석은 20절점요소와 MQM10요소 모두 3×3×3차의 가우스-르장드르 적분을 수행하였다.

MQM10요소의 결과를 20절점요소의 결과와 비교한 것을 Table 12에 나타내었다. Table 12에서 보는 바와 같이 복합재 판에서 MQM10요소를 사용할 때, 가우스 적분점만을 수정한 경우 즉 식(45)만을 적용한 경우는 굽힘모드의 고유진동수는 잘 일치하나 비틀림 모드의 고유진동수는 오차가 크게 나타났다. 이때 가우스 적분점 수정에 기인한 비틀림강성의 저 평가를 보정하는 식(49)를 식(45)

와 동시에 적용하면 굽힘모드와 비틀림모드를 동시에 만족함을 알 수 있다.

Table 12 Comparison of the results of MQM10 element with the results of 20-node element of composite plate

Classification	1st (Hz)	2nd (Hz)	3rd (Hz)	4th (Hz)	5th (Hz)	
20-Node Element	16.9 (---)	106.8 (---)	174.6 (---)	303.9 (---)	521.4 (---)	
QM10 Element	Unmod.	16.9 (0.0)	108.4 (1.5)	209.6 (20.)	317.6 (4.5)	529.4 (1.5)
	Mod. ⁽¹⁾	16.9 (0.0)	106.4 (0.37)	157.0 (10.1)	301.0 (0.95)	493.7 (5.3)
	Mod. ⁽²⁾	16.9 (0.0)	106.4 (0.37)	177.9 (1.9)	301.0 (0.95)	528.0 (1.3)

Mod.⁽¹⁾ : The results by using eq.(45)

Mod.⁽²⁾ : The results by using eq.(45) and eq.(49)

3.7.4 MQM10요소에 의한 수치계산

가우스 적분점 수정식 및 재료상수 수정식을 4층으로 구성된 복합재 판의 자유진동 해석에 적용하였다. 시편은 경계조건이 완전히 자유상태인 판으로써 크기는 길이×폭×두께가 300×50×3.2(mm)인 모델을 20절점요소는 크기가 같은 10개의 요소로 분할하였으며 MQM10요소는 40개의 요소로 분할하였다. 여러가지 적층각도와 적층형태에 대해 MQM10요소와 QM10요소의 고유진동수 해석 결과를 Table 13, 14에 20절점요소의 해석 결과와 비교하였다. 본 모델의 재료 물성치는 Table 2의 A, B, C에 나타내었다.

Table 13에서 보는 바와 같이 일방향성 적층판에서 적층의 각도가 (0°/90°/90°/0°)이면 수정을 하지 않아도 되나, (90°/90°/90°/90°)의 경우 수정을 하지 않으면 큰 오차(15%)가 발생하므로 수정이 불가피하다. Table 14에서 보는 바와 같이 직물적층판의 경우는 수정을 하지 않아도 오차가 크지 않으나 망상적층판의 경우는 수정이 불가피하다. 일방향성 적층판 또는 직물적층판에서 준등방성 배치를 한 경우에는 수정을 하지 않아도 큰 오차가 발생하지 않는다.

Table 13 Comparison of the natural frequency of MQM10 and QM10 element with 20-node element of unidirectional laminated composite plates

Type	Layer and Angle	Model	Natural Frequency 1st Mode (% error)	Natural Frequency 2nd Mode (% error)	Natural Frequency 3rd Mode (% error)
Unidir. Lamina	4-Layer (90°/0°/0°/90°)	20-Node	58.7	370.4	533.3
		QM10	61.7 (5.2)	388.7 (4.9)	546.4 (2.5)
		MQM10	58.4 (4.6)	367.7(7.3)	545.3 (2.2)
	4-Layer (90°/90°/90°/90°)	20-Node	38.04	240.7	579.1
		QM10	43.0 (13.)	276.2 (15.)	577.6 (26)
		MQM10	37.5 (1.3)	240.9 (0.83)	578.9 (0.05)
	4-Layer (45°/-45°/-45°/45°)	20-Node	54.3	343.9	819.0
		QM10	54.5 (3.6)	344.7 (2.3)	788.8 (3.7)
		MQM10	53.5 (1.5)	338.5 (1.6)	820.4 (1.7)
	4-Layer (0°/90°/90°/0°)	20-Node	123.7	568.4	776.3
		QM10	124.4 (5.7)	578.1 (1.7)	781.5 (6.7)
		MQM10	123.9 (1.6)	577.8 (1.7)	778.1 (2.3)

Table 14 Comparison of the natural frequency of QM10 and MQM10 element with 20-node element of braided, woven laminated composite plates

Type	Layer and Angle	Model	1st Mode Hz (% error)	2nd Mode Hz (% error)	3rd Mode Hz (% error)
Braided	Single Layer (0°)	20-Node	126.7	800.8	1535.1
		QM10	131.7 (3.9)	828.3 (3.4)	1576.8 (2.7)
		MQM10	127.6 (7.1)	802.3 (.19)	1575.6 (2.6)
Woven	4-Layer (0°/90°/90°/0°)	20-Node	131.9	827.7	1597.
		QM10	132.0 (.076)	829.1 (.17)	1593.5 (.22)
		MQM10	131.7 (.15)	827.2 (.060)	1593.3 (.23)
	4-Layer (45°/-45°/-45°/45°)	20-Node	131.9	827.7	1597.
		QM10	132.2 (.23)	829.3 (.19)	1593. (.25)
		MQM10	131.9 (.00)	828.4 (.085)	1589.6 (.46)
	4-Layer (0°/0°/0°/0°)	20-Node	131.9	827.7	1597.
		QM10	132. (.076)	829.5 (.22)	1599. (.13)
		MQM10	131.7 (.15)	827.6 (.012)	1599. (.13)

4. 결 론

굽힘문제에 효과적인 MQM10요소를 복합재 판용 유한요소로 제안하고, 판의 굽힘문제에 적용할 때 발생하는 자유도가 줄어들어 기인한 상대적 강성과잉 현상을 제거할 수 있는 방법으로써 복합재 판용 가우스 적분점 수정식을 유도하였다. 이 요소는 절점수가 8개이고 2개의 변형모드가 무절점 자유도로 추가되었으며, 굽힘문제 해석에 적합한 고체 요소중 최소의 자유도를 가지고 있다. 가우스 적분점 위치 수정 방법의 타당성을 확인하기 위해 요소의 비사각 분할때의 변위와 응력을 검토하였으며, 선형 및 비선형 정적해석, 두께의 변화에 따른 영향의 검토, 층간 응력해석 및 고유진동 해석을 수행하였다. 그 결과 제안된 요소들은 자유도 수가 작음에도 불구하고 완전 요소인 3차원 20절점요소와 유사한 역할을 할 수 있음을 알 수 있었다.

이상의 내용과 수치적 계산결과를 요약하면 아래와 같다.

1. MQM10요소(수정 10절점 상당요소)를 적층 복합재 판요소로 제안하고, 자유도의 축소에 기인한 상대적 강성과잉 현상을 가우스 적분점 수정 방법으로 제거하였다.
2. 제안된 요소는 굽힘변형을 고려할 수 있는 고체 요소중 최소의 자유도를 가지며, 비사각 요소로 분할된 판, 외팔 판, 여러 형태로 적층된 복합재 판 등의 정적 선형 및 비선형해석과 자유진동 해석에 적용하였다. 소요기억 용량과 총방정식의 수가 현저히 작음(Fig. 6의 경우 총 방정식의 수는 66%, 총 소요기억 용량은 86%가 줄어들음)에도 불구하고 20절점요소와 유사한 거동을 함을 알 수 있었다.
3. 3차원 층간 응력문제에서, 고전적 판이론이나 일차 전단변형 이론 등과는 달리, 3차원 탄성해와 잘 일치하고 있어 layerwise 이론, 20절점요소 및 수정 16절점요소 등과 더불어 층간분리, 자유 경계면 문제 등에 효과적으로 적용이 가능하다고 할 수 있다.

참 고 문 헌

- 1) P.C. Yang, C.H. Norris, and Y. Stavsky, "Elastic wave propagation in heterogeneous plates", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 2, Oct., 1966, pp. 665-684.
- 2) N.J. Pagano, "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", *J. Comp. Mat.*, Vol. 4, 1970, pp. 20-34.
- 3) E. Reissner, and Y. Stavsky, "Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic plates", *J. Appl. Mech.*, Vol. 28 No. 3, 1961, pp. 402-408.
- 4) S.B. Dong, K.S. Pister, and R.I. Taylor, "On the theory of laminated anisotropic shells and plates", *J. Aerospace Sci.*, Vol. 29 No. 8, 1962, pp. 969-975.
- 5) E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J. Appl. Mech.*, *Trans. ASME*, Vol. 12 No. 1, 1945, A-69-A-77.
- 6) R.D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", *J. Appl. Mech.*, *Trans. ASME*, Vol. 18, 1951, pp. 31-38.
- 7) J.M. Whitney, and N.J. Pagano, "Shear deformation in heterogenous anisotropic plates", *J. Appl. Mech.*, *Trans. ASME*, Vol. 37, 1970, pp. 1031-1036.
- 8) J.N. Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *J. Appl. Mech.*, *Trans. ASME*, Vol. 51, 1984, pp. 745-752.
- 9) J.N. Reddy, "A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 20 No. (9/10), 1984, pp. 881-896.
- 10) A.K. Noor and W.S. Burton, "Assessment of computational models for multilayered composite shells", *Appl. Mech. Rev.* 43, 1990, pp. 67-97.
- 11) J.N. Reddy, "A review of refined theories of laminated composites", *Shock Vib. Dig.* 22, 1990, pp. 3-17.
- 12) L. Librescu and J.N. Reddy, "A few remarks concerning several refined theories of anisotropic composite laminated plates", *Int. J. Eng. Sci.* Vol. 27, 1989, pp. 515-527.
- 13) S. Ahmad, B.M. Irons and O. C. Zienkiewicz, "Analysis of thick and shell structures by curved finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 2, 1970, pp. 419-451.
- 14) H. Stolarski and T. Belytschko, "Membrane locking and reduced integration for curved elements", *J. Appl. Mech.*, Vol. 49, No. 1, 1982, pp. 172-176.
- 15) C.K. Choi and S.H. Kim, "Coupled use of reduced integration and non-conforming modes in quadratic Mindlin plate elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, 1989, pp. 1909-1928.
- 16) C.K. Choi and S.H. Kim, "Improvement of degenerated plate/shell elements", *Proc. US-Korea Joint Seminar/Workshop on Critical Eng. Sys.*, 1987.
- 17) H. Parisch, "A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 20, 1979, pp. 323-350.
- 18) W.C. Chao and J.N. Reddy, "Analysis of laminated composite shells using a degenerated 3-D element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 20, 1984, pp. 1981-2007.
- 19) Y.D. Kwon and T.H. Yun, "Static and dynamic analyses of bending problems using modified 5-node equivalent element", *The 3rd Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics*, 1996, pp. 103-108.
- 20) J.O. Kim and Y.D. Kwon, "On the modification of Gauss sampling points of

- 6-node and 16-node isoparametric finite elements", *Computers & Structures*, Vol. 63, No. 3, 1997, pp. 607-623.
- 21) NISA II, User's manual 4.4-4, version 91.0.
- 22) R.D. Cook, D.S. Malkus and M.E. Plesha, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Ch. 5-6, 1989.
- 23) K.J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall Inc., Ch. 4-6, 1982.
- 24) Adel S. Saada, *Elasticity Theory and Applications*, Pergamon Press Inc., Ch. 14.
- 25) W.C. Chao and J.N. Reddy, *Finite Element Analysis of Composite Laminates*, *Solid Mechanics and its Applications*, Vol.7, Editor, G.M.L. Gladwell, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- 26) M. Bercovier, "Perturbation of mixed variational problems application to mixed finite element methods", *R.A.I.R.O.(Numerical Analysis)*, Vol. 12, 1978, pp. 211-236.
- 27) D.S. Malkus and T.J.R. Hughes, "Mixed finite element methods-reduced and selective integration techniques : a unification of concepts", *Comp. Meth. App. Meth. & Engng.*, Vol. 15, No. 1, 1978, pp. 63-81.
- 28) N.J. Pagano, "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", *J. Comp. Mat.*, Vo. 4, 1970, pp. 20-34.
- 29) J.N. Reddy, *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley, New York, 1984.
- 30) 윤태혁, 권영두, 김상엽, "수정된 3차원 16절점 요소에 의한 복합재 판의 자유진동 및 감쇠특성 해석", *대한기계학회논문집*, 제19권 제4호, 1995, pp. 990-1004.
- 31) 김병노, 구고남, 이인, "열 가소성 복합재료의 동적 특성에 관한 연구", *추계 한국 복합재료 학회 논문 초록집*, 1992, pp. 87-92.