

Lorenz계에서 변수의 되먹임에 의한 혼돈의 동기화

김철민
배재대학교 물리학과

Synchronization of Chaos in the Lorenz System by Variable Feedback

Chil-Min Kim
Department of Physics, Pai Chai University

The method of synchronization by feedbacking a signal of master system to a corresponding variable of slave system is applied to the Lorenz system which is autonomous system. The two Lorenz systems are synchronized and the synchronization occurs when the system consisting of the variable differences of the two systems generates infinite period of laminar phase. The characteristics of synchronization is analyzed in time series and phase spaces.

주혼돈계에서의 한 신호를 대응되는 종속계의 변수에 되먹임시켜 두 혼돈계를 서로 동기화시키는 혼돈의 동기화 방법을 autonomous계의 하나인 Lorenz계에 적용시켜 보았다. Lorenz계에서도 두 혼돈계는 동기화되었고 동기화 영역은 두 혼돈계의 변수들의 차로 이루어진 새로운 혼돈계에서의 laminar phase의 주기가 무한대일 때 생겼다. 이 혼돈계에서의 동기화 특성을 시간적 특성과 위상공간에서 분석하였다.

Key words : Chaos, Synchronization, On-off intermittency.

I. 서 론

혼돈은 일반적으로 초기치에 매우 민감하기 때문에 동일한 두 혼돈계가 있다 하더라도 두 혼돈계의 초기치가 조금만 다르면 두 혼돈계는 서로 다른 시공간적 궤적을 보이는데 이것을 혼돈의 초기치 민감성 즉 "나비효과"라 불리는 현상이다(Berge *et al.*, 1984). 그러나 이러한 혼돈도 외부에

서 어떤 특정한 섭동을 주면 두 혼돈계의 궤적을 서로 일치시킬 수 있는데 이를 혼돈의 동기화라 부른다. 이런 혼돈의 동기화는 1990년 Pecora-Carroll에 의하여 동일한 두 혼돈계가 있을 때 서로 대응되는 변수를 서로 일치시킬 때 두 혼돈계는 서로 동기화 된다는 결과를 발표하였다(Pecora and Carroll, 1990). 이 결과는 최근 혼돈의 응용의 한 예로 많은 연구자들에 의해서 연구되고 있는데 이러한 혼돈의 동기화는 혼돈 신호를 masking 신호로 사용하는 spread-spectrum 방법이라 불리는

비밀통신의 한 방법으로 크게 각광 받고 있기 때문이다(Cuomo and Oppenheim, 1993). 이 외에도 이러한 혼돈의 동기화 방법은 laser에서도 쉽게 나타나고(Roy and Thornburg, 1990; Sugawara *et al.*, 1994) 또는 혼돈의 규명에도 널리 쓰일 수 있으며(Pyragas, 1992) 신경망 회로에서 각 신경소자들 사이의 동기화의 규명에도 널리 응용되고 있다(Strogatz and Stewart, 1993).

이러한 목적으로 쓰이는 혼돈의 동기화 방법에는 몇가지가 있는데 앞에서 설명한 Pecora-Carroll방법 외에도 Pyragas방법(Pyragas, 1994), OGY 혼돈제어법을 원용한 방법(Newell *et al.*, 1994), 외부에서 아주 큰 잡음 신호를 주는 방법(Maritan and Banavar, 1994), 그리고 Kim에 의한 방법(Kim, unpublished)으로 나눌 수 있다. 이 외에도 최근에는 좀더 복잡한 혼돈을 제어하고자 새로운 여러 방법들이 나타나고 있는데 그 예로는 초혼돈(hyperchaos)을 동기화 시키는 방법(Peng *et al.*, 1996)이나 시공간 혼돈을 동기화 시키는 방법(Kocarev and Parlitz, 1996) 등이 개발되고 있다. 이러한 혼돈의 동기화 방법들은 대부분 혼돈이 동기화 될 때 두 혼돈계에서 생성되는 sub-system의 최대 Lyapunov 지수값이 음일 때 일어난다는 것으로 알려져 있다. 그래서 그 분석은 모두 Lyapunov 지수를 조사하여 혼돈의 동기화 가능성이 예견하게 된다. 그러나 Kim은 이러한 방법 외에도 두 혼돈계의 변수의 차이로 이루어지는 새로운 혼돈계를 만들고 이 혼돈계가 on-off 간헐성(Platt *et al.*, 1993)과 연결된 무한대 길이의 laminar phase가 생길 때 두 혼돈계가 서로 동기화되는 방법을 개발 하였다.

Kim의 혼돈의 동기화 방법은 다양한 혼돈계에 대하여 sub-system의 Lyapunov지수의 분석없이 쉽게 혼돈의 동기화를 예측할 수 있는 방법이나 이 방법은 극히 최근에 개발되어 그 동기화 특성이 아직 완전히 밝혀지지 않고 있다. 그래서 본 논문에서는 autonomous 혼돈계의 하나인 Lorenz 계를 통하여 이 혼돈의 동기화 방법에 의한 혼돈의 동기화 특성에 대하여 밝혀도록 하겠다. 그래서 제 II장에서는 Lorenz혼돈계에 적용하는 동기화 열개를 보이겠으며 제 III장에서는 이 때 생기는 동기화 특성에 대하여 관찰하겠으며 마지막으로는 그 결과에 대하여 설명하도록 하겠다.

II. 동기화 열개

Kim이 개발한 동기화의 열개는 주 혼돈계에서의 임의의 변수의 신호를 $x(t)$ 라 하고 이 신호를 여기에 대응되는 종속혼돈계의 변수 x' 에 되먹임시키는데 되먹임 방법은 x' 을 $(1-\alpha)$ 배로 줄이거나 늘리고 $x(t)$ 를 α 배 줄거나 늘린 뒤 두 신호를 더하는 방법이다. 그러면 주 혼돈계와 종속 혼돈계는 각각 아래와 같이 주어지게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, \vec{y}), & \vec{y} &= \vec{G}(x, \vec{y}) : \text{주 혼돈계} \\ \dot{x}' &= F((1-\alpha)x' + \alpha x(t), \vec{y}'), \\ \dot{y}' &= \vec{G}((1-\alpha)x' + \alpha x(t), \vec{y}'): \text{종속혼돈계(1)} \end{aligned}$$

여기서 $(1-\alpha)x' + \alpha x(t) = x' + \alpha(x(t) - x')$ 이므로 실제계에서 주 혼돈계와 종속혼돈계의 차이는 더욱 간단해지게 된다. 이 식을 보면 $\alpha=1$ 이면 $x'=x$ 가 되므로 이러한 동기화 방법은 Pecora-Carroll의 방법이 된다. 그리고 $\alpha=0$ 이면 두 혼돈계는 서로 독립적인 혼돈계가 된다.

이 방법을 Lorenz계에 적용해 보기로 하자. Lorenz 혼돈계에서 주 혼돈계는 아래와 같은 식으로 주어지게 된다.

$$\dot{x} = \sigma(y-x), \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz \quad (2)$$

또 종속 혼돈계는 주혼돈계와 모든 계수 값은 동일하나 변수의 값에 prime을 붙여 종속혼돈계임을 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \sigma(y' - x') \\ \dot{y}' &= -x'z' + rx' - y' \\ \dot{z}' &= x'y' - bz' \end{aligned} \quad (3)$$

이 두 혼돈계는 계수의 값이 서로 동일하면 동일한 혼돈계가 되는데 이때 두 혼돈계에서 변수의 초기치에 차이가 생기게 되면 두 혼돈계는 서로 완전히 다른 궤적을 그리게 된다. 이 두 혼돈계를 동기화 시키기 위하여 임의의 한 변수를 택해 (이 혼돈계에서는 실제 x, y, z 어떤 변수의 신호를

되먹임 신호로 주어도 두 혼돈계는 서로 동기화된다.) 이것을 종속 혼돈계에 되먹임시키면 된다. 일반적으로 Pecora-Carroll의 방법에서 Lorenz계는 z 변수를 되먹임 시키면 최대 Lyapunov지수가 양으로 나와 두 혼돈계를 동기화 시킬 수 없다. 그러나 이 방법의 특성을 잘 이해하기 위하여 여기서는 z 변수를 동기화 변수로 두어서 두 혼돈계의 동기화 특성을 보도록 하겠다.

z 변수를 되먹임 변수로 두면 그 종속혼돈계는 아래와 같이 주어지게 된다.

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= \alpha(y' - x') \\ \dot{y}' &= -x'(z' + \alpha(z(t) - z')) + rx' - y' \\ \dot{z}' &= x'y' - b(z' + \alpha(z(t) - z'))\end{aligned}\quad (4)$$

이 식에서 $x(t) - x' = X$, $y(t) - y' = Y$, 그리고 $z(t) - z = Z$ 로 두면 주 혼돈계와 종속혼돈계의 차이로 만들어지는 식은 아래와 같이 주어지게 된다.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \alpha(Y - X) \\ \dot{Y} &= (1 - \alpha)XZ + rX - Y - (1 - \alpha)xZ - zX \\ \dot{Z} &= -XY - b(1 - \alpha)Z + xY + Xy\end{aligned}\quad (5)$$

이 식의 구조를 보면 두변수의 차이로 만들어진 식에 주혼돈계의 혼돈신호가 계수의 형태로 들어가 있다. 이러한 경우 이 식은 주혼돈계의 신호에 의해서 계수가 섭동을 받는 꼴이 된다. 이러한 형태의 혼돈계는 Platt등에 의해서 밝혀진 바에 따라 계수의 크기에 따라 혼돈이나 on-off 간헐성 혹은 무한대 길이의 laminar phase를 가지게 된다. 이 경우 두 계수의 차이로 만들어지는 식에서 나오는 신호가 무한대 길이의 laminar phase를 가지면 이 혼돈계는 0으로 수렴하게 되고 이 식이 0으로 수렴한다는 말은 두 Lorenz 혼돈계의 차이가 0으로 수렴한다는 말이 되므로 두 혼돈계에서 나오는 신호는 서로 일치하게 된다. 이러한 경우를 두 Lorenz 혼돈계가 서로 동기화되었다고 할 수 있게 된다.

이러한 방법으로 두 혼돈계를 동기화 시키기 위해서 주혼돈계의 혼돈 신호를 종속혼돈계의 변수에 되먹임 시킬 때 z 변수 뿐만 아니라 다른 변수를 더하여도 되는데 만약 x 나 y 변수를 되먹임 시키는 경우에도 마찬가지로 앞과 같은 꼴의 두

변수의 차에 의한 식을 만들 수 있다. 이때에 중요한 것은 이렇게 새로 만들어지는 식의 주 혼돈계의 혼돈 신호의 크기를 일정한 값으로 주어써 이 값의 크기에 따라 만들어지는 갈래질 열개(bifurcation diagram)이다. Platt 등(1993)은 어떤 구조의 갈래질 열개일 때 혼돈 신호 혹은 잡음 신호의 크기에 따라 무한대 길이의 laminar phase가 생기는지를 이론적으로 잘 구했다. Platt 등(1993)의 결과에 따르면 이런 경우 갈래질열개는 초평면(Hyper plane)이 0의 값을 가지고 이 초평면은 어떤 값에서 갈래질을 하게 되는데 이때 이 갈래질 값 근처의 값으로 계수가 불규칙적으로 크게 섭동을 받으면 이런 on-off 간헐성이나 무한대 길이의 laminar phase가 생기는 것이다. 그래서 외부에서 들어가는 주 혼돈계의 혼돈신호는 새로 구성된 식의 계수로 들어가게 되는데 이 혼돈 신호는 갈래질 값 근처의 값으로 섭동을 받아야 한다. 두 혼돈계의 변수의 차이로 구성된 새 혼돈계가 이런 구조의 갈래질 열개를 가지고 있으면 이때 주혼돈계의 크기를 결정시키는 것은 scaling 값이므로 scaling 값에 따라 두 혼돈계는 서로 동기화가 생기게 된다. 많은 혼돈계의 경우에 두 혼돈계의 변수의 차이로 만들어지는 새 혼돈계는 이런 구조를 가질 수 있으므로 많은 혼돈계의 경우 이런 방법으로 두 혼돈계를 서로 동기화 시킬 수 있게 된다. 여기서 설명하는 Lorenz계도 이런 혼돈계의 하나이다. 일반적으로 이런 류의 혼돈계의 갈래질 열개는 차분방정식 형태의 혼돈계에서는 그 구조를 쉽게 밝힐 수 있으나 미분방정식계 처럼 연속계의 경우에는 혼돈 신호가 일정한 진동수나 진폭을 가지고 있지 않음으로 이런 갈래질 열개를 형태를 쉽게 밝히기 어렵다. 그러나 차분 방정식계의 경우에는 Platt등의 결과에 따라 이 새로운 혼돈계의 갈래질 열개를 쉽게 분석할 수 있으므로 무한대 길이의 laminar phase가 시작되는 scaling 값을 구할 수 있으므로 동기화되는 영역을 쉽게 구할 수 있다.

III. 동기화 특성

이러한 형태의 동기화 방법은 앞에서 설명한 바와 같이 변수들의 차이로 이루어진 새로운 비선형계는 주혼돈계의 변수의 신호에 의하여 섭동을 받는 그런 혼돈계로 바뀌게 된다. 여기서 새로운 혼돈계에 가해지는 주혼돈계의 신호의 크기는 그

scaling factor의 크기가 α 에 의하여 바뀌게 된다. 그래서 이런 경우 새로운 혼돈계가 과연 무한대 길이의 laminar phase를 만들 수 있나 없나를 보기 위하여 α 의 크기에 따른 주혼돈계와 종속혼돈계의 x 변수의 시간적 모양과 두혼돈계의 차이인 $x-x'$, 그리고 새로운 변수인 X 의 시간적 변화를 구하였다. 이때의 Lorenz 혼돈계의 계수의 값은 $\sigma=10.0$, $r=28.0$, 그리고 $b=8/3$ 로 두었다. 이때의 혼돈신호의 동기화와 관련된 그 신호들의 시간 파형이 Fig. 1에 주어져 있다.

Fig. 1(a)에 따르면 scaling factor의 값이 -3.0 일 때 두 혼돈계의 파형이 서로 동기화 되지 않은 파형을 보여 준다. 이 그림에 따르면 위 파형의 주 혼돈계의 x 변수의 파형이며 아래 파형은 종속 혼돈계의 x' 변수의 파형이고 그 아래 파형은 두 변수의 차이 $x-x'$ 의 파형이며 마지막 파형은 식 (5)에서 나오는 두 변수의 차에 의하여 만들어진 새로운 식에서 나오는 함수의 파형이다. 이 그림에서 보면 $x-x'$ 의 파형이 0이 아닌 혼돈 파형을 만들고 있는 것을 볼 수 있는데 이것은 주 혼돈계와 종속혼돈계가 서로 동기화되지 않아 서로 다른 궤적을 움직이므로 두 파형이 서로 다르게 나타나기 때문이다. 이 현상은 두 변수의 차이로 만들어지는 새로운 혼돈계의 복잡한 혼돈현상으로 그 결과를 볼 수 있다. 세 번째 파형과 네 번째 파형은 서로 시간적 파형의 모습이 거의 일치하는 것을 볼 수 있는데 이는 식 (5)가 식 (3)과 (4)의 차이로 만들어지는 식임을 잘 보여주는 현상이다. 즉 이 식은 두 변수의 차이가 서로 동기화 되어 두 변수의 차가 0으로 수렴하는지 않는지를 판별할 수 있는 근거가 될 수 있음을 보여주는 것이다.

Fig. 1(b)는 그 scaling factor가 -4.0 일 때 나타나는 두 변수의 차가 on-off간헐성을 보여주는 파형이다. 이 그림에서 제일 위 파형은 주혼돈계의 x 의 파형을 보여주며 아래 파형은 종속혼돈계의 x' 의 파형을 보여주며 세 번째 파형은 두혼돈계의 차이인 $x-x'$ 의 파형을 보여주고 마지막 파형은 두 변수의 차로 만들어지는 새로운 식 식(5)의 파형이다. 이 그림에서 보면 두 혼돈계는 동기화되었다 되지 않았다 하는 간헐적인 비 동기화를 보여 준다. 이것은 식 (5)에서 보듯 이 식이 혼돈 신호에 의해서 섭동을 받는 꼴이므로 이때의 간헐적 성질은 Platt 등(1993)이 설명한 on-off간헐성에 속하게 된다. 그리고 이때의 간헐성을 나타내는 $x-x'$ 및 새로운 식(5)의 시간적 변화를 보면 두식

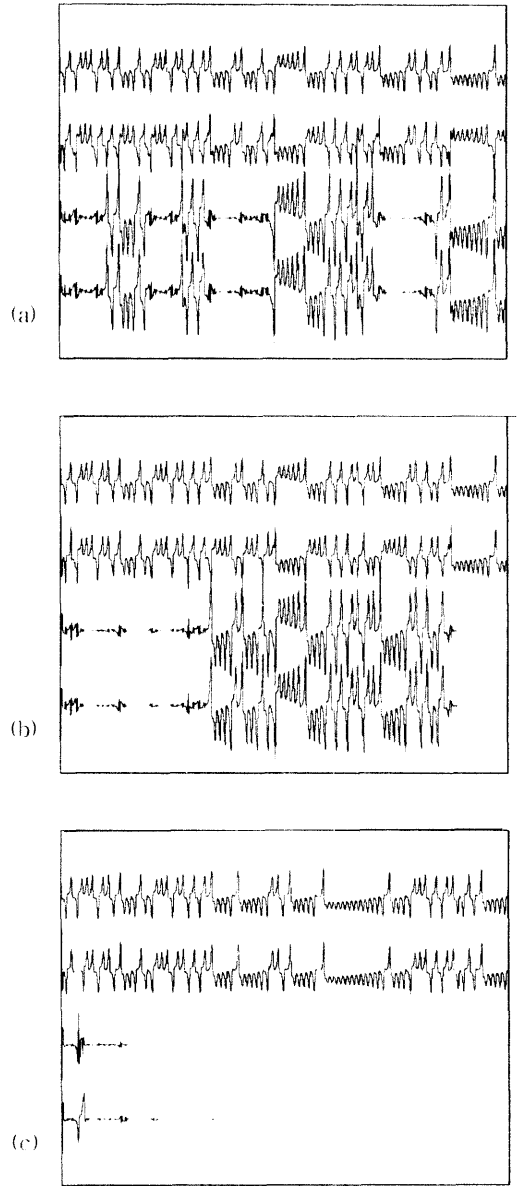


Fig. 1. Temporal behaviors of the synchronization in the Lorenz systems by variable feedback when the two Lorenz systems are (a) desynchronized ($\alpha=-3.0$), (b) intermittently desynchronized ($\alpha=-4.0$), and (c) synchronized ($\alpha=-5.0$). (the signals in each figure are x, x', X , and $x-x'$ respectively.)

의 시간적 변화가 매우 흡사함을 볼 수 있다. 그러나 가끔씩 두 신호에 커다란 차이가 생김을 볼 수 있는데 이는 비선형 미분방정식을 풀어가는 과정에서 시간 변화율에 round-off 오차가 시간의 증가에 따라 점점 커져서 이러한 결과를 만들어 내는 것이다. 이를 고려하더라도 새로운 식이 두 혼돈계의 차이를 그대로 나타냄을 잘 보여주고 있다.

Fig. 1(c)는 마찬가지로 scaling factor가 -5.0 일 때 나타나는 현상으로 제일 위 파형은 주혼돈계의 파형, 둘째 파형은 종속 혼돈계의 파형 셋째는 두 혼돈계의 차이의 파형 그리고 마지막은 새로운 혼돈계의 파형을 보여 준다. 이 그림에 의하면 셋째와 네 번째 파형은 항상 0으로 수렴된 파형을 보여 주는데 이는 두 혼돈계의 파형이 0으로 수렴되어 두 혼돈계의 차이가 없다는 것을 말해 준다 즉 첫 번째 파형과 두 번째 파형이 항상 서로 일치해 있다는 사실을 말해 준다. 이것은 두 혼돈계가 서로 동기화 되어 서로가 같은 파형을 만들고 있다는 것을 말하는 것이다.

이상의 세 파형의 차이로 볼 때 이 방법에 의한 혼돈의 동기화 방법은 쉽게 두 혼돈계를 서로 동기화 시킬 수 있는데 이 동기화는 on-off간헐성을 통하여 두 혼돈계가 동기화됨을 잘 보여준다. 즉 scaling 값의 변화에 따라 두 혼돈계가 서로 동기화 되지 않기도하고 동기화 되기도 하는 이론적 열개를 보여 준다. 이러한 방법에 의한 혼돈의 동기화를 위한 scaling factor값의 결정은 이미 Kim 등의 이론에서 그 현상을 잘 설명한 바 있다. 그 이론에서 혼돈의 동기화 열개는 logistic map과 같은 차분 방정식과 외부에서 힘이 있는 nonautonomous계에서 보였는데 여기서는 이 식이 autonomous계의 하나인 Lorenz식에서도 이러한 결과가 잘 나타남을 보이고 있다.

이러한 현상이 생길때의 현상을 위상 공간에서도 그 현상을 잘 볼 수 있다. 위상 공간은 두 변수의 파형을 각각의 좌표계로 두어서 이때 나타나는 현상을 보는 것으로 혼돈의 동기화를 보기 위하여 주혼돈계의 x 변수를 x 좌표로 두었고 종속혼돈계의 x' 의 좌표를 y 축으로 두었다. 이때 두 혼돈계가 동기화 되지 않았을 때에는 그 위상공간의 파형이 무질서하게 전 공간에 Fig. 2(a)처럼 흩어져 있으나 간헐적인 동기화가 생기면 두 혼돈계는 서로 동기화되다 가끔씩 비동기화가 생겨 그 궤적이

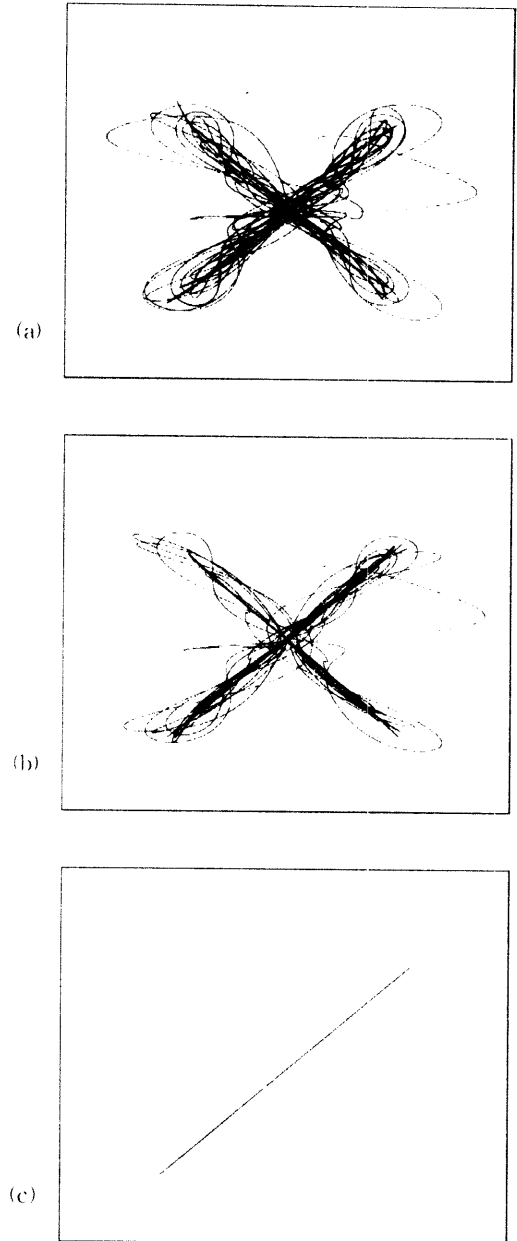


Fig. 2. The trajectories of the two Lorenz systems in phase space. (x -axis is y and y -axis is y') when the two systems are (a) desynchronized ($\alpha = -3.0$), (b) intermittently desynchronized ($\alpha = -4.0$), (c) synchronized ($\alpha = -5.0$).

홀어지는 양상을 볼 수 있다. 이것이 Fig. 2(b)에서 볼 수 있다. 그리고 두 혼돈계가 서로 동기화 되면 두 혼돈계가 서로 동기화 되어 x 축의 변화와 y 축의 변화가 서로 일치하므로 두 혼돈계의 궤적은 대각선 상에 직선으로 나타나게 된다. 이러한 현상으로 인해 두 혼돈계는 서로 완전히 동기화된 것임을 알 수 있다.

이러한 방법의 혼돈계의 동기화는 이외의 여러 다른 혼돈계의 동기화에도 널리 쓰일 수 있는데 예를 들어 hyperchaos의 동기화 방법이나 그외의 복잡한 spatiotemporalchaos의 동기화 방법에서도 쉽게 쓰일 수 있다. 이 방법의 장점은 앞에서 설명한 대로 두 혼돈계의 차가 on-off 간헐성의 조건을 따라 동기화가 만족되므로 그갈래질 열개의 형태가 동기화의 결정에 중요한 역할을 하는데 예를 들면 Pecora-Carroll형의 동기화 방법에서는 그 Lyapunov exponent가 음일 때 동기화가 되는데 Lorenz 혼돈계에서 z 변수를 이용한 혼돈의 동기화는 그 나머지 변수의 값들의 Lyapunov exponent가 항상 음이지 않아 동기화를 시킬 수 없는 것으로 알려지고 있다. 그러나 이 방법에 의한 동기화에서는 그 Lyapunov exponent에 관계없이 갈래질 열개의 형태를 관찰하므로써 어떤 혼돈 상태가 서로 동기화될 지 아닐지를 서로 판별할 수가 있게 된다. 이는 Pecora-Carroll이나 Pyrgas방법과는 다른 Kim의 설명과 같이 새로운 동기화 mechanism의 하나이다. 여기서는 이러한 형태의 특이한 혼돈의 동기화 열개를 보이기 위하여 Lorenz계에서 z 변수를 동기화 변수로 잡아서 두 혼돈계를 서로 동기화시켜 보았다.

IV. 결 론

이상의 결과에서 보면 주혼돈계에서의 하나의 변수의 신호를 종속혼돈계에서의 대응되는 하나의 변수에 되먹임시키면 두 혼돈계가 서로 동기화되는데 이는 새로운 형태의 동기화 열개로서 두 혼돈계의 차이가 scaling값에 따라 on-off 간헐성을 통하여 동기화 되는 것을 잘 보여 준다. 이러한 동기화 기법은 그 Lyapunov exponent의 분석 없이도 그 갈래질 열개의 분석을 통하여 동기화 가능함을 알 수 있는데 여기서는 Lyapunov exponent에 관계 없이 Lorenz 혼돈계의 z 변수의 결합에 의하여 두 혼돈계가 서로 동기화 되었음을 보여 준다.

V. 감사의 글

본 논문은 96년도 배재대학교 교내 학술연구비 지원에 의하여 수행된 것임.

참고문헌

- Berge, P., Pomeau, Y., and Vidal, C.. (1984) Order within Chaos. John Wiley and Sons, New York.
- Cuomo, K.M., and Oppenheim, A.V. (1993) Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.* 71: 65
- Kim, Chil-Min (1997) New Mechanism of Synchronization. submitted in *Phys. Rev. Lett.*
- Kocarev, L. and Parlitz, U. (1996) Synchronizing spatiotemporal chaos in coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 77: 2206.
- Maritan, A. and Banavar, J.R. (1994) Noise, chaos, and synchronization. *Phys. Rev. Lett.* 72: 1451.
- Newell, T.C., Alsing, P.M., Gavrielides, A., and Kovanis, V. (1994) Synchronization of chaotic diode resonators by occasional proportional feedback. *Phys. Rev. Lett.* 72: 1647.
- Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1990). Synchronization of chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* 64: 1196
- Peng, J.H., Ding, E.J., Ding, M., and Yang, W. (1996) Synchronizing hyper chaos with a scalar transmitted signal. *Phys. Rev. Lett.* 76: 904.
- Platt, N., Spiegel, E.A., and Tresser, C. (1993) Bursting mechanism of on-off intermittency. *Phys. Rev. Lett.* 70: 279.
- Pyrgas, K. (1992) Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Lett.* A170: 421.
- Pyrgas, K. (1993) Predictable chaos in slightly perturbed unpredictable chaotic systems. *Phys. Lett.* A181: 203.
- Roy, R. and Thornburg, Jr., K.S. (1994) Experimental synchronization of chaotic lasers. *Phys. Rev. Lett.* 72: 2009.

Strogatz S.H. and Stewart, I. (1993) *Sci. Am.*
269: 102.

Sugawara, T., Tachigawa, M., Tsukamoto, T.,
and Shimizu, T. (1994) Observation of syn-
chronization in laser chaos. *Phys. Rev. Lett.* 72:
3502.
