

---

 論 文
 

---

大韓造船學會論文集  
 第 34 卷 第 3 號 1997 年 8 月  
 Journal of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 34, No. 3, August 1997

## 밀도가 다른 두 유체 층의 경계면에서 발생하는 내부파의 특성에 대하여

김도영\*, 김장환\*\*

### On the Characteristics of Internal Waves between Two Stratified Fluid Layers.

by

D.Y. Kim\* and J.W. Kim\*\*

#### 요 약

두개의 서로 다른 밀도를 가지는 유체의 경계면에서 발생하는 내부고립파의 특성에 대하여 검토하였다. 해밀턴원리를 이용하여 내부고립파 문제의 지배방정식을 얻었다. 이 지배방정식을 이용하여 고립파의 파고와 전파속도의 관계식을 얻었으며 계산된 전파속도는 실험 결과와 잘 일치하는 것을 보였다. 내부고립파가 전파 가능한 속도 영역이 존재하며, 전파속도의 최소값과 최대값을 두 층의 수심비와 밀도비의 함수로 나타내었다. 파고가 주어진 경우 KdV방정식에 의해서 계산된 전파속도는 실제보다 큰 값을 주며, 전파속도를 가지고 파고를 계산한 경우에는 실제보다 작은 값을 준다.

#### Abstract

Internal solitary waves between two-stratified fluid layers are examined. Hamilton's principle is used to derive a governing equation. The wave speed-wave height relation is obtained and this agrees well with the experiment. The wave profiles obtained also agree well with the experimental result. There exist minimum and maximum wave speeds depending on the depth ratio and the density ratio of two layers. The KdV equation overpredicts the wave speed for a given wave height and underpredict the wave height for a given wave speed.

---

발 표: 1995년도 대한조선학회 추계연구발표회('95. 11. 10)

접수일자: 1996년 2월 5일, 재접수일자: 1997년 4월 30일

\* 정회원, 흥익대학교 조선해양공학과

\*\* 정회원, University of California, Berkeley

## 1. 서론

서로 다른 유체의 경계면에서는 표면파가 발생한다. 그러나 공기와 물의 경계면에서 생기는 수면파는 공기의 밀도가 물에 비하여 상당히 작기 때문에 대부분의 경우 공기의 영향을 무시할 수 있다. 서로 밀도를 무시할 수 없는 경우 유체의 경계면에서 발생하는 표면파를 내부파(internal wave)라 부른다. 이 내부파는 동일 유체 내에서도 밀도의 분포가 다른 경우에도 발생한다. 해양에서는 수온 차에 의하여 수온 약층(thermocline)이 존재하며 이를 중심으로 수직 방향의 밀도차가 있기 때문에 이러한 현상을 두개의 서로 다른 밀도를 가지는 유체의 층으로 근사적으로 표시할 수도 있다. 또한 수온뿐만 아니라 염도에 의해서도 수직 방향의 밀도 차이를 가지는 층이 형성될 수 있다. 이러한 경우에는 두 개의 층 사이의 밀도 차는 크지 않아서 중력과 두 층의 밀도 차에 의해서 생기는 복원력이 작아지기 때문에 일반적으로 내부파의 주기는 수면파에 비하여 상당히 길어지며 파고의 크기는 매우 커질 수 있다. Osborne과 Burch[1]는 1976년 총 수심이 1000m인 Andaman sea의 수면 아래 150m 지점인 수온약층에서 최대 파고 60m를 가지는 내부고립파(internal solitary wave)에 대한 관측을 보고를 하였다.

Koop과 Butler[2]는 실험과 Korteweg-de Vries (KdV) 방정식을 통하여 두 개의 서로 다른 유체의 층 사이에서 발생하는 내부고립파에 대한 연구를 하였다. 이들은, 윗면이 고정된 경우와 자유표면인 경우 큰 차이가 없어서 계산 결과는 고정된 윗면으로부터 얻은 식을 사용하였고, 실험과 KdV 방정식의 비교를 통해서 1차 KdV 방정식은  $\epsilon = (a/h_0)$  가 0.2까지, 2차 KdV 방정식은 0.8까지 유효한 것을 보였다. Kao, Pan과 Renouard[3]는 총 수심을 일정하게 정하고 각 층의 두께를 변화시켜 가며 실험을 수행하였으며 KdV 방정식의 해는 모든 경우의 수심 조건에서 실험결과와 비교적 잘 일치하는 것을 보였다. Benjamin[4]은 두개의 층 중 하나 또는 모두가 무한히 펼쳐지는 경우의 경계면에서의 내부파를 해석을 하였다. Koop과

Butler는 Benjamin의 결과가 무한수심 문제에서의 파고와 파장의 관계를 제대로 나타내지 못하며, 유한수심의 경우에 적용될 수 있는 KdV 방정식도 파고와 파장의 관계를 제대로 나타내지 못하고 있다고 지적하였다. 이러한 문제점들은 각 방정식에 들어있는 길이 척도 때문이라고 설명된다. 특히 KdV 방정식은 각층의 두께가 작다는 가정을 안고 있다. Koop과 Butler는 KdV 방정식을 2차까지 확장하였지만 만족할 만한 결과를 얻지 못하였다. Miyata[5]는 질량과 운동량 보존식으로부터 내부파에 사용되는 지배방정식을 얻어 두개의 층 사이에서 아주 비선형성이 강한 내부파가 존재한다는 것을 보였으며, 정상상태의 고립파문제를 실험결과와 KdV 방정식의 결과와 비교하였다. Bukreev와 Gavrilov[6]는 파고와 전파속도와와의 관계에 대해 실험적 고찰을 하였다.

내부파 문제에 대한 기존의 연구는 주로 KdV 방정식과 Benjamin-Ono 방정식을 사용하였다. 그리고 대부분 파장과 전파속도에 대한 연구가 많이 수행되어 왔다. 이것은 두 방정식 모두 전파속도와 파고와의 관계가 선형적이기 때문이라 생각된다. 그러나 파고와 전파속도와와의 관계에 대한 연구는 비선형파의 특성 파악에 매우 중요한 자료를 제공한다는 것은 잘 알려진 바이다. 특히 내부고립파의 경우에는 그 특성 상 파고가 매우 커질 수 있기 때문에 이러한 파는 비선형적인 성질을 많이 나타낼 것으로 생각된다. 본 논문에서는 자유표면 문제에 적용되는 해밀턴원리를 사용하여 파고가 큰 경우에도 사용할 수 있는 방정식을 유도하고 그 결과를 이용하여 속도와 파고와의 관계, 파형 등을 KdV 방정식 및 기존의 실험결과와 비교하여 내부고립파의 특성들을 살펴보기로 한다.

## 2. 문제의 정식화

유체는 비점성 비압축성이고 유동은 2차원으로 가정한다. 그림 1에 주요 변수와 좌표계를 표시하였다.

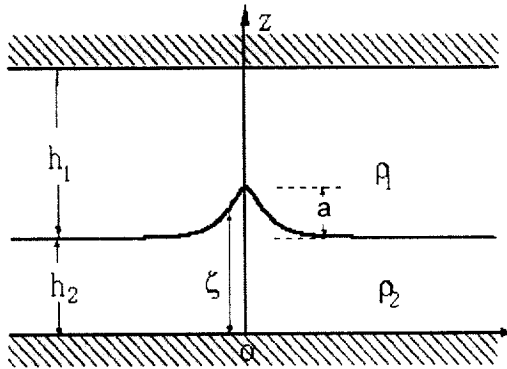


그림 1 좌표계의 정의

좌표계의 원점은 바닥에 위치하고 수직방향의 좌표  $z$ 는 위를 향한다.  $\rho_1$ 과  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ )는 각각 위층과 아래층의 유체의 밀도이고, 초기 교란이 없는 상태에서부터 운동이 시작되었다고 가정한다.  $h_1$ 과  $h_2$  ( $h_1 > h_2$ )는 각각 초기 평형 상태에서의 위 아래층의 두께를 나타낸다. 상하의 경계면은 고정되었다고 가정하며  $\zeta$ 는 바닥으로부터 측정된 표면과의 총 높이,  $a$ 는 파고이다. Bukreev와 Gavrilov는 실험을 통하여 위층의 두께가 아래층의 두께보다 2배 이상 큰 경우, 윗면이 자유표면인 것과 고정인 것과는 큰 차이가 없음을 보였으며, Koop과 Butler도 이러한 경향을 언급하였다. 이들의 결과로 미루어 볼 때, 본 논문에서 윗면을 고정이라 가정하여 얻어지는 지배방정식은  $h_1$ 이  $h_2$ 보다 2배 이상 큰 경우에는 윗면이 자유표면인 경우에도 적용될 수 있다고 생각된다.

### 2.1 계의 에너지

유체내의 운동에너지의 총합은 다음과 같이 주어진다.

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} T_d dx = \frac{1}{2} \rho_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\zeta} \vec{u} \cdot \vec{u} dz dx \quad (1)$$

$$+ \frac{1}{2} \rho_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\zeta}^H \vec{u} \cdot \vec{u} dz dx$$

여기서  $H=h_1+h_2$ 이다. 내부파에 의한 위치에너지

는 다음과 같이 주어진다.

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} V_d dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) g (\zeta - R)^2 dx \quad (2)$$

여기서  $R$ 은 정상상태의 문제에서 베르누이 상수를 정해주는 상수이다.

### 2.2 유량함수

2차원 문제에서는 유량함수(stream function)가 다음과 같이 정의된다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3)$$

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

이제 유량함수의 수직방향성분을 다음과 같이 전개하기로 한다.

$$\psi = \begin{cases} \sum_{m=1}^K \psi_{1m}(x) z^m, & 0 < z < \zeta \\ \sum_{m=1}^K \psi_{2m}(x) (z-H)^m + Q_H, & \zeta < z < H \end{cases} \quad (5)$$

여기서  $Q_H$ 는  $z=0$ 과  $z=H$  사이의 체적유량이다. 본 문제에서는  $z=\zeta$ 에서  $\psi = Q_2$ 로 정하기로 한다. 식(5)는 위아래의 경계면에서의 운동학적 경계조건을 만족하는 것을 볼 수 있다. 본 논문에서는  $K=1$ 을 택하기로 하는데, 이것은 식(5)에서 주어진 구조 중 가장 낮은 차수 즉 1차에 해당하는 것이다. 여기서 말하는 1차란 식(5)로 나타낸 계층구조 중 1차란 뜻이며 선형이라는 의미는 아니며 얻어진 식은 비선형 방정식이 된다. 식(5)와 같은 형태의 근사식을 사용하는 것은 변분원리에서 사용하는 시도함수(trial function)을 운동학적 경계조건

을 미리 만족하는 함수의 집합에서 사용하는 의미를 가진다. K=1로 선택하고  $Q_H$ 를 소거한 후 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\psi = \begin{cases} Q_2 + \frac{Q_2 h_1 (z - \xi)}{h_2 (H - \xi)}, & \xi < z < H \\ \frac{Q_2 z}{\xi} & 0 < z < \xi \end{cases} \quad (6)$$

### 2.3 Hamiltonian

식(6)과 식(3), (4)를 이용하여 식(1)의 적분을 수행하면 다음을 얻는다.

$$T_d = \frac{Q_2^2 (3 + \xi_x^2) (\rho_2 h_1 h_2^2 + h_2^3 \rho_2 + h_1^2 \rho_1 \xi - h_2^2 \rho_2 \xi)}{6 h_2^2 (h_1 + h_2 - \xi) \xi} \quad (7)$$

Lagrangian 밀도함수  $L^*$ 은 식(2)와 식(7)을 이용하여 표시할 수 있다.

$$L^* = T_d - V_d \quad (8)$$

$$= \frac{Q_2^2 (3 + \xi_x^2) (\rho_2 h_1 h_2^2 + h_2^3 \rho_2 + h_1^2 \rho_1 \xi - h_2^2 \rho_2 \xi)}{6 h_2^2 (h_1 + h_2 - \xi) \xi}$$

$$- \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) g (\xi - R)^2$$

여기서

$$R = h_2 + \frac{Q_2^2}{2 g h_2^3} \quad (9)$$

식(8)을 이용하여 Hamiltonian을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$H = \frac{Q_2^2 (\xi_x^2 - 3) (\rho_2 h_1 h_2^2 + h_2^3 \rho_2 + h_1^2 \rho_1 \xi - h_2^2 \rho_2 \xi)}{6 h_2^2 (h_1 + h_2 - \xi) \xi}$$

$$+ \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) g (\xi - R)^2 \quad (10)$$

이제 H를  $x = \infty$ 에서 계산해 보면 다음과 같이 된다.

$$H_\infty = \frac{Q_2^4 (\rho_2 - \rho_1)}{8 g h_2^4} - \frac{Q_2^2 (h_1^2 h_2 \rho_1 + h_1 h_2^2 \rho_2)}{2 h_1 h_2^3} \quad (11)$$

### 2.4 지배방정식

식(10)와 식(11)에서 다음과 같은 지배방정식을 얻을 수 있다. 이 식을 HPI 방정식이라고 부르기로 한다.

$$\xi_x^2 = \frac{3 (h_2 - \xi)^2 (A + B \xi + C \xi^2)}{Q_2^2 (h_1 h_2^2 \rho_2 + h_2^3 \rho_2 + h_1^2 \rho_1 \xi - h_2^2 \rho_2 \xi)} \quad (12)$$

여기서

$$A = Q_2^2 \rho_2 (h_1 + h_2)$$

$$B = (\rho_1 - \rho_2) (Q_2^2 + g h_1 h_2^2 + g h_2^3) \quad (13)$$

$$C = g h_2^2 (\rho_2 - \rho_1)$$

Miyata는 질량보존식과 운동량보존식 그리고 자유표면에서의 경계조건을 이용하여 근사적인 지배방정식을 얻었다. 본 논문에서 얻은 식(12)와 식(13)은 치환을 하면 Miyata의 방정식과 동일함을 볼 수 있었다. 그러나 Miyata의 유도과정은 필요시 고차로 확장할 수 없다.

$\rho_2$ ,  $g$  그리고  $h_2$ 를 기본변수로 하여 무차원화한 변수들은 아래와 같이 정의된다.

$$\xi = \frac{x}{h_2}, \quad Q = \frac{Q_2}{\sqrt{g h_2^3}}, \quad \epsilon = \frac{a}{h_2} \quad (14)$$

$$\eta = \frac{\zeta}{h_2}, \quad h = \frac{h_1}{h_2}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

무차원화된 지배방정식은 다음과 같다.

$$\eta_\xi^2 = \frac{3(\eta-1)^2(A'+B'\eta+C\eta^2)}{Q^2(1+h+\rho h^2\eta-\eta)} \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} A' &= Q^2(1+h) \\ B' &= (\rho-1)(1+Q^2+h) \\ C &= 1-\rho \end{aligned} \quad (16)$$

### 3. 파고와 전파속도와의 관계

오른쪽으로 진행하는 정상상태에서의 파를 생각해보면 오른쪽 상류에서는  $Q_2 = -c h_2$ , 여기서  $c$ 는 전파속도이다. 따라서 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$Q = -\frac{c}{\sqrt{gh_2}} = -F \quad (17)$$

여기서  $F$ 는 수심 프르드수(depth Froude number)가 된다.

식(15)에서 파고와 전파속도와의 관계식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$F = \sqrt{\frac{(1-\rho)(1+\varepsilon)(h-\varepsilon)}{\rho+h+(\rho-1)\varepsilon}} \quad (18)$$

또는

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(F^2+h-1) - \sqrt{(1-F^2-h)^2 - \frac{4F^2(1+h)}{1-\rho} + 4h} \quad (19)$$

식(18)은 2개의 수학적인 해를 가지는데, 그 중 하나는 크기가 유체층의 두께와 비교해 볼 때 타당성이 없어서 식(19)에서는 하나만 나타내었다.

KdV 방정식에서 얻는 파고와 속도와의 관계는 다음과 같다.

$$F = \sqrt{\frac{(1-\rho)h}{\rho+h}} \left[ 1 + \varepsilon \frac{\left(1 - \frac{\rho}{h^2}\right)}{2\left(1 + \frac{\rho}{h}\right)} \right] \quad (20)$$

$$\varepsilon = \frac{(h+\rho)}{(h-\rho)} \left[ F\sqrt{\frac{\rho+h}{(1-\rho)h}} - 1 \right] \quad (21)$$

식(18)과 식(20)에서 최소전파속도를 얻을 수 있다. 최소속도는 KdV 방정식과 HP1 방정식 모두 같은 값을 주며 다음 식으로 주어진다.

$$F_{\min} = \sqrt{\frac{(1-\rho)h}{\rho+h}} \quad (22)$$

HP1 방정식에서는 최소속도 뿐만 아니라 최대속도가 존재하며, 다음 식으로 주어진다.

$$F_{\max} = \frac{\sqrt{(1+h)(1-\rho)}}{1+\sqrt{\rho}} \quad (23)$$

### 4. 결과 및 고찰

Bukreev와 Gavrilov는 파고와 전파속도의 관계를 실험을 통하여 얻었다. 그들이 수행한 실험은  $h_2 = 1$  cm,  $h_1 = 2.15$  cm 그리고  $\rho = 0.8$ 이고, 물과 등유를 사용하면 이러한 밀도비를 얻을 수 있다. 실험에서는 파고  $\varepsilon$ 이 각각 0.30, 0.45에 대한 자료를 얻었다. 이 실험 결과와 식(18)과 식(20)의 결과를 표1에 나타내었다. 표1에서 본 논문에서 유도된 HP1방정식은 내부고립파의 속도와 파고와의 관계가 실험 결과와 매우 잘 일치하는 것을 볼

수 있다. 그러나 주어진 파고에서 KdV방정식은 실제 보다 속도를 빠르게 예측하는 것을 알 수 있다.

파고 $\epsilon$	Bukreev & Gavrilov 실험 $c$ (cm/s)	HP1 식(18) $c$ (cm/s)	KdV 식(20) $c$ (cm/s)
0.30	12.7	12.78	13.04
0.45	13.0	13.00	13.58

표1. 전파속도의 비교.  
 $\rho=0.8, h=2.15, h_2=1.0$  cm.

이러한 경향을 확인하기 위하여 그림2와 3에서는 표1의 실험 결과와 동일한 조건인  $h = 2.15$  그리고  $\rho = 0.8$ 인 경우, 속도와 파고와의 관계를 KdV 방정식과 HP1 방정식에 의한 결과를 표시하였다. 그림 2는 주어진 속도에 대한 파고를 나타낸 그림이다. 이것에서 우리는 모든 영역의 속도 분포에서 KdV방정식은 HP1방정식 보다 주어진 속도에서 적은 파고를 나타내고 있음을 볼 수 있다. 그리고 이러한 경향은 표1에서 나타낸 실험의 결과와 일치한다. 그림 3에서는 KdV 방정식은 주어진 파고에서 속도를 실제 보다 빠르게 예측하는 것을 볼 수 있다. 그림 3과 4에서 표1에 해당하는  $\epsilon = 0.30$  과 0.45에 해당하는 점들을 찾아 볼 수 있다. 그리고 그림 2와 3에서 HP1 방정식에 의한 결과는 앞에서 언급한 바와 같이 전파속도의 최대 값이 존재하는 것을 볼 수 있다. 그리고 최소 전파속도는 KdV방정식과 HP1방정식의 결과는 서로 일치하는 것을 확인할 수 있다.

그림4와 5에서는 각각 표1에서  $\epsilon = 0.30$  과 0.45에 해당하는 경우의 파형을 비교하였다. 이 그림에서 주어진 파고에서 KdV 방정식의 결과는 HP1 방정식의 결과보다 파형을 가파르게 주고 있는 것을 볼 수 있다. 이러한 결과는 앞에서 언급한 바와 같이 주어진 파고에서 KdV방정식에 의한

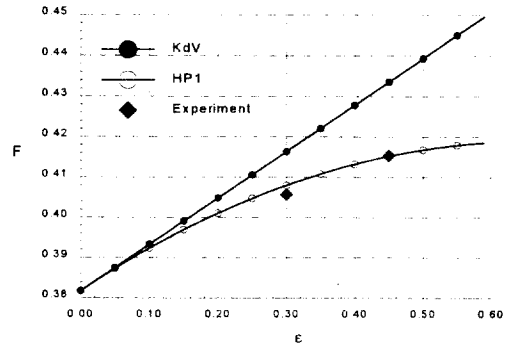


Fig. 2 Wave speed vs. wave amplitude.  $\rho=0.8, h = 2.15$ .

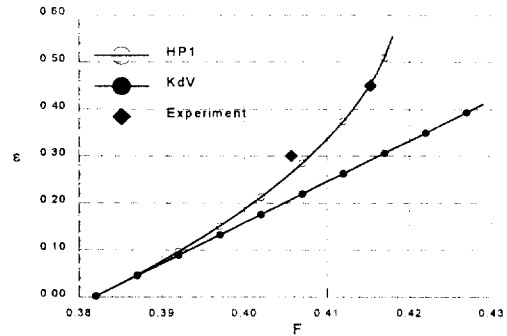


Fig. 3 Wave amplitude vs. wave speed.  $\rho=0.8, h = 2.15$ .

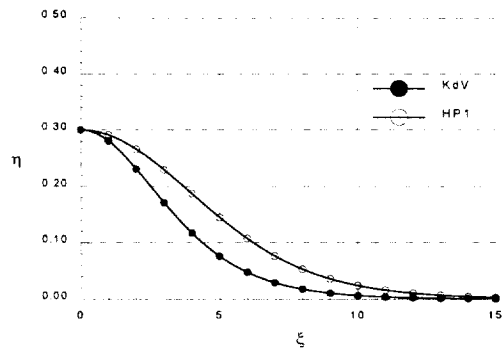


Fig. 4 Wave profile.  $\rho=0.8, h=2.15, \epsilon = 0.30$

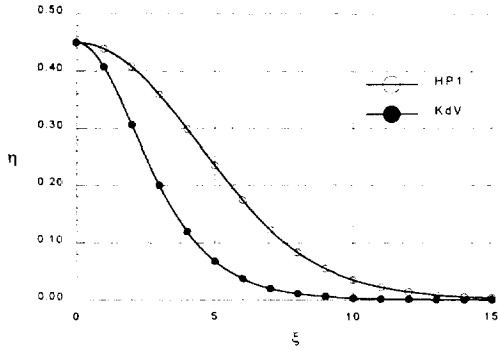


Fig. 5 Wave profile.  $\rho=0.8$ ,  $h=2.15$ ,  $\epsilon=0.45$

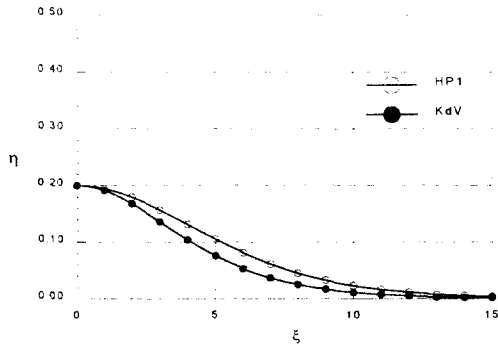


Fig. 6 Wave profile.  $\rho=0.8$ ,  $h=2.15$ ,  $\epsilon=0.20$

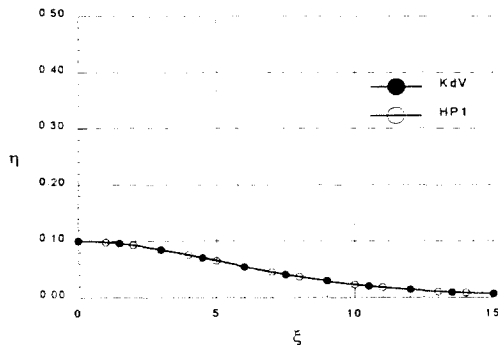


Fig. 7 Wave profile.  $\rho=0.8$ ,  $h=2.15$ ,  $\epsilon=0.10$

전파속도가 더 크기 때문이다. 그림 6과 7은 파고가 앞의 경우 보다 작은 경우의 파형을 비교한 것이다. 파형은 파정을 중심으로 대칭이므로 그림에는 반만 표시하였다. 이 결과에서 파고가 작아지

면 KdV방정식에 의한 결과와 HP1방정식에 의한 결과가 일치하는 것을 볼 수 있다.

그림 4 - 7에서는 파형 비교를 통하여 KdV방정식과 HP1방정식의 결과가 차이가 남을 볼 수 있다. 전파 속도의 경우는 Bukreev 와 Gavrilov의 실험에서 이론 결과를 실험으로 확인할 수 있었으나 이 실험에서는 파형이 주어지지 않은 관계로 파형을 이론과 실험간의 비교를 할 수 없었다.

Miyata의 실험에서는 전파속도에 관한 언급은 없었으나 파형은 주어졌다. 그의 실험에서는  $\rho = 0.9804$ 이며 다섯 가지의 깊이에 대하여 실험을 수행하였다. 그리고 실험 결과와 KdV 방정식, Benjamin-Ono 방정식, 그리고 HP1 방정식과 동일한 Miyata 방정식의 결과들과 비교하였다.

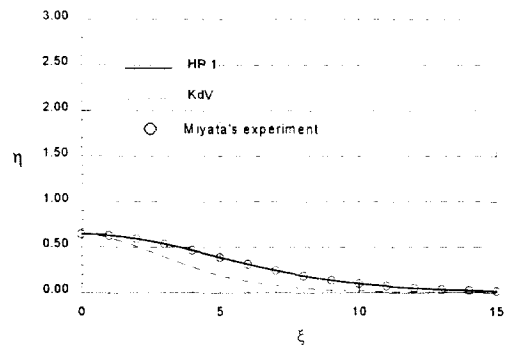


Fig. 8 Wave profile.  $\rho=0.9804$ ,  $h=7.153$ ,  $\epsilon=0.643$

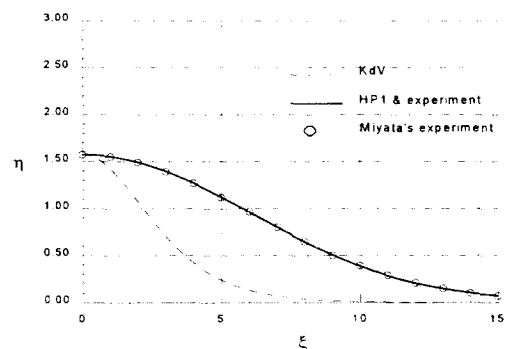


Fig. 9 Wave profile.  $\rho=0.9804$ ,  $h=10.714$ ,  $\epsilon=1.571$

그 결과 HP1 방정식의 결과가 실험 결과와 가장 잘 일치하는 것을 보였다. 다음 그림은 Miyata의 다섯 가지 경우 중 두 개의 경우를 표시한 것이다.

이 그림에서 HP1 방정식에 의하여 주어지는 파형은 실험과 매우 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 그리고 한 가지 언급할 것은 그림 8과 9의 실험 조건은 한 개의 층이 다른 층 보다 상당히 깊은 경우에 해당하며 그림 9는 한 개의 층이 무한수심 경우에 가까운 조건이 된다. Miyata는 Benjamin-Ono 방정식은 무한 수심의 경우에 적용이 되도록 유도되어진 식이지만 오히려 천수 경우에 적용되는 KdV 방정식보다 좋지 못한 결과를 준다는 것을 지적하였다. 그리고 HP1 방정식은 식 (6)에 의한 비교적 간단한 속도분포를 이용하였지만 폭 넓은 수심에 걸쳐서 좋은 결과를 주는 것을 볼 수 있다.

## 5. 결론

해밀턴원리를 두 개의 서로 다른 밀도를 가지는 비압축성 비점성 유체의 층 사이에서 발생하는 내부파 문제에 적용을 하여 지배방정식(HP1)을 얻었다. 비선형파의 특성 파악에 중요한 속도와 전파속도와의 관계에 대한 해석적인 식을 얻었다. HP1 방정식, KdV 방정식과 실험에서 얻은 전파속도를  $\varepsilon = 0.30$ 과  $0.45$ 인 경우에 비교한 결과 HP1 방정식에서 계산된 전파속도는 실험 결과와 잘 일치하였고 KdV 방정식을 이용한 결과는 다소 높은 값을 주는 것을 볼 수 있었다. 주어진 파고에 대하여 HP1 방정식과 KdV 방정식을 사용하여 전파속도를 비교한 결과 항상 KdV 방정식의 결과가 HP1 방정식의 결과 보다 모든 구간에서 큰 값을 주는 것을 볼 수 있었다. 만약 전파속도를 주어지고 파고의 크기를 계산한다면 그 경향은 반대가 된다.

KdV 방정식에서는 최소전파속도가 존재하며 이 값은 HP1 방정식의 결과와 일치한다. 그러나 KdV 방정식에서 볼 수 없었던 최대전파속도가 존재하는 것은 보였고 그 값은 두 층의 두께비  $h$ 와 밀도비  $\rho$ 의 함수로 주어졌다. 파형 비교를 통하여 HP1 방정식은 실험 결과와 잘 일치하는 것을 보였고 같은 크기의 파고인 경우 KdV 방정식에 의한 파형이 실험과 HP1 방정식에서 얻은 파형보다 가파른 결과를 주었다. 그리고 HP1 방정식은 여러 가지의 폭 넓은 두께비  $h$ 에 걸쳐서 사용될 수 있는 것을 볼 수 있었다.

## 참고 문헌

- [1] Osborne, A.R. and Burch, T.L. "Internal solitons in the Andaman sea," Science 208:451-460, 1980
- [2] Koop, C.G. and Butler G. "An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system," J. Fluid Mech. 112, pp. 225-251, 1981
- [3] Kao, T.W., Pan, F-S and Renouard, D. "Internal solitons on the pycnocline: generation, propagation, and shoaling and breaking over a slope," J. Fluid Mech. 159, pp. 19-53, 1985
- [4] Benjamin, T.B. "Internal waves of finite amplitude and permanent form," J. Fluid Mech. 29, pp. 559-592, 1967
- [5] Miyata, M. "Long internal waves of large amplitude," Nonlinear waves IUTAM, ed. K. Horikawa and H. Maruo, pp. 399-406, 1987
- [6] Bukreev V.I. and Gavrilov N.V. "An experimental study of internal solitary waves in a two-layer liquid," Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki, No. 5, pp. 51-56, 1983