

퍼지 Choquet적분을 이용한 다속성 의사결정문제의 최적 선호대안 결정

Finding the Mostly Preferred Solution for MADM Problems Using Fuzzy Choquet's Integral

조성구* · 이강인**

Sung Ku Cho* · Kang In Lee**

Abstract

The purpose of this paper is to propose an interactive method, using fuzzy Choquet's integral, which is designed to find out the mostly preferred solutions for deterministic MADM problems with many attributes and alternatives.

The basic idea of the paper is essentially the same as that of the one we have published before[1]; subgrouping of attributes and eliminating of inefficient solutions. But the difference between these two methods lies in the fact that the present method evaluates and eliminates alternatives using fuzzy Choquet's integral on the basis of decision-maker's judgements about the relative importance of subgroups of attributes, rather than using mathematical programming on the basis of pair-wise comparisons of alternatives. If such information is obtainable from the decision-maker, the method can be proved to be much easier to understand and more efficient to compute.

1. 서론

일반적으로 경영 및 공공의 의사결정문제에 있어서 의사결정자는 다양한 기준에 입각하여 최적 선호대안을 선택하게 된다. 이러한 문제는 자원의 제약으로 인하여 여러 기준간에 많은 상충요인이 발생하기 때문에 의사결정자에게 있어서 최선의 대안이 선택될 수 있도록 하기 위해서는 좀더 효율적인 분석과정을 필요로 한다[10].

이러한 다기준 의사결정(Multi-Criteria Decision-Mak-

ing;MCDM)문제는 실행가능한 대안의 수가 유한개이고 이산적인 경우에 다속성 의사결정(Multi-Attribute Decision-Making;MADM)문제로 귀착된다. 예를 들어, 어느 회사에서 최고경영자가 유연 생산시스템(Flexible Manufacturing Systems;FMS) 설비를 도입하기 위해 다음과 같은 여러 개의 그룹속성을 고려한다고 하자[9].

투자비용 : 기계구입, 팔레트(pallet)와 고정구(fixture),
공구와 소프트웨어(software)
생산능력 : 예비생산능력

* 동국대학교 산업공학과 교수

** 전주대학교 산업공학과 조교수

유연성 : 부품족(part family), 배치크기(batch size), 단위시간당 처리량, 경로(routing), 부품의 복잡성, 잠재성
경제적 위험 : 시장과 제품의 변화, 급속한 기술변화
여기서 부품족(part family)의 유연성을 향상(positive)시키기 위해서는 기계구입에 따르는 투자비용을 상승(negative)시켜야 하는 상충문제가 발생할 수 있을 것이다. 이러한 MADM문제에서는 다수 속성간의 상충문제가 적절히 상쇄되지 않으면 안된다. 또한, 이러한 문제에서 고려해야 할 대안과 속성의 수가 많아지면 많아질수록 문제해결을 더욱 복잡하게 할 것이다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 지금까지 연구·개발된 대부분의 접근방법에서는 속성간의 선호독립성을 가정하여 문제를 해결하고 있다. 그러나 위의 FMS설비도입 문제에 대하여 고려해야 할 여러 가지의 속성 중에서 기계구입비용, 팔레트(pallet)와 고정구(fixture)비용, 공구와 소프트웨어(software)비용에 대해서 이들 속성간에 선호독립성을 가정하여 문제를 해결한다는 것은 매우 비현실적이다[3,5,6,7].

이러한 MADM문제에서 최선의 의사결정이 되기 위해서는 궁극적으로 의사결정자가 의사결정의 주체로서 가장 만족스럽게 수용할 수 있는 대안을 선택하는 것이다. 즉, 복잡한 시스템의 구조와 불확실성이나 애매성을 내포하고 있는 의사결정상황에서 최선의 대안선택이 이루어지기 위해서는 의사결정자의 입장을 좀더 정확하게 반영할 수 있어야 한다[4,8,10].

이러한 측면에서 연구개발된 효용함수(Utility/Value Function;UVF)를 이용한 모형[1]에서는 주어진 대안간의 쌍비교(pair-wise comparisons) 결과를 이용하여 구한 효용함수값이 속성간의 교호작용(interaction)으로 발생하는 완전다항식(complete polynomial)형태임을 가정하여 L.P (Linear Programming)를 통해 UVF를 구하여 최적해일 가능성이 적은 대안을 점차적으로 제거하는 방법을 이용하고 있는데, 이것은 의사결정자가 의사결정의 전과정을 이해하기 약간 어렵다는 단점이 있다.

따라서 본 연구에서는 매우 많은 대안과 속성을 갖는 MADM상황에 대하여 전체 속성들 중 우선적으로 심하게 선호종속성(preferential dependence)이 존재하는 속성들을 몇 개의 그룹속성으로 분할하여 이들의 그룹간에는 최소한의 선호독립성(preferential independence)을 갖도록 하여 의사결정자가 중요하다고 생각하는 그룹부터 단계

적으로 고려해 가면서 대안의 수를 점차적으로 줄여나가 궁극적으로 최적해에 도달할 수 있는 보다 효율적인 퍼지 Choquet적분을 이용한 대화형 접근방법을 구축하고자 한다.

2. 기호 및 개념정의

본 연구에서는 퍼지 Choquet적분을 이용한 MADM문제의 대화형 접근방법을 개발하기 위하여 다음과 같이 기호를 정의하기로 한다.

n_0 : 원문제에서 고려할 전체 속성의 수

m_0 : 원문제에서 고려할 전체 대안의 수

a_i : 원문제의 i 대안 $i=1, \dots, m_0$

z : n_0 개의 전체 속성을 상호독립적인 소수의 그룹으로 분할했을 때의 그룹의 수

p : 단계를 의미하며 $p=1, 2, \dots, z \leq n_0$

n_p : 단계 p 에서 추가로 고려하는 속성의 수, $n_0 = n_1 + n_2 + \dots + n_z$

m_p : 전 단계에서 제거하고 남은 것으로 단계 p 에서의 실행 가능한 대안의 수

G_p : 단계 p 에서 고려하는 속성그룹으로 $G_p = \{c_{1p}^p, c_{2p}^p, \dots, c_{n_p}^p\}$, 단, $c_{jp}^p = G_p$ 의 j 속성 ($j=1, 2, \dots, n_p$)

A_0 : 원문제의 전체 대안들의 집합으로 $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_{m_0}\}$

A_p : 단계 p 에서 제거하고 남은 대안들의 집합으로 $A_p \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_z$

λ_p : 속성 그룹의 G_p 전체에 대한 가중치로 그룹의 순위는 중요도를 의미하기 때문에 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots, \lambda_z \geq 0$ 이

$$\text{고 } \sum_{p=1}^z \lambda_p = 1$$

x_{ij}' : 벡터 정규화(vector normalization)이전의 대안의 j 번째 a_i 속성에 대한 평가치로 x_{ij}' 의 값이 크면 클수록 좋은 경우로 가정, 여기서 ($i=1, 2, \dots, m_0, j=1, 2, \dots, n_0$)

x_{ij} : 각 속성에 대해서 x_{ij}' 를 벡터정규화한 값. $x_{ij} = x_{ij}' / (\text{Max}_j x_{ij}')$

$u_p(a_i)$: 대안 a_i 의 G_p 에 관한 UVF

$h_i(c_{jp}^p)$: 대안 a_i 에 대해 G_p 에 속한 속성들의 평가치 c_{jp}^p 를 내림차순으로 순서화했을 때의 j 번째의 속성값

$U_p(a_i)$: 단계 p 까지의 $u_i(a_i)$ 들에 그룹별 가중치 λ_p 를 곱

려한 값으로 $U_p(a_i) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot v_k(a_i)$. 즉, 전체 속성을 모두 고려한 대안 a_i 의 UVF $U(a_i) = U_i(a_i)$

a_i^p : 단계 p 까지의 최적 선호해(current optimal preferred solution)

x_i^p : a_i^p 의 단계 p 까지의 속성들에 대한 정규화된 평가치들의 벡터

C_p : 단계 p 에서 최적해를 보장하는 절단범위(cutting range)의 상한값

C_p' : 의사결정자가 조정한 절단범위의 상한값으로

$$C_p' \geq C_p$$

한편, 의사결정문제는 불확실성이나 애매성을 일반적으로 내포하고 있다. 이러한 의사결정문제에서 불확실성이나 애매성을 수많은 가정에 의해 회피하거나 배제하는 것은 의사결정문제의 본질을 왜곡시킬 수 있다. 따라서 이들을 문제의 내부에 적절히 반영하는 것이 본질적인 시스템공학의 목적을 위하여 필연적일 것이다. 즉, 현실적인 의사결정문제에서는 가중치의 부정확성, 문제구조의 불완전성, 의사결정자의 주관적 선호특성이나 일관성의 부족 등 때문에 가중치의 결정이 애매성(ambiguities)을 내포하는 퍼지환경하에서 이루어지고 있다.

1965년 자데(Lofu A. Zadeh)가 제시한 퍼지이론은 애매하게 표현된 현상의 불확실한 상태의 자료에 대해서 보다 명확한 분석결과를 얻을 수 있도록 하기 위한 것이다. 기존의 대부분 의사결정 방법들은 퍼지이론 측면에서 볼 때 속성 $c_j^p \in G, (j=1, 2, \dots, n_p)$ 에 대한 가중치 $w_j (\sum w_j = 1)$ 가 사전에 하나의 값으로 주어진 상황을 가정하여 문제해결을 시도하고 있다.

또한, 1994년 Ralescu[8]에 의하면 퍼지 Choquet적분을 이용함으로써 불확실성이나 애매성을 다룰 수 있다. 이것을 MADM문제에 적용시키는 경우 전체 대안들에 대한 UVF는 퍼지 Choquet적분을 이용하여 구할 수 있다. 이러한 퍼지 Choquet적분은 평가구조의 애매성을 갖는 퍼지최도상에서 적분을 수행함으로써 구할 수 있는데, 이것은 부분판단이나 부분평가의 결과로부터 특정의 함수값을 구할 수 있으며, 전체 대안의 평가를 위하여 퍼지최도 상을 갖는 가중치가 도입되는 경우에 의사결정자의 입장을 어느 정도 반영할 수 있으면서 문제해결을 간편하게 할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 여러 개의 대안과 속성을 갖는

MADM문제에서 우선 소수개의 종속적인 속성을 고려하여 의사결정을 하는 경우 이들 속성간의 중요도가 퍼지 종속관계로 인하여 선호대안을 쉽게 선정할 수 없는 퍼지환경하의 퍼지최도(fuzzy measure) $\nu: G \rightarrow [0, 1]$ 가 존재하여, 이들로부터 구한 UVF가 최대값을 갖는 대안을 선정할 수 있도록 하는 모형을 제시하고자 한다. 우선 퍼지최도에 관한 정의를 본 연구의 상황에 적용하여 보면 다음과 같다.

정의 2.1 : 퍼지최도

전체의 집합 $G = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 에 대하여 함수 $\nu: 2^G \rightarrow R^+$ 이 퍼지최도가 되기 위해서는 다음조건을 만족해야 한다. 즉,

$$\nu(\emptyset) = 0.0 \tag{1}$$

$$\forall C_i, C_j \subseteq G, C_i \subseteq C_j \Rightarrow \nu(C_i) \leq \nu(C_j), \text{ for } i \neq j \tag{2}$$

이다. 여기서 G 는 유한이고, $\nu(G) = 1$ 이다. 이때 퍼지최도에 관하여 퍼지 Choquet적분[8]을 다음의 정의에 의해 도입할 수 있을 것이다.

정의 2.2 : 퍼지 Choquet적분

함수 $h: G \rightarrow R$ 와 퍼지최도의 공간 (G, F, ν) 가 주어지면 퍼지최도 ν 에 관한 h 의 퍼지Choquet적분은

$$(c) \int^p h d\nu = \int_0^\infty \nu(x | h(x) \geq a) da \tag{3}$$

이다. 여기서 위의 퍼지 Choquet적분을 단계 $p(p=1, 2, \dots, z \leq n_p)$ 를 갖는 MADM문제에 적용시키면 다음과 같다. 우선 정규화된 의사결정행렬에서 대안 a_i 에 대하여 c_{ij}^p 를 내림차순(descending)으로 순서화한 a_{ij}^p 에 대하여

$$h(o_{i,1}^p) \geq h(o_{i,2}^p) \geq \dots \geq h(o_{i,n_p}^p) \text{와 } h(o_{i,n_p+1}^p) = 0.0 \tag{4}$$

의 조건을 만족할 때, $G_p = \{ o_{i,1}^p, o_{i,2}^p, \dots, o_{i,n_p}^p \}$ 이 이산적이고 유한이라면 n_p 개의 속성을 고려한 퍼지 Choquet적분은

$$(c) \int^p h d\nu = \sum_{j=1}^{n_p} \{ h(o_{ij}^p) - h(o_{i,j+1}^p) \} \cdot \nu(\{ o_{i,1}^p, o_{i,2}^p, \dots, o_{i,j}^p \}) \tag{5}$$

이 된다. 여기서 $\{h(o_{ij}^p) - h(o_{j+1}^p)\}$ 는 대안 a_i 에 대해 속성에 관하여 내림차순으로 순서화한 j 번째 값에서 $j+1$ 번째의 값을 뺀 것으로 이것은 0(zero)보다 크거나 최소한 같은 값을 가지며, 퍼지척도 $v(\cdot)$ 는 해당 속성들에 대하여 의사결정자가 주관을 가지고 평가한 애매성을 갖는 중요도 값이다. 즉, 단계 p 에 대하여

$$0 < v(o_{i_1}^p) < v(o_{i_2}^p) < \dots < v(o_{i_{n_p}}^p) = 1.00$$

의 관계를 갖기 때문에 가장 낮은 값을 갖는 $h(o_{i_{n_p}}^p)$ 는 다른 모든 속성에 공통요소로 작용하고 있기 때문에 모든 속성이 포함된 $v(n(o_{i_1}^p, o_{i_2}^p, \dots, o_{i_{n_p}}^p)) = 1.00$ 을 곱해주고 그 다음으로 낮은 값을 갖는 것과 가장 낮은 값을 갖는 것의 차 $h(o_{i_{n_p-1}}^p) - h(o_{i_{n_p}}^p)$ 에는 $v(o_{i_1}^p, o_{i_2}^p, \dots, o_{i_{n_p-1}}^p)$ 을 곱해주는 결과를 갖는다. 이러한 절차를 계속하여 가장 높은 값을 갖는 것과 그 다음으로 높은 값을 갖는 것의 차 즉, $h(o_{i_1}^p) - h(o_{i_2}^p)$ 에는 가장 중요한 속성 $v(o_{i_1}^p)$ 만을 고려하여 퍼지 Choquet적분값을 구하게 된다. 이러한 결과는 부분선형(piece-wise linearity)이 만족되기 때문에 주어진 속성의 수 $n_p \rightarrow \infty$ 가 되면 전체적 효용함수에 대하여 오목성질(concavity)을 만족한다고 할 수 있다.

따라서 이러한 퍼지 Choquet적분의 특성을 다속성 효용함수 측면에서 설명하면 다음과 같다. 단계 p 에서 대안 a_i 와 대안 $a_k(i \neq k)$ 에 의해 얻어지는 효용함수 $U_p(a_i)$ 에 대해 각 속성에 대한 평가값의 집합을 $\{c_{ij}^p \mid j=1, 2, \dots, n_p\}$ 이라면 $\{c_{kj}^p \mid j=1, 2, \dots, n_p\}$ 은 $R^{n_p} \in [0, 1]$ 상의 한 점이 될 때 다음의 성질을 만족한다.

- 1) 연속성 : 의사결정자의 효용함수 $U_p(a_i) : R^{n_p} \rightarrow R$ 가 연속적임을 의미한다.
- 2) 단조성 : 각각의 속성에 관한 평가값이 크면 클수록 전체의 $U_p(a_i)$ 가 커지는 성질을 의미한다. 즉,

$$\forall j \ c_{ij}^p \leq c_{kj}^p \Rightarrow U_p(c_{i_1}^p, c_{i_2}^p, \dots, c_{i_{n_p}}^p) \leq U_p(c_{k_1}^p, c_{k_2}^p, \dots, c_{k_{n_p}}^p) \quad (6)$$

$$U_p(0, 0, \dots, 0) = 0, U_p(1, 1, \dots, 1) = 1.00 \quad (7)$$

이다. 위의 1)과 2)는 부분 최적의 결과가 전체 최적이어야 함을 보장하기 위한 것으로 단조증가나 의사오목성질과 유사하다.

- 3) 평균연산자 : Zimmermann et al.[11]의 연구결과에

서 알 수 있는 바와 같이 퍼지 Choquet적분을 통하여 얻어지는 값은 각각의 속성에 대한 최대와 최소값의 범위 내에서 얻어지는 것이 타당하다. 따라서 효용함수는 다음을 만족할 필요가 있다.

$$\text{Min} \{ c_{i_1}^p, c_{i_2}^p, \dots, c_{i_{n_p}}^p \} \leq U_p \{ c_{i_1}^p, c_{i_2}^p, \dots, c_{i_{n_p}}^p \} \leq \text{Max} \{ c_{i_1}^p, c_{i_2}^p, \dots, c_{i_{n_p}}^p \}$$

- 4) Ralescue[8]에 의하면 퍼지 Choquet적분은 속성간에 종속성을 갖는 주관적인 평가구조와 가중치 등의 문제를 다룰 수 있다.

이러한 퍼지 Choquet적분은 균일 연속함수(uniform continuous function)이어서 위의 1)~3)이 만족된다. 더욱이 퍼지척도는 비가법적(nonadditive)이고 퍼지 Choquet적분에 의해 수행된 $U_p(a_i)$ 가 속성간의 독립(interselectively independent)만을 포함하고 있지 않기 때문에 속성의 종속정도를 설명가능하다는 것이다. 이러한 관점에서 속성간의 종속성이 존재하는 MADM문제 $x_{ij}(i=1, 2, \dots, m_p$ 이고 $j=1, 2, \dots, n_p)$ 에 대한 최적 선호대안을 퍼지 Choquet적분을 이용하여 좀더 효율적으로 구할 수 있을 것이다. 따라서 퍼지 Choquet적분을 이용한 MADM문제의 대화형 접근모형을 제시하기 위하여 다음과 같이 알고리즘을 구축하기로 한다.

3. 퍼지 Choquet적분을 이용한 알고리즘의 개발

3.1 알고리즘의 절차

본 연구의 퍼지 Choquet적분을 이용한 MADM문제해결을 위한 알고리즘을 흐름도 형태로 나타내면 다음의 그림 1과 같다.

3.2 알고리즘의 모형화

본 연구에서는 단계 p 에서 G_p 에 속한 m_p 개의 대안과 n_p 개의 속성을 갖는 MADM문제에 대해 부분 속성집합의 중요도를 의미하는 상대적 가중치가 선호종속성을 내포하는 값으로 표현되는 경우 퍼지 Choquet적분을 이용한 대화형 접근방법을 제시하기 위하여 다음과 같이 목적함수와 제약조건식을 제시하기로 한다.

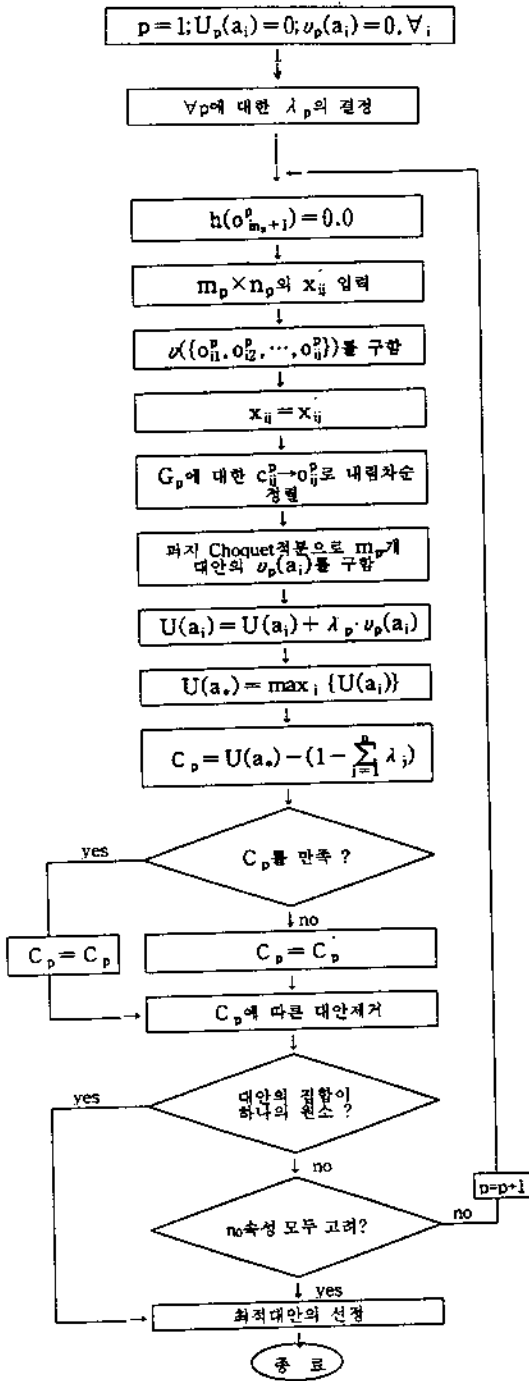


그림 1. 퍼지 Choquet적분을 이용한 알고리즘의 절차

$$\text{Max}_{v_i} U_p(a_i) = \lambda_p \left[\sum_{j=1}^{n_p} \{h(o_{ij}^p) - h(o_{i,j+1}^p)\} \cdot v(\{o_{i1}^p, o_{i2}^p, \dots, o_{in}^p\}) \right] \quad (8)$$

$$\text{s.t. } \{h(o_{ij}^p) - h(o_{i,j+1}^p)\} \geq 0, j=1, 2, \dots, n_p \quad (9)$$

$$v(\{o_{i1}^p, o_{i2}^p, \dots, o_{in}^p\}) \in [0, 1] \quad (10)$$

$$\{h(o_{i, n_p+1}^p)\} = 0.0, i=1, 2, \dots, m_p \quad (11)$$

$$\sum_{p=1}^{n_p} \lambda_p = 1.0, \lambda_p \in [0, 1], p=1, 2, \dots, z \leq n_p \quad (12)$$

위의 식 (8)은 단계 p까지의 각각의 대안에 대한 UVF의 최대화를 의미하는 것으로 이것은 그룹속성 G_p의 가중치 λ_p에 퍼지 Choquet적분으로부터 얻은 값 (c)^phdv를 곱하여 구할 수 있다. 여기서 {h(o_{ij}^p)-h(o_{i,j+1}^p)}는 내림차순으로 순서화한 j번째 값에서 j+1번째의 값을 뺀 것으로 이것은 0(zero)보다 크거나 같다. 또한, 퍼지적도 v({o_{i1}^p, o_{i2}^p, ..., o_{in}^p})은 의사결정자가 주관을 가지고 평가한 내림차순으로 순서화하기 이전의 해당 속성에 대한 중요도 값이다. 이때 전체 속성을 고려한 v({o_{i1}^p, o_{i2}^p, ..., o_{in}^p})=v(∅)=1.0이다. 한편, 식 (10)은 단계 p에서 고려하는 G_p내의 속성 j=1, 2, ..., n_p에 대하여 각각의 원소들을 고려한 중요도 값은 폐구간(closed interval) 0과 1사이의 값을 갖는다. 그리고 식 (11)은 주어진 n_p개의 속성을 고려하고 있으므로 n_p+1원소에 대해서 당연히 만족된다. 또한, 식 (12)는 속성그룹별 정규화된 가중치의 합이 1.0임을 의미하고, p(p=1, 2, ..., z ≤ n_p)는 유한단계를 거치면서 최종해에 도달하여야 함을 의미한다.

3.3 수치예

다음의 표 1은 본 연구에서 제시한 모형에 대한 타당성과 실행가능성을 검토하기 위하여 15개의 대안과 9개의 속성을 갖는 의사결정상황[1,2]을 나타낸 것이다. 여기서 어느 회사의 최고경영자가 유연 생산시스템(Flexible Manufacturing Systems;FMS) 설비를 도입하기 위해 다음과 같은 9개의 속성을 갖는 의사결정상황을 가정하기로 한다. 표 1에서 x_{ij}는 각 속성에 대해 x_{ij}'를 0(최저수준)부터 1(최고수준)까지 갖도록 벡터정규화(vector normalization)한 값으로, 이익의 속성이면 x_{ij}=x_{ij}'/Max x_{ij}'이고 비용의 속성이면 x_{ij}=(1/x_{ij}')/(Max 1/x_{ij}')의 관계를 갖는다. 따라서 이러한 벡터정규화된 x_{ij}값들은 망대특성(larger-is-better characteristic)을 갖는다.

한편, 표 1의 문제에 대해 효용함수(Utility/Value Function;UVF)를 이용한 모형[1]에서는 주어진 대안간의

표 1. 벡터정규화한 의사결정상황

대안 \ group 속성	G ₁			G ₂	G ₃		G ₄		G ₅
	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉
a ₁	0.127234	0.664627	0.820483	0.751802	0.855460	0.074747	0.524064	0.518223	0.113951
a ₂	0.113563	0.717635	0.612197	1.000000	0.343683	0.965656	1.000000	0.609339	0.600638
a ₃	0.705573	0.716615	0.852704	0.686920	0.486081	0.337373	0.000000	0.838268	0.578274
a ₄	0.447949	0.000000	0.883774	0.529351	0.603854	0.748484	0.708021	0.263097	0.494142
a ₅	0.135646	0.494393	0.000000	0.373841	0.611349	0.908080	0.310160	0.749430	1.000000
a ₆	0.399579	0.907237	0.918296	0.243048	0.345824	0.417171	0.454545	0.833712	0.233226
a ₇	0.231335	0.778797	0.785960	0.737384	1.000000	0.264646	0.552941	0.537585	0.252396
a ₈	0.508937	0.620795	0.203682	0.338825	0.262312	0.575757	0.868449	0.000000	0.000000
a ₉	0.000000	0.171253	1.000000	0.540679	0.998929	0.617171	0.593582	0.818906	0.463258
a ₁₀	0.107255	0.348623	0.969723	0.938208	0.485010	0.195959	0.879144	0.653758	0.904153
a ₁₁	0.119873	1.000000	0.669735	0.633367	0.744111	0.860606	0.408556	0.259681	0.071352
a ₁₂	0.371188	0.284403	0.673187	0.000000	0.186295	0.270270	0.549732	1.000000	0.441959
a ₁₃	1.000000	0.559633	0.410817	0.493305	0.702355	0.943434	0.391443	0.240318	0.467518
a ₁₄	0.944269	0.796126	0.332566	0.501544	0.000000	1.000000	0.922994	0.463553	0.775292
a ₁₅	0.623554	0.458715	0.822784	0.873326	0.376873	0.000000	0.439572	0.381548	0.425985

쌍비교(pair-wise comparisons) 결과를 이용하여 얻은 효율함수값이 속성간의 교호작용(interaction)으로 발생하는 완전다항식(complete polynomial)형태로 표현할 수 있음을 가정하여 LP(Linear Programming)를 통해 최적 선택해를 구한 결과는 a₃임을 수 있다.

여기서 G₁={c₁,c₂,c₃}={기계구입, 팔레트(pallet)와 고정구(fixture), 공구와 소프트웨어(software)}, G₂={c₄}={예비생산능력}, G₃={c₅,c₆}={부품족(part family), 배치크기(batch size)}, G₄={c₇,c₈}={단위시간당 처리량, 경로}, G₅={c₉}={부품의 복잡성}인 5개의 그룹으로 나눌 수 있고, (λ₁, λ₂, λ₃, λ₄, λ₅)=(0.6, 0.25, 0.10, 0.04, 0.01)와 C_p'=C_p를 가정하기로 한다. 우선 어느 의사결정자로부터 p=1에서 v({c₁})에 대하여

$$v(\{c_1\})=0.50, v(\{c_2\})=0.40, v(\{c_3\})=0.45, v(\{c_1,c_2\})=0.60,$$

$$v(\{c_1,c_3\})=0.70, v(\{c_2,c_3\})=0.80, v(\{c_1,c_2,c_3\})=v(G_1)=1.00$$

을 얻었다면 퍼지척도 v({a_p})는 퍼지 Choquet적분을 수행하기 위한 속성의 그룹 G={c₁,c₂,...,c₉}상에 집합이

된다. 여기서 $\sum_{j=1}^3 v(\{c_j\}) \neq 1$ 은 속성간의 종속정도가 반

영되기 때문이다. 즉, v({c₁})=0.50은 단계 p=1에서 전체 집합의 속성 v({c₁,c₂,c₃})=v(G₁)=1.00에 비해 부분 집합의 속성 c₁에 대하여 의사결정자가 상대적으로 느끼는 중요도로 볼 수 있다. 이것은 G₁={c₁,c₂,c₃}에 대하여 의사결정자가 c₁{기계구입}을 c₂{팔레트(pallet)와 고정구(fixture)}나 c₃{공구와 소프트웨어(software)}보다 중요하게 생각하고 있지만 c₁{팔레트와 고정구}과 c₁{공구와 소프트웨어}의 적절한 조화는 다른 경우 보다 더욱 중요하게 생각하고 있다는 것을 의미한다. 여기서 표 1의 의사

결정상황의 c_{ij}^p 를 내림차순(descending)으로 순서화하여 o_{ij}^p 원소를 갖는 의사결정상황에 단계 $p=1,2,3,4$ 에 걸쳐서 퍼지 Choquet적분은 적용시킨 결과는 다음의 표 2와 같다.

여기서 $p=1$ 일 때 $n_i=3$ 이고 $h(o_i)=0.0$ 이므로 대안 a_i 의 퍼지 Choquet적분값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (c_i)^1 hd v &= [h(o_i) - h(o_0)] \cdot v(\{o_i\}) + [h(o_i) - h(o_0)] \\ &\quad \cdot v(\{o_i, o_0\}) + [h(o_i) - h(o_0)] \cdot v(\{o_i, o_0, o_0\}) \\ &= [0.820483 - 0.664627] \cdot 0.45 + [0.664627 \\ &\quad - 0.127234] \cdot 0.6 + [0.127234 - 0.0] \cdot 1.0 \\ &= 0.519805 \end{aligned}$$

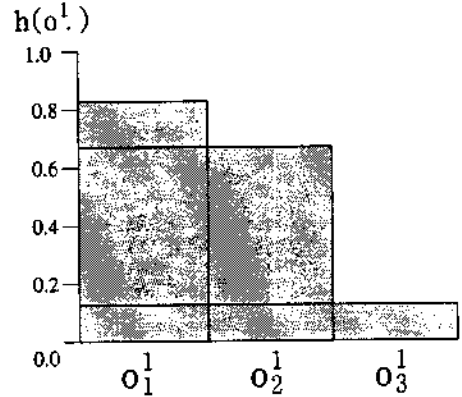


그림 2. $p=1$ 이고 $n_i=3$ 에 적용시킨 퍼지 Choquet적분의 의미

위의 퍼지적분이 의미하는 것은 다음의 그림 2를 통해 설명가능하다.

$$h(\{o_i\}) = 0.820483, h(\{o_i, o_0\}) = 0.664627, h(\{o_i, o_0, o_0\}) = 0.127234, h(o_i^1)$$

위의 그림 2에서 $v(\{c_i\})$ 에 대해 퍼지척도 $v(\{o_i^p\})$

는 퍼지 Choquet적분을 수행하기 위한 $G = \{c_i, c_i, \dots, c_{ip}\}$ 상에 집합이 된다. 그리고 $v(\{c_i, c_i, c_i\}) = v(G_i) = 1.00$ 이므로 $v(\{o_i, o_0, o_0\}) = v(G_i) = 1.00$ 임을 알 수 있는데, 이것은 내림차순으로 순서화하였기 때문에 최소값을 갖는 $h(\{o_i\})$ 가 $v(\{o_i, o_0, o_0\})$ 에 대해서 최소한 작용하기 때문에

표 2. 단계의 변화에 따른 UVF와 대안제거의 변화

구분	p=1			p=2			p=3			p=4		
	$(c_i)^1 hdv$	$U_i(a_i)$	대안 제거	$(c_i)^2 hdv$	$U_i(a_i)$	대안 제거	$(c_i)^3 hdv$	$U_i(a_i)$	대안 제거	$(c_i)^4 hdv$	$U_i(a_i)$	대안 제거
a_1	0.519805	0.311883		0.751802	0.499834		0.621246	0.561959	제거	-	-	-
a_2	0.504782	0.302869		1.000000	0.552869		0.654670	0.618336	제거	-	-	-
a_3	0.773438	0.464063	a_1	0.686920	0.635793	a_2	0.441469	0.679939	a_2	0.708271	0.708271	a_1
a_4	0.464890	0.278934		0.529351	0.411272	제거	-	-	-	-	-	-
a_5	0.238451	0.143071		0.373841	0.236531	제거	-	-	-	-	-	-
a_6	0.709151	0.425491		0.243048	0.486253		0.381498	0.524402	제거	-	-	-
a_7	0.563035	0.337821		0.737384	0.522167		0.779394	0.600106	제거	-	-	-
a_8	0.462104	0.277262		0.338825	0.361968	제거	-	-	-	-	-	-
a_9	0.475688	0.285413		0.540679	0.420583	제거	-	-	-	-	-	-
a_{10}	0.531571	0.318943		0.938208	0.553745		0.398295	0.593574	제거	-	-	-
a_{11}	0.636882	0.382129		0.633367	0.547971		0.802359	0.628207	제거	-	-	-
a_{12}	0.472374	0.283424		0.000000	0.283424	제거	-	-	-	-	-	-
a_{13}	0.735172	0.441103		0.493305	0.564429		0.822895	0.646719		0.346106	0.627908	제거
a_{14}	0.731130	0.438678		0.501544	0.564064		0.500000	0.614064	제거	-	-	-
a_{15}	0.647272	0.388363		0.873326	0.606695		0.188437	0.625539	제거	-	-	-

$u(\{ a_i, o_i, o_i \})$ 의 크기만큼을 전체 속성에 고려해 준 결과를 갖는다. 다음으로 $h(\{ o_i \})$ 와 $h(\{ a_i \})$ 의 차이에 대해서는 $u(\{ a_i, o_i \})$ 를 고려해 주고 $u(\{ a_i \})$ 과 $u(\{ o_i \})$ 의 차이에 대해서는 $u(\{ o_i \})$ 만을 고려해 주는 것으로 볼 수 있다.

따라서 이러한 퍼지 Choquet적분을 수행하여 얻어지는 UVF를 가지고 대안을 순서화할 수 있을 것이다. 또한, 이러한 MADM문제에 있어서 속성그룹의 순위는 중요도를 의미하기 때문에 절단범위(cutting range)의 개념을 이용하여 다음과 같이 대안을 순서화할 수 있을 것이다. 여기서 그룹간의 가중치는 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = (0.60, 0.25, 0.10, 0.04, 0.01)$ 이므로 단계 $p=1$ 에서 얻을 수 있는 대안 a_1 의 전체효용은

$$U_1(a_1) = \lambda_1 \cdot \left(\int_{C_1}^1 hd \right) u = 0.6 \times 0.519805 = 0.311833$$

이다. 위의 표 2를 통해서 알 수 있는 바와 같이 퍼지 Choquet적분을 이용한 선호순속모형에서 단계 $p=1$ 에 대한 현재의 최적 선호해는 $a_1^* = a_1$ 이어서 $x_1^* = [0.705573, 0.716615, 0.852704]$ 이다. 그리고 $U_1(a_1) = U_1(a_2) = 0.4640628$ 이고 $\lambda_2 = 0.6$ 이므로 $p=2$ 이후의 단계에서 얻을 수 있는 UVF값의 최대값은 0.4이어서 $C_2 = U_1(a_2) - 0.4 = 0.0640628$ 이므로 아직은 대안을 제거시킬 수 없다. 따라서 $A_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}\}$ 이다. 한편, 속성의 그룹간에는 가법성이 만족되는 상황이므로 단계 $p=2$ 에 대하여 G_2 가 하나의 원소 c_2 (생산능력)만을 갖기 때문에

$$U_2(a_1) = \lambda_1 \cdot \left(\int_{C_1}^1 hd \right) u + \lambda_2 \cdot \left(\int_{C_2}^2 hd \right) u$$

을 구할 수 있을 것이다. 따라서 C_2 를 이용해서 대안 a_1, a_2, a_3, a_4 와 a_{12} 를 제거시킬 수 있다. 즉, $A_3 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_{10}, a_{11}, a_{13}, a_{14}, a_{15}\}$ 이다. 현재의 최적 선호대안이 $a_1^* = a_1$ 이므로 $x_1^* = [0.705573, 0.716615, 0.852704, 0.686920]$ 이다. 다음으로 A_3 에 대해 $p=3$ 으로 하고 G_3 의 속성간의 종속관계를 고려하여 단계 $p=1$ 에서와 동일한 과정을 반복하게 된다. 여기서, 다시 의사결정자로부터

$$u(\{ c_1 \}) = 0.70, u(\{ c_2 \}) = 0.50, u(\{ c_1, c_2 \}) = u(G_3) = 1.00$$

을 얻었다면 c_1 (부품족(part family))을 c_2 (배치크기(batch size))보다 중요하게 생각하고 있음을 의미한다. 그러면 $U_3(a_1)$ 와 C_3 를 이용해 대안 $a_1, a_2, a_6, a_7, a_{10}, a_{11}, a_{14}$ 와 a_{15} 를 제거시킬 수 있기 때문에 $A_4 = \{a_1, a_{13}\}$ 을 구할 수 있다. 다시 $u(\{ c_1 \}) = 0.70, u(\{ c_2 \}) = 0.50, u(\{ c_1, c_2 \}) = u(G_4) = 1.00$ 을 얻었다면 c_1 (단위시간당 처리량)을 c_2 (경로)보다 중요하게 생각하는데, $U_4(a_1)$ 와 C_4 를 이용해서 $A_4 = \{a_1\}$ 을 구할 수 있다. 그리고 본 모형에서는 G_5 에 대하여 대안 a_{13} 이 대안 a_1 을 완전지배하는 경우라도 더 이상의 대안을 탐색할 필요가 없다. 따라서 퍼지 Choquet적분을 이용한 모형에서는 $p=4$ 에서 하나의 최적해를 제외한 모든 대안들이 제거되었으므로 $p=5$ 을 다시 고려하더라도 대안 a_1 이 최종의 최적 선호대안(final optimal preferred solution)이어서 $x_1^* = [0.705573, 0.716615, 0.852704, 0.686920, 0.486081, 0.337373, 0.000000, 0.838268, 0.578274]$ 임을 알 수 있다. 여기서 효용함수의 모형[1]을 통하여 구할 수 있는 최종의 최적 선호대안과 동일한 결과를 보인 것은 의사결정자로부터 각 단계를 거치면서 $u(\{ c^p \})$ 의 값에 영향을 받기 때문에 큰 의미는 없다.

그러나 본 연구에서와 같이 속성의 그룹간에는 선호독립관계를 갖지만 그룹내의 속성간에 선호종속관계를 갖는 보다 현실적인 MADM상황의 문제를 해결하고자 할 때, 속성별 중요도 $u(\{ c^p \})$ 를 의사결정자로부터 얻을 수 있는 경우 퍼지 Choquet적분을 이용하면 계산이 간편하고 의사결정자에게 요구하는 정보의 양을 대폭 줄일 수 있다는 잇점이 있다.

4. 결론

일반적으로 설비의 선택·평가 문제 등에서 접하게 되는 다속성 의사결정(Multi-Attribute Decision-Making; MADM)문제는 대안과 속성의 수가 매우 많은 것이 보통이기 때문에 이것들을 모두 합리적으로 고려하여 최적대안을 선정한다는 것은 많은 어려움이 따를 수 있다.

그러나 지금까지 연구·개발된 주요한 기법들 중 수리적 방법들은 주어진 문제에 대한 모형이나 선호구조에 제약을 가하여 최적해(optimal solution)를 구할 수 있지만 의사결정자의 입장을 거의 반영할 수 없으며, 이를 개선하기 위한 기존의 대화형 접근방법 역시 전체의 대안과

속성을 고려해야 하기 때문에 이들의 수가 많으면 많을 수록 쌍비교 등으로 발생하는 경우의 수가 기하급수적으로 많아져서 의사결정자가 제공해야 하는 정보의 양이 매우 많아진다는 어려움을 내포하고 있다. 또한, 대부분 속성간의 선호독립성(preferential independence)을 가정하고 있기 때문에 현실성이 부족하다.

이러한 측면에서 연구개발된 효용함수를 이용한 모형 [1]에서는 주어진 대안간의 쌍비교(pairwise comparisons) 결과를 L.P(Linear Programming)를 통해 UVF(Utility/Value Function)를 구하여 최적해일 가능성이 적은 대안을 점차적으로 제거하는 방법을 이용하고 있는데, 이것은 의사결정자가 의사결정의 전과정을 이해하기 약간 어렵다는 단점이 있다.

따라서, 본 연구에서는 이러한 기존의 여러 가지의 문제점을 좀더 현실적인 입장에서 보완하기 위하여 대안과 속성의 수가 매우 많은 MADM문제에 적용시켜 속성의 그룹화를 통해 최적해일 가능성이 적은 대안을 점차적으로 제거시킴으로써 의사결정자에게 도움을 줄 수 있는 퍼지 Choquet적분을 이용한 모형을 제시하였다.

본 연구에서 제시한 퍼지 Choquet적분모형과 효용함수를 이용한 모형[1]의 결과를 비교하여 볼 때, 동일한 문제에 대하여 일정한 단계를 거치면서 구해지는 절단범위(cutting range)는 전자가 큰 것을 알 수 있다. 이러한 결과는 최적해에 큰 영향을 주지 않으면서도 열등대안을 보다 일찍 제거시킬 수 있음을 의미한다. 그리고 의사결정자가 어느 정도 합리적인 범위에서 절단범위를 상향조정하여 빨리 해에 도달하고자 하는 경우에는 최적의 선호해에 큰 영향을 주지 않으면서 전체적인 계산량이나 요구정보량을 훨씬 더 줄일 수 있다.

그러나 본 연구에서 제시한 모형에 있어서 한계점 또한 없지 않다. 즉, 속성별 중요도도를 의미하는 부분집합의 중요도를 얻을 수 없는 경우에 문제해결을 어렵게 할 수 있다. 한편, 동일하게 주어지는 의사결정상황에 대하여 반복적인 의사결정에 참여하는 경우 의사결정자의 선호구조는 시간이 지남에 따라 변화가 있을 수 있다. 이러한 문제의 보다 심도있는 해결은 현실적인 의사결정이 되도록 하는데 앞으로 큰 몫을 할 것으로 생각한다.

참고문헌

- [1] 이 장인, 조 성구, "선호종속을 허용하는 다속성 의사결정문제의 대화형 접근방법", 한국경영과학회지, 제20권, 제2호, 1995, PP.61~76.
- [2] Barron, H., and Schmidt, C. P., "Sensitivity Analysis of Additive Multiattribute Value Models", *Operations Research*, Vol.36(1988), PP.122~127.
- [3] Carlsson, C., and Fuller, R., "Multiple Criteria Decision Making ; The Case for Interdependence", *Computer Operations Research*, Vol.22, No.3(1995), PP.251260
- [4] Kahneman, D., and Tversky, A., "Choices, Values, and Frames", *American Psychologist*, Vol.39, No.4 (1984), PP.341~350.
- [5] Mccord, M. R., and De Neufville, R., "Assessment Response Surface ; Investigating Utility Dependence on Probability", *Theory and Decision*, Vol.18(1985), PP. 263~285.
- [6] Mccord, M. R., and De Neufville R., "Utility Dependence on Probability ; An Empirical Demonstration", *Journal of Large Scale Systems*, Vol.6(1984), PP.91~103.
- [7] Olson, D. L., *Decision Aids for Selection Problems*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [8] Ralescu, A. L., *Applied Research in Fuzzy Technology*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [9] Stam, A., and Kuula, M., "Selecting a Flexible Manufacturing System using Multiple Criteria Analysis", *International Journal of Production Research*, Vol.29, No.4(1991), PP.803~820.
- [10] Zeleny, M., *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1982.
- [11] Zimmermann, H. J., *Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1987.