

● 연구 논문

동강성계수의 전달을 이용한 축계의 비틀림진동 해석

문덕홍*·최명수**·심재문***

Torsional Vibration Analysis of Shaft System Using Transfer Dynamic Stiffness Coefficient

D. H. Moon*, M. S. Choi** and J. M. Sim***

Key Words : Transfer Dynamic Stiffness Coefficient(전달동강성계수), Shaft System(축계), Torsional Vibration(비틀림진동), Finite Element Method(유한요소법)

Abstract

Recently, it is increased by degrees to construct complex and large structures. In general, in order to solve the dynamic problem of these structures they have used finite element method(FEM). In this method, however, it is necessary to prove whether its results are correct or not. Therefore it requires much effort, time and many expenses for dynamic analysis of complex and large structures.

Authors have developed the transfer dynamic stiffness coefficient method(TDSCM) which is the new vibration analysis method for complex and large structures on personal computer, and confirmed that the results of this method are good for these structures on personal computer.

In this paper, TDSCM is applied to the torsional vibration analysis for the shaft system which consist of concentrated disks and shafts of continuous body. First, we formulate algorithms for torsional free and forced vibration analysis, and compare the results of TDSCM and FEM.

1. 서 론

기계, 조선, 항공, 토목 등 분야를 막론하고, 구조물의 설계시에 가장 중요한 일은 구조물의 성

능, 강도 그리고 거동 등을 정확히 예측하는 일이다. 그러므로 강력하고 편리한 구조해석 기법의 개발과 이 기법을 바탕으로한 해석 소프트웨어의 개발은 대단히 중요하다.

* 부경대학교 제어기계공학과

** 부경대학교 대학원

*** 한국어선협회 부산지부

저자들은 퍼스널 컴퓨터에 적합한 진동해석 기법의 개발에 수년간 연구해 왔고¹⁻⁵⁾, 그 결과 최근 동강성계수의 축차 전달에 그 기본개념을 두고 있는 傳達動剛性係數法이라는 새로운 진동해석 기법을 개발하였다.

본 연구에서는 터빈, 선박의 축계, 차량의 동력 전달장치 그리고 펌프 등 공학분야에서 자주 볼 수 있는 회전축계를 해석대상으로하여 비틀림진동을 해석할 수 있는 자유진동 및 강제진동 해석 기법을 전달동강성계수법으로 정식화한다. 그리고 수치계산을 통하여 본 해석기법과 유한요소법의 계산 결과를 비교·검토하여, 본 해석기법의 신뢰성 및 유효성을 제시한다.

2. 전달동강성계수법에 의한 정식화

동강성계수의 축차전달을 기본개념으로 하는 전달동강성계수법을 이용하여, 축계의 비틀림 자유진동 및 강제진동을 해석할 수 있는 진동해석 기법을 정식화한다.

2.1 모델링

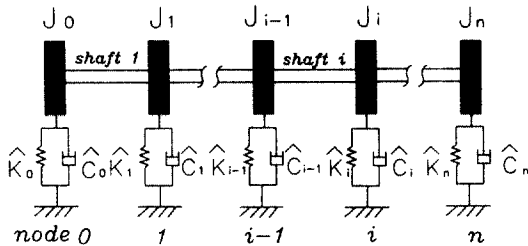


Fig. 1 Analytical model

일반적인 축계의 비틀림진동을 해석하기 위하여, 해석대상 구조물을 Fig. 1과 같이 모델링한다. 해석대상 구조물은 연속계로 모델링된 축(shaft)과 질량 극관성모멘트 J 를 갖는 집중 원판(disk) 그리고 스프링과 감쇠기로 구성된 기초지지요소(base support element)로 모델링한다.

경계조건은 좌단(시작단)과 우단(끝단)의 기초

지지 스프링으로 모델링한다. 예를들면 경계조건이 자유인 경우에는 스프링상수가 영이되고, 경계조건이 고정인 경우에는 스프링상수가 ∞ 가 된다.

본 연구에서 절점(node)이란系の좌단과 우단, 집중 원판과 기초지지요소가 존재하는 점, 강제 조화 토크가 작용하는 점으로서 해석상의 분할점이 된다. 그밖에도 연속계로 모델링된 축의 응답점도 절점으로 정할 수 있다. 그리고 각 절점을 좌단에서 우단까지 순차적으로 절점 0, 절점 1, ..., 절점 n 이라고 한다.

2.2 동강성계수와 토크 보정계수의 전달

Fig. 1과 같은 해석대상 구조물은 Fig. 2와 같은 부분계(subsystem)의 직렬 연결로 볼 수 있다. 전달과정을 쉽게 설명하기 위하여, i 번째 축과 i 번째 집중 원판과의 결합쪽을 i 번째 절점의 좌측이라 하고, i 번째 집중 원판과 $i+1$ 번째 축과의 결합쪽을 i 번째 절점의 우측이라 한다.

절점 i 의 좌우측에서 각변위 θ 와 토크 T 사이의 관계를 다음식과 같이 정의한다.

$$\bar{T}_i = \bar{S}_i \theta_i + \bar{E}_i \quad (1)$$

$$T_i = S_i \theta_i + E_i \quad (2)$$

여기서 \bar{S}_i, S_i 를 각각 절점 i 좌측과 우측의 동강성계수, \bar{E}_i, E_i 를 각각 절점 i 좌측과 우측의 토크 보정계수라 정의한다. 그리고 하첨자 i 는 i 번째 절점 또는 i 번째 축에 관한 물리량을 뜻하고,

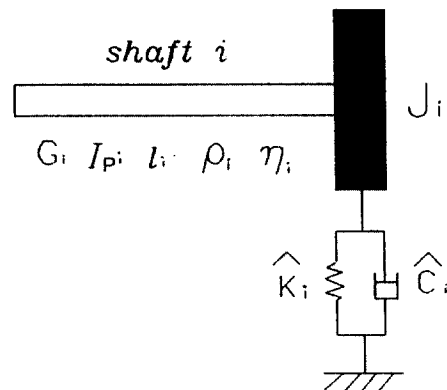


Fig. 2 Subsystem

상태변수 T, S, E 위에 $-$ 를 붙인 것은 절점 좌측의 상태량을 나타내고, 위에 아무것도 없는 것은 절점 우측의 상태량을 나타낸다.

연속계로 모델링된 i 번째 축의 좌우측, 즉, 절점 $i-1$ 의 우측과 절점 i 의 좌측 사이의 토크와 각변위 사이의 관계는 Doyle이 제안한 스펙트럴 유한요소(spectral finite element)의 개념을 도입하여, 다음 식과 같이 나타낼 수 있다⁶⁾.

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_i \\ T_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_{i-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 동강성계수 A_i, B_i, C_i, D_i 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{G I_p \beta_i}{l \sin \beta_i} \cos \beta_i = -D_i \\ B_i &= -\frac{G I_p \beta_i}{l \sin \beta_i} = -C_i \\ \beta_i &= l \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}}, \quad G' = G(1+j\eta) \end{aligned} \quad (4)$$

그리고 ω 는 각진동수, l 은 축의 길이, ρ 는 밀도, I_p 는 축의 극관성모멘트, G 는 횡탄성계수, η 는 구조감쇠계수, G' 는 복소 횡탄성계수이다. 축을 집중 질량계로 모델링할 경우에는 A_i, B_i, C_i, D_i 는 다음과 같은 강성계수가 된다.

$$\begin{aligned} A_i &= C_i = \bar{K}_i + j\omega \bar{C}_i \\ B_i &= D_i = -(\bar{K}_i + j\omega \bar{C}_i) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 \bar{K}_i 는 축의 비틀림 스프링상수이며, \bar{C}_i 는 축의 비틀림 점성감쇠계수이다.

i 번째 부분계의 좌측, 즉 절점 $i-1$ 우측의 동강성계수 S_{i-1} 과 토크 보정계수 E_{i-1} 을 이미 알고있다면, (1)과 (3) 그리고 (2)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식으로부터, 절점 i 좌측의 동강성계수 \bar{S}_i 와 토크 보정계수 \bar{E}_i 를 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{S}_i &= A_i + B_i V_i \\ \bar{E}_i &= -B_i E_{i-1} / H_i \end{aligned} \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} V_i &= C_i / H_i \\ H_i &= S_{i-1} - D_i \end{aligned} \quad (7)$$

이다.

절점 i 의 집중원판에 Q_i 인 강제 조화 토크(forced hamonic torque)가 작용할 경우, 절점 i 에서 토크의 평형식은 다음과 같다.

$$T_i = \bar{T}_i + P_i \theta_i - Q_i \quad (8)$$

여기서

$$P_i = \widehat{K}_i + j\widehat{C}_i \omega - J_{P_i} \omega^2 \quad (9)$$

이고, \widehat{K}_i 와 \widehat{C}_i 는 원판과 기초사이의 기초지 지 비틀림 스프링상수와 점성 감쇠계수이고, J_{P_i} 는 집중 원판의 질량 극관성모멘트이다.

식(1), (2)를 식(8)에 대입하여 정리하면, 절점 i 좌측의 동강성계수 \bar{S}_i 와 토크 보정계수 \bar{E}_i 로부터 절점 i 우측의 동강성계수 S_i 와 토크 보정계수 E_i 를 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} S_i &= \bar{S}_i + P_i \\ E_i &= \bar{E}_i - Q_i \end{aligned} \quad (10)$$

식(6)과 식(10)으로부터, 절점 $i-1$ 우측의 동강성계수 S_{i-1} 과 토크 보정계수 E_{i-1} 로부터 절점 i 우측의 동강성계수 S_i 와 토크 보정계수 E_i 를 구할 수 있는 i 번째 부분계의 전달식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} S_i &= A_i + B_i V_i + P_i \\ E_i &= -B_i E_{i-1} / H_i - Q_i \end{aligned} \quad (11)$$

시작단의 경계조건을 절점 0의 스프링으로 모델링하였으므로, 절점 0 좌측의 토크 \bar{T}_0 는 영이 된다. 따라서 절점 0에서 토크의 평형식 $T_0 = P_0\theta_0 - Q_0$ 과 식(1)의 i 에 0을 대입한 정의식으로부터 시작단의 동강성계수 S_0 와 토크 보정계수 E_0 를 다음식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} S_0 &= P_0 \\ E_0 &= -Q_0 \end{aligned} \quad (12)$$

따라서 식(12)를 시작으로 식(11)의 i 에 1, 2, ..., n 을 연속적으로 대입하면, 절점 1, 2, ..., n 의 동강성계수 및 토크 보정계수를 계산할 수 있다.

2.3 강제진동 해석

우단의 경계조건을 절점 n 의 기초지지 스프링으로 모델링하였으므로, 절점 n 우측의 토크 T_n 은 0이 된다. 그리고 절점 n 에서 $T_n = S_n\theta_n + E_n$ 이므로, 절점 n 의 각변위를 구할 수 있다.

$$\theta_n = -E_n/S_n \quad (13)$$

절점 0, 1, ..., $n-1$ 의 각변위는 식(2), (3) 및 식(7)로부터 다음식과 같이 우단에서 좌단으로 순차적으로 전달해가면서 계산할 수 있다.

$$\theta_{i-1} = V_i\theta_i - E_{i-1}/H_i \quad (14)$$

각 절점의 토크는 각변위를 계산한 후, 식(1), (2)로부터 계산할 수 있다.

2.4 자유진동 해석

자유진동만 해석할 경우에는 토크 보정계수의 정의 및 전달은 필요없고, 오직 동강성계수만 시작단에서 끝단으로 전달해 온 다음, 절점 n 에서 $T_n = 0$, $\theta_n \neq 0$ 이므로, 토크 보정계수를 제거한 식(2)로부터 다음식과 같은 진동수방정식을 구할 수 있다.

$$S_n = 0 \quad (15)$$

식(15)의 S_n 은 고유진동수 ω 의 함수이므로 이분법을 사용하여 고유진동수를 구할 수 있다. 그러나 실제 수치계산시에 식(15)로 고유진동수를 찾을 경우, 거짓근이 발생한다. 이는 좌단에서 우단으로 동강성계수를 전달해 오는 수치계산 과정에서 분모항에서 고유진동수의 함수인 $\sin\beta_i$ 와 H 가 0이 될 경우, S_n 에서 반대칭 극(pole)을 발생시키고, 그 결과 이분법으로 고유진동수를 찾을 때, 이러한 반대칭 극을 참근(고유진동수)으로 오인해버린다. 거짓근을 해소하기 위해서는 전달과정 중에 $\sin\beta_i$ 와 H 의 부호를 식(15)에 곱하면 된다. 따라서 실제 수치계산에서는 다음과 같은 식으로 고유진동수를 구한다.

$$Z = \left\{ \prod_{i=1}^n \text{sgn}(\sin\beta_n) \cdot \text{sgn}(H_i) \right\} \cdot \text{sgn}(S_n) \quad (16)$$

고유진동수를 계산한 후, 끝단의 각변위를 1로 한 후, 강제진동 해석과 동일하게 각 절점의 각변위를 우단에서 좌단으로 전달해 가면서 계산한다. 그리고 가장 큰 값을 1로 한 후, 정규화한다.

3. 수치계산 결과 및 고찰

전달동강성계수법으로 정식화한 진동해석기법을 PC상에서 MATLAB 언어로 프로그래밍한 후, 수치계산을 하였다. 그리고 유한요소법을 기반으로한 범용 구조해석 소프트웨어인 NISA II / DISPLAY3를 이용하여 동일 모델에 대해 계산한 후, 그 결과를 비교·검토한다.

3.1 고정-자유인 축의 비틀림진동

수치계산 모델 I (Fig. 3)은 경계조건이 고정-자유이고, 길이가 1 m, 직경이 10 mm인 鋼材(횡단성계수 7.923×10^{10} N/m², 밀도 7860 kg/m³) 중 실축이다.

수치계산 모델 I에 대하여, 유한요소법(FEM)에서는 수치모델을 각각 10개와 100개의 요소로 분할한 후, 좌단의 각변위에 구속조건을 주었다. 전달동강성계수법(TDSCM)에서는 좌단의 경계조

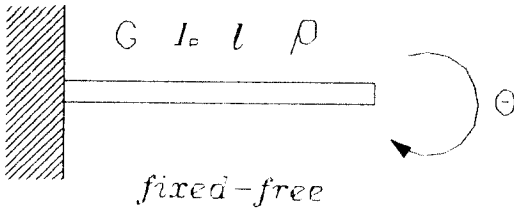


Fig. 3 Numerical model I

건이 고정이므로 절점 0의 기초지지 스프링의 값을 수치상의 ∞ 에 해당하는 $1.0E20$ 으로 계산하였고, 우단의 경계조건은 자유이므로 절점 n의 기초지지 스프링의 값을 0으로 계산하였다.

Table 1은 수치계산 모델 I에 대한 1차부터 5차까지의 고유진동수를 계산한 결과이다. 참고로 Table 1에서 ()내의 숫자는 유한요소법 해석시에 사용된 요소의 개수이다.

Table 1 Comparison of computation accuracy of natural frequencies for model I [Hz]

	FEM(10)	FEM(100)	Closed form solution	TDSCM
1	794.55	793.74	793.74	793.74
2	2403.3	2381.4	2381.2	2381.2
3	4071.3	3969.7	3968.7	3968.7
4	5838.4	5558.9	5556.1	5556.1
5	7741.5	7149.6	7143.6	7143.6

전달동강성계수법(TDSCM)의 계산결과는 엄밀해(Closed form solution)⁷⁾와 완전히 일치했다. 그리고 유한요소법(FEM)의 계산 결과는 자유도를 증가할수록 엄밀해와 일치한 본 해석기법의 계산 결과에 접근함을 확인했다. 전달동강성계수법이 연속체로 모델링된 반면, 이산체로 모델링된 유한요소법보다 계산 정도면에서 우수함을 확인할 수 있다. 한편, 고유진동수를 구하기 위해서, FEM(100)에서는 고유치문제를 풀기 위해 크기가 100×100 이나 되는 큰 행렬을 계산해야한다. 반면에 본 해석기법은 궁극적으로 진동수방정식에 사용되는 끝단의 동강성계수 S_n 의 크기가 절점의

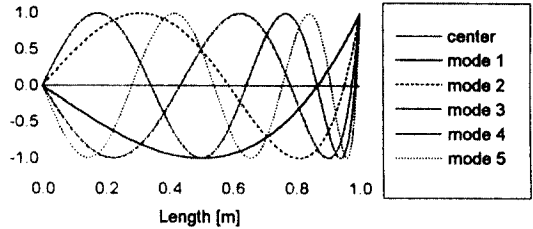


Fig. 4 Characteristic modes using TDSCM for model I

자유도수인 1이 된다. 따라서 계산 메모리 면에서도 본 해석기법이 유한요소법에 비해 퍼스널 컴퓨터에 적합한 해석기법임을 확인할 수 있다.

Fig. 4는 수치계산 모델 I에 대한 1차에서 5차까지 고유모드를 본 해석기법으로 계산한 결과이다.

수치모델 I의 우단에 가진주파수를 10Hz 간격으로 10Hz에서 5000Hz까지, 진폭 $1 \text{ N} \cdot \text{m}$ 의 강제 조화 토크를 가했을 때, 우단의 주파수응답을 본 해석기법으로 계산하였다. 그 결과 본 해석기법으로 계산한 Fig. 5의 공진점이 Table 1의 고유진동수와 잘 대응했다.

유한요소법과 본 해석기법의 주파수응답을 계산한 결과를 Table 2에서 비교하였다. 여기서 FEM은 Table 1에서 고유진동수의 계산 결과가 TDSCM의 결과와 비교적 잘 일치했던 FEM(100)의 고유모드를 이용하여 계산하였다. 참고로 Table 2에서 < >내의 숫자는 주파수응답을 계산하기 위해, 선택된 고유모드의 수이다. 유한요소

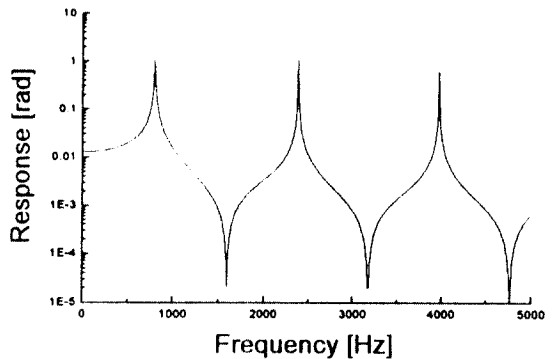


Fig. 5 Frequency response curve using TDSCM for model I

법으로 계산한 결과와 본 해석기법의 결과를 비교해 본 결과, 자유진동 해석시에 얻었던 고유치 해석 결과인 고유모드의 수가 많으면 많을수록 유한요소법의 계산 결과가 본 해석기법에 접근함을 알 수 있다.

Table 2 Comparison of computation accuracy of frequency response for model I [rad]

Freq.	FEM<10>	FEM<100>	TDSCM
10	1.2600E-02	1.2858E-02	1.2858E-02
100	1.2768E-02	1.3027E-02	1.3027E-02
200	1.3314E-02	1.3572E-02	1.3572E-02
300	1.4357E-02	1.4615E-02	1.4615E-02
400	1.6185E-02	1.6443E-02	1.6443E-02
500	1.9516E-02	1.9775E-02	1.9775E-02
600	2.6583E-02	2.6842E-02	2.6842E-02
700	4.9192E-02	4.9451E-02	4.9453E-02
800	6.5608E-01	6.5582E-01	6.5494E-01
900	3.4078E-02	3.3820E-02	3.3816E-02
1000	1.5281E-02	1.5022E-02	1.5021E-02

그러나 Table 1에서 이미 확인한 바와 같이 유한요소법에서는 고차로 갈수록 고유진동수나 고유모드의 정확도가 급속히 떨어지므로 주파수 응답곡선을 구할 때, 모드수를 무한정 증대시키는 것은 무의미하다. 따라서 적절한 모드수를 선정하는 것은 전문 구조해석 기술자가 아닌 일반 산업 현장 기술자에게는 상당히 어려운 문제이다. 단순히 분할수를 크게 늘려 계산하면, 고유치해석시에 고차의 정확한 고유진동수와 고유모드를 확보할

수도 있겠지만, 정확한 고유치해석은 과도한 자유도를 요구하므로, 계산비용면에서도 비경제적이다. 반면에 본 해석기법은 축 요소의 분할없이도 정확한 계산이 가능하므로 일반 산업현장 기술자에게 편리성과 경제성을 제공하리라 생각한다.

3.2 집중원판을 갖는 갖는 축계의 비틀림진동

수치계산 모델 II (Fig. 6)는 경계조건이 양단 자유이고, 길이가 200 mm, 직경이 10 mm인 鋼材 (항탄성계수 7.923×10^{10} N/m², 밀도 7860 kg/m³) 중실축이 5개 직렬연결되어 있고, 각 축의 결합점과 양단에 10^{-2} kg·m²의 질량 극관성모멘트를 갖는 집중원판이 존재한다. 그리고 모든 집중원판은 10^4 N·m·s/rad의 기초지치 비틀림 점성감쇠를 갖고 있다.

Table 3은 수치계산 모델 II에 대하여, 유한요소법과 전달동강성계수법으로 고유진동수를 계산한 결과이다. 유한요소법은 각 축을 20개의 요소로 분할하여 계산하였다. 두 방법의 계산 결과가 100 Hz 이하에서 잘 일치했다.

Table 3 Comparison of computation accuracy of natural frequencies for model II [Hz]

	FEM	TDSCM
1	-	-
2	16.246	16.246
3	31.386	31.386
3	44.386	44.386
4	54.362	54.362
5	60.634	60.634

구조물의 우단에 가진주파수를 1Hz 간격으로 1Hz에서 100Hz까지, 진폭 1 N·m의 강제 조화토크를 가했을 때, 우단의 주파수응답을 전달동강성계수법 및 유한요소법으로 계산하였다. 유한요소법은 고유치해석 결과인 1차부터 30차까지의 고유모드를 이용하여 계산하였다. 두 해석기법의 주파수 응답 계산 결과가 잘 일치하고 있다(Fig. 7 참조).

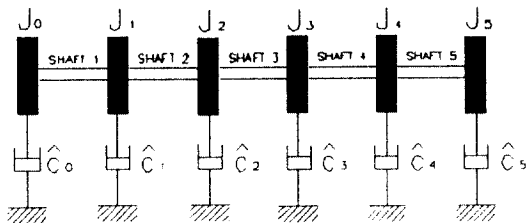


Fig. 6 Numerical model II

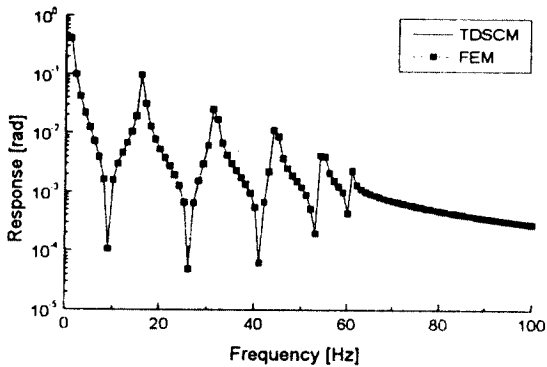


Fig. 7 Frequency response curves for model II

4. 결 론

회전축계를 대상으로 비틀림 자유진동 및 강제 진동을 해석할 수 있는 진동해석 알고리즘을 전달동강성계수법으로 정식화하였다.

수치계산 모델을 대상으로 전달동강성계수법, 유한요소법, 엄밀해의 수치계산 결과를 비교해본 결과, 본 해석 기법인 전달동강성계수법이 퍼스널 컴퓨터상에서도 신뢰성 있는 해석 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다. 그리고, 경계조건을 적절한 스프링상수의 대입으로도 쉽게 계산할 수 있고, 유한요소법과 같이 축을 해석적으로 분할하지 않고도 정확한 계산을 할 수 있으므로, 일반 산업 현장의 설계자들에게 상당히 편리한 해석기법임을 제시한다.

앞으로는 실제 선박 축계 및 자동차의 동력전달장치 등 실 구조물에 적용할 수 있는 해석기법 및 해석 소프트웨어의 개발에 노력을 기울일 예정이다.

참 고 문 헌

- 1) A. Sueoka, et al., "A Method of Vibrational Analysis using a Personal Computer - A Suggested Transfer Influence Coefficient Method", The Memoirs of the Faculty of Engineering Kyushu University, Vol. 48, No. 1, pp. 31~46, 1988
- 2) A. Sueoka, et al., "Free Vibration Analysis of a Multiple Straight Line Structure Regarded as a Discrete System by the Transfer Influence Coefficient Method", JSME International Journal Series III, Vol. 32, No. 1, pp. 10~18, 1989
- 3) 문덕홍외 3인, "傳達影響係數法에 의한 원판구조물의 自由振動解析", 대한기계학회논문집, 제15권, 제5호, pp. 1439~1446, 1991
- 4) 문덕홍, 여동준, "傳達影響係數法에 의한 사각형 평판구조물의 자유진동해석", 대한기계학회논문집, 제17권, 제3호, pp. 559~567, 1993
- 5) 문덕홍, 여동준, 최명수, "다관절 보의 진동해석 알고리즘의 개발에 관한 연구", 한국박용기관학회지, 제18권, 제5호, pp. 544~553, 1994
- 6) J. F. Doyle, "A Spectrally Formulated Finite Element for Longitudinal Wave Propagation", Int. J. of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 3, No. 1, pp. 1~5, 1988
- 7) Daniel J. Inman, "Engineering Vibration", Prentice Hall, pp. 323~329, 1994