산술에서 대수로의 이행 과정에서 나타나는 장애에 관한 연구

송 영 무 (순천대)
양 두 례 (순천남산중)

I. 서 론

초등학교 수학에서의 학습내용은 중학교 수학에서 대부분 연속성을 유지하면서 지도되고 있지만 몇가지 측면에서는 산술적인 사고가 중학교 수학을 학습하는데 있어서 유용하지 못한 경우가 있다. 어떤 경우에는, 초등학교 수학의 문제해결 방법이 중학교 수학의 학습 과정에서 오히려 장애 요인으로 작용하는 경우도 있음을 볼 수 있다. 이러한 현상은 대부분 대수과정에서 요구되어지는 문자사용의 다양성을 이해하지 못한데서 연유된다.

산술과 대수는 여러 가지 기호나 부호를 공유하고 있다. 그래서 산술과 대수 사이에는 연속성이 있는 것 같은데 이러한 기호나 부호에 주어지는 해석이 산술과 대수에서 다르게 나타난다.[1]

대수와 산술간에 유사하게 보이는 또 다른 것이 있는데 그것은 문자의 존재이다. 그러나 대수에서는 산술에서와 같은 형태의 문자식을 사용하지만 그 의미가 달라질 수 있다. 이러한 사실들은 산술과 대수 사이의 불연속성을 인정해야 하는 이유가 된다.

학생들은 산술에서 경험한 능력과 산술에서 획득한 개념들을 그대로 대수학습에 가져오게 된다. 그러나 이런 개념들은 대수에서 요구하는 조건에 대처하기 위해서 확장되거나 수정되어야만 한다. 즉, 초등학교 산술에서 학습했던 방법이나 기호들을 그대로 사용해서 표현할 수 없는 측면이 대수에 존재한다. 이런 상황을 잘 이해하지 못한 상태에서 학생들은 당황하게 되고 이것은 대수학습을 하는데 있어서 학생들에게 종종 장애를 유발한다. 산술과 대수를 매끄럽게 연결해 주는 과도기 학습이 필요한 이유가 여기에 있다. 이러한 과도기 학습을 흔히 대수준비학습(Prealgebra)[2]이라고 하는데,

---

1) Kieran C., 1992, The Learning and Teaching of School Algebra: A project of NCTM, p.393.

Prealgebra를 보는 관점으로 다음 두 가지가 있다. 하나는 Prealgebra를 산술과 대수의 경계에 놓여 있어서 산술이나 대수와는 구별되는 중간 과정으로 보는 관점이며, 다른 하나는 대수학습 도입 단계에서 나타나는 오개념을 치유하는 과정으로 보는 관점이다.

본 논문의 목적은, Prealgebra의 두 번째 관점에서, 산술에서 대수로의 이행 과정에서 학생들에게 나타나는 몇가지 장애[3]에 대한 원인을 분석해 보고 그러한 장애 요인을 해소할 수 있는 지도방법을 제시하고자 한다. 또한 이러한 지도 방법에 대해 어떤 결과가 나타나는가를 알아보기 위해서 실험반과 비교반을 각각 한 학급씩 선정해서 지도 후에 사후 학력 성취도 검사를 시행해 그 결과를 분석해 본다.

Ⅱ. 산술과 대수의 비교

1. 산술과 대수 영역의 특성

산술과 대수는 모두 절차적인 면을 가지고 있으나, 산술 과정에서는 구체적인 수를 계산하여 답을 얻는 절차만을 강조하는 반면, 대수에서는 형식화된 문자와 식을 다루는 구조적인 면을 더 중요시한다.

산술을 가르치면서 답만을 유도하도록 하는 절차적인 접근은 학생들의 사고가 구조적으로 진행되는데 어려움을 느끼게 한다. 대수의 도입 부분에서 문자식의 문자에 수를 대입하여 식의 값을 구한다거나, 방정식의 x에 주어진 집합의 원소를 대입하여 등식이 참이 될 때까지 반복하는 것 등은 대수적인 구조가 아닌 절차적인 면이 강조되는 문제 해결 방법이다. 그런데 절차의 숙달만으로는 구조적인 지식을 완전하게 습득할 수 없으므로 산술과 대수 학습에서는 절차적인 면과 구조적인 면이 동시에 다루어져야 하고 특히, 대수 준비 학습 과정에서는 절차적인 면으로부터 구조적인 면으로의 전이 과정이 충분히 지도되어야 한다. 많은 연구에서 대수를 배우는 학생들은 절차적인 설명과 개념에 초점을 둔 교수 의미를 이해하는 것이 구조적인 표현에 근거한 교수의 의미를 이해하는 것 보다 훨씬 쉽다고 생각하는 것으로 밝혀졌다.[4]

---

2) Carolyn Kieran and Louise Chalouh는 prealgebra를 학생들이 알고 있는 산술로부터 대수개념을 구성할 수 있는 수학 학습 영역이라고 생각했다.

3) 선행 연구자들의 연구 결과로부터 일곱 가지의 장애 유형을 추출함.

4) Kieran C., 1990, Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra, Mathematics and Cognition, p.112.

한편, 대수 학습에 있어서 인식론적 장애는 많은 연구에서 다루어졌다. 여기에서 고려되어야 할 한 부분으로 절차적인 성질과 관계적인 성질을 들 수 있다. Arzarello는 대수적 사고는 이 두 양극성(double polarity)의 영향을 많이 받는다고 주장한다. 대수적 사고의 도입과 전개에 관련하여 이들 특징은 다음과 같이 설명될 수 있다.

절차적인 성질은 비대칭이며, 우선되는 방향을 가지고 엄격한 의미상의 통제를 요구한 반면, 관계적인 성질은 논리적이고 동치인 규칙에 의해 지배되며, 전형적으로 대칭적이며 구문론적이다. 절차적인 면에서 지배적인 인식론적 유형은 산술적인 유형이다. 여기서 대수적인 사고의 전형적인 특징은 압축(condensation)인데 이것은 기호코드(symbolic code)를 사용하여 어떤 대상에 대한 많은 정보를 간결하고 의미심장하게 표현한다. 그 대상의 복잡한 성질은 산술의 축약된 언어로는 쉽게 통제될 수 없다. 압축은 절차적인 순간으로부터 더 추상적이고 관계적인 순간으로 이행되는 것을 나타낸다.

중등학교에서부터 대학까지 많은 학생들이 대수적 문제를 '상징적인 기호 체계'보다는 '중략된 체계'에 의해 푼다는 것은 잘 알려진 사실이다. 이러한 결과를 낳은 원인은 대수의 진정한 관계적 측면보다도 산술에서의 절차와 적당하게 타협된 형태로 대수지도가 이루어지고 있음을 반영하는 것이다. 학생들의 사고에는 산술에서와 같은 절차적인 성질을 가진 다른 대체물을 가지고 좀 더 쉽게 문제를 해결하려고 하는 산술적 체계가 자리잡고 있는데, 이것은 대수적인 사고 유형과의 갈등을 야기하는 주된 요인으로 작용한다.

따라서 대수에서는 문제의 답만을 요구하는 절차적인 면에 초점을 두는 것보다 문제에서 요구하는 과정을 유도하여 답을 이끌어내도록 하는 등의 과정을 거쳐 관계를 상세히 표현하는 일의 필요성을 인식하도록 해야 한다. 이러한 일반적인 관계를 결정하는 데 초점을 두는 것이 대수 학습에서 요구되어져야 할 부분이다.

한편, Sfard는 추상수학의 개념을 두 가지 기본적으로 상이한 개념인 조작적인 개념(as processes)과 구조적인 개념(as object)으로 구분하였다. Sfard는 대부분의 사람들이 새로운 수학적 개념을 습득하는 첫단계를 조작적인 개념으로 보았는데 이 때 조작의 목적은 조작하는 과정 그 자체로 생각된다. 이처럼 개념을 과정으로 보는 것에서 더 나아가 하나의 대상으로 보는 전이는 빨리 일어나지 않으며, 쉽게 일어나지도 않는다. 이것은 대수의 학습에서도 마찬가지로 그것이 완전히 연결되었을 때만이 두 가지 개념이 수학적 활동에서 중요한 역할을 수행할 수 있다. 여기서 과정에 초점을 두는 조작적인 면은 산술학습과 관련을 맺을 수 있으며, 반면에 조작을 하나의 대상으로 보

고 다루는 것은 대수의 구조적인 면과 연관시킬 수 있다. 조작적 측면과 구조적 측면을 산술에서 대수로의 이행 과정 측면에서 살펴보면, 산술은 본래 조작적인 측면이 강조되는 만큼 수가 수학적인 대상으로서 다루어지는 것이다. 그러나 대수에서 기호적인 표현은 반드시 특정한 문제를 해결하기 위한 과정일 필요는 없고 그 자체가 대상으로 다루어진다.

학생들이 대수식을 처음 배울 때 그것을 어떤 수에 대한 조작으로서 오랫동안 해석하지 말고, 가능하면 빨리 더 높은 수준의 과정(조작)이 수행되는 대상으로서 바라볼 수 있어야 한다. 즉, 조작되는 대상은 수라기 보다는 대수식이라는 것을 곧 깨달아야만 한다. 이 과정에서 수행되는 조작은 문자식을 간단히 하기, 인수분해, 분모유리화, 미분하기 등등이다. Tall은 어떤 학생이 대수식을 과정이라기 보다는 하나의 수학적인 대상으로 생각할 수 있을 때까지 대수적인 조작은 갈등의 원인이 될 수 있다고 말한다.[5]

2. 산술과 대수의 불연속성

방정식, 함수, 문자식의 조작 등 대수를 접하면서 학생들이 문제 상황으로부터 적절한 관계를 추출해 내고, 그 관계를 대수적인 기호주의에 입각하여 표현할 때 이러한 것들은 선행된 산술 학습에 관한 연속성과 불연속성의 요소들을 함께 수반한다. 산술과 대수의 불연속성에 관한 몇 가지 사항들을 살펴보면 다음과 같다.

먼저, 산술과 대수는 여러 가지 기호나 부호를 공유하지만 초등학교 산수과정에서 학습했던 방법이나 기호의 의미를 대수에서 그대로 사용하여 표현할 수 없는 측면이 존재한다. 예를 들면, 산술에서 등호는 대칭 관계나 추이관계를 표현한다기 보다는 대개는 어떤 결과를 알리는 즉 답을 구하라는 기호로 사용된다.

예를 들어, "영희는 할머니 댁에 놀러가서 할머니에게 150원을 받았다. 그리고 나서 320원을 주고 공책을 샀는데 230원이 남았다. 할머니 댁에 가기 전에 영희는 얼마를 가지고 있었는가?"라는 문제를 보고 초등학교 6학년 학생들은 종종 230 + 320 = 550 - 150 = 400 이라는 답을 쓴다. 여기서 등호의 대칭 관계와 추이 관계는 깨져버린 것이다.

대수와 산술간에 유사하게 보이는 또 다른 것은 문자의 존재이다. 예를 들면, 산술에서 5m는 5미터를, 즉 1m의 5배를 의미하는데 반해, 대수에서는 m의 5배를 의미할

5) Kieran C., 1992, The Learning and Teaching of School Algebra, In Handbook of Research on mathematics Teaching and learning : A project of NCTM, p.393.

수도 있으므로 문맥에 따라, m은 두 가지 의미를 갖는다.

이처럼 산술에서 경험한 것을 대수학습에 그대로 이용했을 때 산술에서의 방법이나 기호들을 사용하여 표현할 수 없는 측면이 대수에 존재한다. 이런 불연속성 중의 또 다른 하나는 직관적으로 해결해 왔던 문제에 대해서 해결하는 방법을 형식적으로 표현해야하는 것이다. 그러나 학생들은 종종 산술에서 대수로 확장될 수 없는 비형식적인 방법을 사용하는데 이러한 비형식적인 방법을 Booth는 다음과 같이 설명한다.

◉직관적인 지식에 근거한 방법 : 체계적이지 않고 어떤 일반적인 틀 안에서 일관성 있게 검토되지도 않는다.

◉원시(원초)적인 즉, 초기의 수학적 경험에 완전히 묶여있는 방법

◉특정 문제의 특징들에 의해 유도되는 방법

◉약간 형식적이거나 또는 거의 형식적이지 않는 기호화된 방법

◉거의 대부분이 세기, 더하기, 연결하기의 조작에 근거한 방법

◉정수나 자연수의 체계 내에서만 적용되는 방법

그래서 대수를 접하는 학생들은 산술에서는 풀이 과정을 분명하게 나타내지 않았기 때문에 대수적으로 풀이 방법을 표현하는데 어려움을 겪고 있으며, 그들이 사용하는 절차들은 종종 기호화하기 힘든 비형식적인 방법으로 나타난다.

또한, 문장제에서 나타나는 연산과정의 차이에서도, 산술에서 대수로의 불연속적인 면은 나타난다. 산술에서는 연산을 문제를 풀기위한 것(원상 복구 연산, Undoing)으로 생각하나, 대수에서는 문제를 푸는 것보다는 문제 상황을 표현하는 것(순서적 연산, Forward)을 우선으로 한다. 그 예로 다음 문제를 들 수 있다.6)

① 3에 어떤 수의 5배 한 것을 더하면 그 합이 40이다. 어떤 수는?

② 청바지 값이 33950원에서 39950원으로 올랐다. 얼마나 올랐는가?

위의 두 문제를 풀기 위한 연산 방법을 사고구조에 따라 다음과 같이 분류해 볼 수 있다.

---

6) C.Kieran, L.Chalouh, 1993, "Prealgebra: Transition from Arithmetic to Algebra", in *Research Ideas for the Classroom -Middle Grades Mathematics-*, Macmillan Publishing Company, NCTM, pp.181-182.

〈표 1〉 연산 방법

구분	산술적 사고구조에 의한 연산 (원상복구 연산,Undoing)	대수적 사고구조에 의한 연산 (순서적 연산, Forward)
1	□ = (40 - 3) ÷ 5	3 + 5x = 40
2	39950 - 33950 = □	33950 + x = 39950

학생들은 방정식을 세우기 위해서 산술에서의 사고와는 정반대되는 방법을 생각해야만 한다. 즉, 직관적으로 문제를 풀던 방법의 역이 되는 연산을 표현하는 것을 학습해야만 한다. 따라서, 학생들은 문제를 먼저 이해하고 나서 그것을 대수 기호로 변환해야 하며 대수적 표현과 기호가 의미하는 것에 대한 이해가 선행되어야 한다.

이와 같이 학생들이 대수 학습에서 어려움을 느끼는 요인중에서 상당부분은 산술에서 습득한 능력과 개념을, 산술과 대수에서의 개념 차이를 이해하지 못한 상태로, 그대로 대수 학습에 적용하는데서 비롯된다고 볼 수 있다. 따라서 대수에서 필요로 하는 조건에 대처하기 위해서 산술적인 능력과 개념은 확장되거나 수정되어야만 한다.

3. 대수 학습에서의 장애에 대한 제 견해

대수의 가장 명백한 특징은 문자 사용과 기호 표기법, 규칙의 도입 그리고 그의 조작과 표현의 간결화에 있다. 그러나 초등교육 단계에서 학생들은 주로 수개념, 수의 계산, 수의 표현 등과 같은 산술 문제들을 주로 학습하므로 대수 학습 과정에 접어들면서 다음과 같은 두 가지 어려움에 직면하게 된다.

첫째는 대수 과정의 새로운 내용을 학습하는 동안 그 전에 배운 수의 문제에 어떻게 대수식을 적용시키는가 하는 것이고, 둘째는 수의 문제와 대수의 문제간의 차이를 어떻게 정확하게 구분하는가에 관한 것이다.

이 문제에 대해서 좀 더 구체적으로 살펴보자. 먼저, 대수 학습의 중요한 위치를 차지하고 있는 대수식을 처음 배우기 시작하는 학생들은 학습 내용과 인지적인 발달단계에 있어서 전환기에 있다. 즉, 학습내용에 있어서는 수로부터 문자로의 전환기에 있고 인지적인 발달 단계에 있어서는 구체적인 조작 단계에서 형식적인 조작 단계로의 전환기에 있다. 따라서, 대수 학습을 시작하는 학생들에게는 오히려 산술적인 경험이 대수적인 표현을 하는데 있어서 어려움을 느끼게 하는 요인이 되기도 한다. 예를 들어, 다음의 경우를 생각해 보자.

대수식은 3a, x+1, x-y처럼 변수를 포함하고 있는 어떤 연산의 표현이다. 이처럼, 대수에서는 수체계와 문자 체계라는 서로 다른 두 가지의 기호 체계를 사용하기 때문에

기호를 생략하여 간편하게 사용할 수 있지만, 연산 기호의 축약으로 다양한 규약들을 내면화하므로 학생들은 여기에서 당황하게 되고 산술 규약과 대수 규약이 대수에서 모두 사용되기 때문에 더욱 어려움을 느낀다.

또한, 산술에서 2+3이란 표현은 과정(process)을 의미하고 그것을 행한 결과로 5라는 답을 얻는다. 그러나 대수에서는 "x에 3을 더하라"는 문제가 제시되었을 때 x+3은 과정을 나타낼 뿐만 아니라 답이 되기도 한다. 그러나 학생들은 'x+3', 'x-7', '3x' 등을 답으로 인식하는데 어려움을 느낀다.

Davis는 이런 어려움을 "이름—과정 딜레마(name-process dilemma)"라고 하고 Matz는 "과정—산물 딜레마(process-product dilemma)라고 했다.

Davis와 Matz는 또한 학생들이 변수의 계산을 할 줄 모른다는 것이며 그 이유는 변수가 무슨 수를 나타내고 있는지 모르고 있기 때문이라는 것이다. 그들은 또한, 학생들이 변수의 계산을 하기 위해서는 그 연산의 개념을 이해하고 답이 숫자이어야 한다는 산술적인 인식을 수정해야 한다고 보았다.

한편, Kevin Collis에 의하면, 학생들은 대수적인 표현을 다소 불완전한 것으로 여긴다. 예를 들면, 학생들은 연산에서 두 수가 그 연산의 결과에 의해 어떤 수로 대치되길 원하는데 대수에서의 x+7과 3x 같은 표현은 제3의 수로 대치될 수 없고 그러한 이유로 그들은 이 두 식을 "완결되지 않은 것"으로 생각한다는 것이다. 이와 관계해서 Collis는 연산을 행하지않고 받아들이는 능력을 "완전성 결여의 수용(acceptance of lack of closure)"이라고 했다. 이는 x+7 등의 대수식을 답으로 받아들이는 능력을 말한다.

다음으로 등호에 대해서 생각해 보자. 학생들이 형식적인 대수 과정에 들어가기 이전과정에서 방정식을 다룰 때, 산술에서의 등호 개념은 방정식과 대수식 사이의 구조적인 차이점에 대한 이해를 방해하기도 한다. 학생들은 산술에서 답을 구하는 과정을 많이 다루게 되면서 등호를 등식을 나타내는 표현이라고 여기기보다는 답을 구하라는 일종의 연산 기호로 여기는 것 같다. 대수에서 등호는 대수식을 간단히 할 때는 여전히 답을 쓰라고 하는 기호로 사용되지만 방정식을 풀 때의 등호는 관계를 나타내는 기호가 된다. 그런데 학생들은 대수식을 간단히 하는 것과 방정식을 푸는 것 사이에서 혼란을 느낀다. 즉, 방정식을 대수식으로 생각해서 계산하는 경우가 있는가 하면 대수식을 간단히 할 때 자신이 써 내려간 식을 방정식으로 보고 그것을 풀어서 x항이 모두 소거가 되는 경우, x가 어떻게 된 것인지에 대해 의문을 품게 된다.

하지만 이러한 장애들이 학생들에게 반드시 나쁜 것만은 아닌 것 같다. 왜냐하면, 이러한 장애들이 학습에 대한 중요한 자극이 될 수 있기 때문이다. 따라서, 학생들이 학습해 나가는 과정에서 겪게되는 갈등의 원인을 찾아서 그것을 해소할 수 있는 적절한 지도 방법을 모색해 보는 것은 상당히 의미있는 일이라 생각한다.

본 논문은 이러한 관점을 바탕으로 산술에서 대수로의 이행 과정에서 학생들에게 나타나는 장애의 구체적인 유형을 알아보고 각 유형에 대한 나름대로의 지도 방법을 제시해 보고자 한다.

Ⅲ. 사전 산수과 학력검사 실시와 결과 분석

1. 검사실시와 실험집단 선정

사전 산수과 학력검사는 1996년 3월 15일 7교시에 본 연구자가 담당한 5개 학급을 대상으로 45분 동안 동시에 실시하였으며, 검사 결과 학급 평균이 중간이면서 서로 비슷한 두 학급을 선정해서, 산수과 학력에 대한 동질성 여부를 검증하기 위해 평균차에 대한 t-검정을 실시하였다.[7] t-검정 결과는 다음과 같다.

〈표 2〉 사전 산수과 학력 검사 결과

TTEST PROCEDURE

GROUP	N	Mean	Std Dev	Std Error	Minimum	Maximum
실험반	45	63.77777778	17.04657909	2.54115397	18.0	95.0
비교반	45	64.33333333	19.29908147	2.87693720	24.0	97.0

Variances	T	DF	Prob>|T|
Unequal	-0.1447	86.7	0.8853
Equal	-0.1447	88.0	0.8853

For H0: Variances are equal, F' = 1.28 DF = (44,44) Prob>F' = 0.4136

두 집단간의 평균차에 대한 t-검정 결과, P 〈 0.05 수준에서 의의 있는 차가 나타

7) 연구 실행기간 중에 전출·입한 학생은 제외하였다.

나지 않아 두 집단은 동질 집단임을 확인하였다.

2. 사전검사에 의한 오류요인 분석

1) 방정식에 대한 오류

초등학교에서 방정식은 미지수가 하나인 것을 주로 다루며, 그 풀이 방법으로는 등식의 성질을 주로 활용한다. 그 결과를 살펴보면, 해를 구하지 못한 학생은 실험반 8명 비교반 7명밖에 안되지만 많은 학생들이 풀이과정을 쓰지않았거나, 풀이과정을 구조적인 절차와 적절한 표현이 없이 답만 구한 학생이 많았다.

2) 문장제에 대한 오류

비교적 쉬운 문제여서인지 풀이 과정을 적절하게 표현하지 않고, 답을 구한 학생들이 많았다. 즉, 각 문제마다 답을 구하지 못한 학생보다는 식을 세우지 못하거나, 풀이 과정을 제대로 쓰지 못한 학생이 많았다.

또한, 식을 세우는데 있어서는 대부분 학생들이 순서적 연산 방법을 사용하였지만 몇몇 학생들은 여전히 원상복구식 방법을 사용하였으며 문장제에 대한 문제 장면의 구성 경험이 부족하였다. 문장제 해결에 있어서 문장을 바르게 해독하고, 문제에 맞추어 정확한 식을 세울 수 있다면 문장제 해결 능력은 향상된다고 본다.

Ⅳ. 산술에서 대수로의 이행 과정에서 나타나는 장애의 유형 및 유형별 지도 방법

1. 장애 유형 분류

산술에서 대수로의 이행 과정에서 나타나는 인지적, 언어적, 개념적 장애를 선행 연구 결과와 사전검사를 토대로하여 그 유형을 분류해 보면 다음과 같다.

①대수를 시작하는 단계에서 대수적인 표현의 의미를 정확히 알지 못함.

②수의 표현 형식과 대수식의 표현 형식을 이해하지 못하고 구분하지 못함.

③다른 문자가 같은 값을 가질 수 있음을 이해하지 못함.

④문자의 연산을 할 줄 모르고 대수적인 표현을 다소 불완전한 것으로 여김.

⑤산술에서 이미 배운 규칙들을 수정하지 않고 그대로 대수식에 적용시키며, 자연 언어에 대한 이해와 기호 체계 사이에서의 인지적 갈등을 일으킴.

⑥대수식을 간단히 하는 것과 방정식을 풀이하는 것 사이에 혼란이 있음.

⑦문장제에서 대수식으로의 전이가 어려우며, 문제 해결력이 부족함.

2. 장애 유형별 지도 방법

1)장애 유형 ①에 대한 지도 방법

〈표 3〉 [장애 유형 ①]

장애 유형	대수를 시작하는 단계에서 대수적인 표현의 의미를 정확하게 알지 못함.
내 용	대수를 시작하는 단계에서 총체적인 결함을 갖고 있는 경우를 말하며, 이 과정에서의 장애는 여러 가지 영역에서 어려움을 낳는 직접적인 원인이 된다고 할 수 있다. 즉, 학생들은 대수 도입 단계에서 ×나 ÷ 등의 기호를 생략하거나, 이것들을 표현하는 과정에서 어려움을 느낀다. 대수 도입 단계에서의 이러한 어려움이 해소되지 않은 상태에서 보다 형식적인 대수 과정에 놓이게 되면 학생들은 대수 개념에 대한 이해를 상실할 수 있다.

〈지도 방법〉

이 유형에 대해서는 학생들이 문자를 자연스럽게 접하고, 문자 사용의 의의를 생각해 볼 수 있도록 '수 알아 맞추기 게임'을 해보았다. 이를 테면, 학생들에게 다음 내용에 따라 계산해 보게 했다.

「하나의 수를 생각하라. 그 수에 3을 더하고, 그것을 2배 한다음, 거기서 4를 뺀다. 이것을 다시 2로 나누고, 거기서 처음 생각한 수를 뺀다. 」

그런 후에 계산 결과가 모두 '1'이 나왔을 거라고 말하자 학생들은 놀란 표정으로 '무슨 속임수가 있지 않을까' 하고 궁금해 했다. 이러한 게임을 몇 번 더 해보고나서 어떻게 쉽게 알 수 있었는지 말할 수 있는 학생은 발표를 해보게 했더니 어설프게나마 문자를 사용해서 설명할 수 있는 학생이 있었다. 그런 후에 다음과 같이 그림을 이용해 설명하고 문자를 사용해 표현해 보임으로써 대수적인 표현에 익숙해지도록 하였다.

하나의 수를 생각하라.	■	n
그 수에 3을 더하고,	■ △△△	n+3
그것을 2배 한다음,	■■△△△△△△	2(n+3)=2n+6
거기서 4를 뺀다.	■■△△	2n+6-4=2n+2
이것을 다시 2로 나누고,	■△	(2n+2) ÷2=n+1
거기서 처음 생각한 수를 뺀다.	△	n+1-n = 1

그런 후에 다른 '수 알아맞추기 게임'들을 그림 기호나 문자식을 사용하여 왜 그런 결과가 되는지 설명해 보게 했다.

또한, $a\times b\div c\times d=\frac{ab}{cd}$, $a\div b\times c=\frac{a}{bc}$ 등과 같이 ×기호를 먼저 생략하고 ÷기호를 생략하는 잘못을 범하는 경우가 있다. 이 경우, 기호를 생략하는 방법은 수를 계

산할 때와 같은 순서로 해야함을 구체적인 수를 계산해서 보여주고 나눗셈 계산은 곱셈으로 바꿔준 다음에 ×기호를 생략해야 된다는 것을 설명하였다. 따라서 문자식에서 ×,÷ 기호가 섞여있을 때 ×,÷ 기호는 차례대로 생략해 감을 강조했다.

2)장애 유형 ②에 대한 지도 방법

〈표 4〉 [장애 유형 ②]

장애 유형	수의 표현 형식과 대수식의 표현 형식을 이해하지 못하고 구분하지 못함.
내 용	학생들에게 대수식 3a를 제시할 경우 학생들은 이 식이 표현하는 의미를 산술에서 학습했던 수 개념과 혼란을 일으키게 된다. 즉 그들은 수에서 35가 3×10+5를 의미하는 것처럼, 3a를 3×10+a로 이해하는 경우가 있다. 이러한 오류는 십진법의 기수법에서와 같이 3을 10의 자리수, a를 1의 자리수로 받아들이면서 비롯된다.

〈지도 방법〉

수의 표현에 있어서 십진법의 의미를 확실히 설명해 준다. 즉, 숫자가 나란히 써 있을 경우(예를 들면 32=30+2)는 십진법의 두자리 자연수를 의미하지만 3a는 a+a+a를 간단히 계산한 3×a에서 '×기호'를 생략하여 쓴 것임을 설명한다.

또한 학생들은 가끔 십의 자리가 3, 일의 자리가 a 인 두자리의 자연수를 3a로 나타내는 경우가 있는데 이 경우는 3×10+a=30+a로 표현해야 함을 이해시킨다.

3)장애 유형 ③에 대한 지도 방법

〈표 5〉 [장애 유형 ③]

장애 유형	다른 문자가 같은 값을 가질 수 있음을 이해하지 못함.
내 용	많은 학생들은 문자가 다르면 그것이 나타내고 있는 값도 항상 다른 것으로 알고 있다. Murray의 연구 결과를 인용해 보자. L+M+N = L+P+N이라는 식이 주어졌다. 학생들에게 이 식에서 등호가 성립하는 것이 옳은 지의 여부를 조사한 결과는 다음과 같다. ①M=P인 경우는 항상 성립한다. - 25% ②특정한 값이 M과 P에 주어지면 성립한다. - 14% ③결코 성립하지 않는다. - 51% 이 결과는 학생들이 문자를 실제로 식에 사용하면서도 아직도 문자를 수에서처럼 하나의 크기를 가지는 것으로 이해하고 있거나, 그들이 문자를 특정한 미지수의 의미로 이해하는데 익숙해져 있기 때문에 생기는 오류라고 할 수 있다(②의 경우). 어떠한 경우든 학생들이 문자에 대해 불완전한 것으로 생각하거나 잘못된 이미지를 갖고 있어서 문자의 사용에서 결함을 드러내고 있는 것이다.

〈지도 방법〉

변수는 여러 가지 수를 동시에 나타낼 수 있고 임의로 선택될 수 있다는 점에서 '수'와는 구별되고, 변수는 우리가 원하는 어떤 방식으로도 정의 가능하다는 점에서 '일상언어'와 구분된다는 사실을 강조한다.

예를 들면 2x+3=15와 2y+3=15, 2z+3=15등은 같은 방정식임을 이해시키기 위하여 칠판에 2x+3=15, 2y+3=15, 2z+3=15의 세 방정식을 제시한 후 세 명의 학생이 나와서 한 문제씩 풀게 한다. 그리고 그 해를 비교하여 학생들이 문자는 다르지만 해가 같다는 것을 깨닫도록 한다.

4)장애 유형 ④에 대한 지도 방법

〈표 6〉 [장애 유형 ④]

장애 유형	문자와의 연산을 할 줄 모르고 대수적인 표현을 다소 불완전한 것으로 여김.
내 용	Chalouh와 Herscovics에 의하면 학생들에게 폭이 8이고 길이가 C인 직사각형 모양의 널판지의 면적을 써 보라고 하면, '8×C'라는 표현은 미완성처럼 보여, '8×C='라고 쓰기도 하고 '면적=8×C'라고 쓰고 싶어한다는 것이다. 이처럼, 학생들은 연산으로 연결된 두 수가 그 연산의 결과에 의해 어떤 수로 대치되길 원하는데 대수에서는 x+7나 3x와 같은 표현은 제 3의 수로 대치될 수 없으므로 이러한 식들을 "완결되지 않은 것"으로 생각한다.

〈지도 방법〉

산술에서 2 + 3 이란 표현은 과정(process)을 의미하고 그것을 행한 결과로 5라는 답을 얻는다. 그러나 "x에 3을 더하라"라는 문제가 제시되었을 때 x+3은 과정을 나타낼 뿐 아니라 답이 되기도 한다. 이것은 답의 개념이 대수와 산술에서 매우 다르게 나타남을 보여준다. 이 경우에는 학생들로 하여금 문자가 포함한 답을 갖는 문제를 많이 다루어 보게 한다.

즉, 답이 숫자만으로 계산이 되지 않고, 숫자와 문자가 동시에 사용되는 문제를 제시한 후 그 표현이 틀린 학생에게는 개별지도를 하여 문자로 표현된 답에 대한 거부감을 줄여갈 수 있도록 한다.

5)장애 유형 ⑤에 대한 지도 방법

〈표 7〉 [장애 유형 ⑤]

장애 유형	산술에서 이미 배운 규칙들을 수정하지 않고 그대로 대수식에 적용시키며, 자연 언어에 대한 이해와 기호 체계 사이에서의 인지적 갈등을 일으킴.
내 용	학생들은 2+3a의 결과를 5a로 생각하는가 하면 2a+3b의 결과를 5ab로 나타내기도 한다. 학생들은 연산기호가 계산 결과에 존재해서는 안된다는 생각에서 2+3a와 2a+3b 등의 식에서 '+'기호를 없애고자 하며, 3x+2라는 수식은 왼쪽에서 오른쪽으로 읽으며 계산한다. 그러나 2+3x는 "2더하기 3 엑스"라고 읽지만 오른쪽에서 왼쪽으로 계산된다. 즉, 합을 계산하기 전에 x와 3의 곱을 먼저 계산한다. 이것은 일상 언어에서의 순서와 상반되는 계산 순서에 대한 어려움을 느끼는 경우이다.

〈지도 방법〉

이 장애 유형에 대해서는 다음과 같이 지도한다.

첫째, 동류항의 의미를 분명하게 이해시키며 동류항을 구별할 수 있도록 지도한다. 동류항이 있는 다항식에서는 동류항 끼리 모아 계산할 수 있고, 동류항끼리만 간단히 할 수 있음을 강조한다.

둘째, 상수와 상수항의 의미를 분명히 한다. 예를 들면, 2x+4에서 2와 4는 모두 상수이지만 2는 상수항이 아닌 x의 계수이고 4는 상수항임을 강조한다.

셋째, 학생들은 문자가 x나 y만 있는 대수식을 간단히 할 때는 비교적 오류가 적지만, x, y이외의 다른 문자를 포함하는 대수식의 계산에서는 오류가 많다. 이 경우에는 x, y이외의 다른 문자를 포함한 다항식의 계산을 많이 다루어 보게 해서 대수식에서의 문자는 다른 문자로 대치될 수 있음을 이해시킨다.

6)장애 유형 ⑥에 대한 지도 방법

〈표 8〉 [장애 유형 ⑥]

장애 유형	대수식을 간단히 하는 것과 방정식을 풀이하는 것 사이에 혼란이 있음.
내 용	산술에서의 등호 사용의 경험이 방정식과 대수식 사이의 구조적인 차이점을 파악하는데 방해가 될 수 있다. 예를 들면, 학생들은 방정식에 있어서 등호를 등식(관계)을 나타내는 표현이라고 여기기보다는 답을 구하라고 하는 일종의 연산기호(operation sign)로 여기는 것 같다. 반대로 대수식을 간단히 할 때는 등호가 답을 쓰라고 하는 기호로 사용되지만 방정식을 풀 때의 등호처럼 관계를 나타내는 기호(relation sign)라고 생각한다.

〈지도 방법〉

먼저 대수식을 생각해 보면, 학생들은 대수식을 간단히 하라는 문제에 대해 마치 대수식을 방정식으로 생각하고, 방정식을 풀이하는 방법으로 문제를 해결하는 것을 볼

수 있다.

예를 들면, 식 '$\frac{2x+1}{2}-\frac{x-1}{3}$을 간단히 하라'는 문제에 대해

$$\frac{2x+1}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{2x+1}{2}\times 6-\frac{x-1}{3}\times 6$$
$$=3(2x+1)-2(x-1)$$
$$=6x+3-2x+2$$
$$=4x+5$$

또, '$2x-3+3x-7$을 간단히 하여라'에 대해

$$2x-3+3x-7 = 5x-10$$
$$5x = 10$$
$$x = 2.$$

와 같은 오류를 범하기도 한다. 이는 방정식과 대수식을 구별하지 못하고, 방정식 풀이에 사용되는 등식의 성질이나 이항 등의 방법을 대수식을 간단히 하는 과정에 적용함으로써 생기는 오류이다. 이러한 오류에 대해서는 방정식과 대수식의 개념을 분명히 하여 그들을 구별할 수 있게 하며, 분수꼴의 대수식은 분수 계산($\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=$)등과 비교하여 그 연산 과정을 지도한다.

다음으로 방정식과 그 풀이 방법을 이해하는데 도움이 될 수 있는 지도방법을 생각해 보자.

첫째, 방정식을 이해 시키는 지도 방법으로 다음과 같은 방법을 사용한다.

$x=3$일 때 그 값이 17이 되는 식을 찾아라.

가능한 답 : $5x+2$

또, $x=3$일 때 그 값이 17이 되는 다른 식을 찾아라.

가능한 답 : $7x-4$

그러면 방정식 $5x+2=7x-4$의 해는 얼마인가?

답 : $x = 3$

둘째, 방정식의 풀이는 좌, 우변이 같게 되는 변수의 값을 찾는 것이라는 방정식 개념을 이해시키기 위해서 역연산을 사용하는 것보다도 추론을 사용하는 것이 도움이 될 수도 있다.

〈 추론에 의한 방정식 풀이 〉

$14 - \frac{15}{7-x} = 9$ 를 풀어라

추론 : 14에서 얼마를 빼면 9인가?

15를 얼마로 나누면 5인가?

7에서 얼마를 빼면 3인가?

답 : $x = 4$

7)장애 유형 ⑦에 대한 지도 방법

〈표 9〉 [장애 유형 ⑦]

장애 유형	문장제에서 대수식으로의 전이가 어려우며, 문제해결력이 부족함.
내 용	학생들은 '같은 양', '두 양을 더하면 제3의 양이 됨' 등과 같은 문제의 저변에 깔린 관계에 따른다기보다는, 피상적인 특징들('거리에 관한 문제', '나이에 관한 문제', '혼합에 관한 문제' 등)에 따라 문제를 분류하고 기억하는 경향이 있다. 또한 방정식 풀이나 계산은 잘 하면서도, 문장제에 대한 문제 장면 구성의 경험이 부족해서 식을 세우고 해결하는 능력이 부족하다.

〈지도 방법〉

문장제에 대한 이해를 분명히 하고, 문제를 해결하는데 도움이 되도록 하기위해서 다음과 같은 방법으로 지도한다.

먼저, 말이나 문장을 식으로 나타내는 것, 식을 여러 가지 형태로 변환하는 것, 방정식을 풀이하는 것 등의 문장제 풀이 순서를 순차적으로 잘 진행될 때 오류를 많이 줄일 수 있다. 따라서, 문장제를 여러 단계의 과정을 거치면서 차례로 생각하게 하며 문제에 알맞는 그림이나 도형을 그려 활용케 한다.

또한 문장제의 내용이 복잡해질수록 산수적 사고 구조에서의 연산 방법인 원상복구 연산은 많은 어려움을 초래한다. 그러므로 원상복구식 연산으로부터 순서적 연산으로의 전이가 자연스럽게 이루어지도록 지도한다.

Ⅴ. 장애 유형별 지도 방법에 대한 효과 검증

1. 사후 학업 성취도 검사 실시와 그 결과 분석

1996년 9월 13에 사후 학업 성취도 검사를 실시하였다. 이 검사는 실험반과 비교반

을 대상으로 45분 동안 실시하였으며 실험반과 비교반간에 유의미한 차이가 있는지를 알아보기 위해 평균차에 대한 t-검정을 실시하였으며 그 결과는 〈표 10〉 과 같다.

〈표 10〉 사후 학업 성취도 검사 결과

TTEST PROCEDURE

GROUP	N	Mean	Std Dev	Std Error	Minimum	Maximum
실험반	45	58.44444444	23.85615563	3.55626571	10.0	95.0
비교반	45	49.22222222	22.71252046	3.38578265	10.0	95.0

Variances	T	DF	Prob>|T|
Unequal	1.8782	87.8	0.0637
Equal	1.8782	88.0	0.0637

For H0: Variances are equal, F' = 1.10 DF = (44,44) Prob>F' = 0.7460

위의 표에 나타난 결과를 보면, 실험반의 평균 점수가 비교반보다 약 10.22점 높았다. 그러나, 평균치의 차에 대한 t-검정 결과는 P 〈 0.05 유의 수준에서 유의미한 차가 나타나지 않았다. 그 원인을 분석해 본 결과 표준편차가 너무 크고, 하위권 학생들의 점수가 너무 낮은 것으로 나타났다. 이것은 하위권 학생들에게는 본 연구에 제시된 장애에 대한 지도 방법이 효과가 거의 없는 것을 의미하므로, 점수가 낮은 순으로 10명의 성적을 제외한 자료들에 대한 평균차를 t-검정했다. 그 결과는 다음과 〈표 11〉 와 같다.

〈표 11〉 사후 학력 성취도 검사 결과 (하위 10명 제외)

GROUP	N	Mean	Std Dev	Std Error	Minimum	Maximum
실험반	35	69.00000000	13.76269467	2.32631999	45.0	95.0
비교반	35	58.28571429	16.71310058	2.82502961	30.0	95.0

Variances	T	DF	Prob>|T|
Unequal	2.9277	65.6	0.0047
Equal	2.9277	68.0	0.0046

For H0: Variances are equal, F′ = 1.47 DF = (34,34) Prob>F′ = 0.2624

위의 결과에 의하면, 실험반의 평균 점수가 비교반의 평균 점수보다 약 9.71점 높으며, 평균차에 대한 t-검정을 실시한 결과 $P < 0.05$ 유의수준에서 통계적으로 유의미한 차가 있음을 볼 수 있다.

또한, 이러한 결과는 부진아에 대한 보충지도가 별도로 필요하다는 것을 말해준다.

한편, '사전 산수과 학력검사'에 비해 '사후 학업 성취도 검사'의 점수가 낮아진 것은 사전검사에서는 방정식이나 문장제에 대한 기본적인 문제들이 출제된 반면, 사후 검사에서는 장애 치유 정도를 알아보기 위해 학생들이 오류를 범하기 쉬운 까다로운 문제들이 출제되었기 때문이다.

Ⅵ. 요약 및 제언

연구 결과를 몇 가지의 측면에서 분석해 보고 각각의 경우에 대한 본 연구자의 소견을 약술해 보면 다음과 같다.

첫째, 사전검사 결과에 의한 방정식의 오류요인을 살펴보면, 등식의 동치관계를 나타낼 때 등식과 등식사이에 '='를 사용한 경우가 있다. 이것은 등호에 대한 이해 부족에서 연유된 것으로 보인다. 또한, 등식의 성질 등을 이용하여 풀이과정을 구조적으로 정리하지 못하고 절차없이 답만 구하려고 하는 경향이 있다. 그리고 문장제의 내용이 복잡해질수록 식을 세우는데 어려움을 많이 느끼며, 식을 세워 풀이하는 방법보다 문장속에서 곧 바로 답을 구하고자 하는 학생이 많았다. 이것은 학생들이 풀이 과정에서 다소의 오류가 있더라도 답만 맞으면 된다는 식의 사고에 빠져 있기 때문이라고 생각한다.

따라서, 산술과 대수학습에서 절차적인 면과 구조적인 측면이 동시에 다루어져야 하고 특히 산술에서 대수로의 이행 과정인 Prealgebra단계에서는 절차적인 면으로부터 구조적인 면으로의 전이 과정이 충분히 지도되어야 한다. 또한, 문장제 해결을 위해

방정식을 세울 때는 원상복구식 연산보다 순서적 연산 방법을 사용하는 것이 더 편리하고, 오류를 줄일 수 있는 방법임을 지도과정을 통해서 확인할 수 있었다.

둘째, 산술과 대수의 경계에서 비롯되는 인지적, 언어적, 개념적 장애를 사전검사와 선행연구 결과를 토대로하여 일곱가지 유형으로 분류했다. 본 연구에서 선정한 일곱가지 장애 유형은 선행 연구자들에 의해 제시된 여러 장애 유형중에서 연구자가 교육현장에서 비교적 많이 경험할 수 있었던 것들과 사전검사를 토대로 추출하였다. 이러한 과정에서 그동안 막연하게 생각되었던 여러 장애들에 대한 이론적 근거를 알 수 있었으며, 이러한 이론적 배경은 대수 학습 지도에 많은 도움이 됐다.

셋째, 실험 처치 후 사후 검사를 통해 실험반과 비교반의 평균 차에 대한 t-검정을 해 보았는데 $p < 0.05$수준에서 유의미한 차가 나타나지 않았다. 그러나 반에서 하위권 학생 10명을 제외한 자료에 대한 평균 차를 t-검정한 결과는 $p < 0.05$ 수준에서 유의미한 차가 있었다. 이러한 사실은 성적이 저조한 학생에게는 장애에 대한 수정 방법이 큰 효과가 없었지만 그 학생을 제외한 학생에게는 효과가 있었음을 의미한다.

넷째, 사후검사를 통해 분석한 오답율을 살펴보면, 실험반이 비교반보다 오답율이 낮지만, 비교반뿐만아니라 실험반도 오답율이 비교적 높다는 것을 알 수 있다. 실험반과 비교반의 장애 유형별 오답율을 비교해보면, 대수식을 간단히 하는 문제에서는 실험반이 77.8%, 비교반이 86.7%로 장애 유형중 가장 높게 나타났다. 그리고, 문장제에서도 장애가 심한 것으로 나타났는데 특히, 거리에 대한 문제의 오답율은 실험반 75.5%, 비교반 82.2%나 되었다. 이것은 여러 가지 요인이 있겠지만 문장제의 내용이 다양하고 복잡한것에 비하여 그 지도에 배정된 시간이 부족했던 것때문으로 분석되어진다.

이상과 같이 선행 연구 결과를 토대로 장애유형을 분류하고 적절한 지도 방법을 제시해서 장애를 수정하는 연구를 시행해 보았는데, 이 과정에서 느낀 점은 산술에서 대수로의 전이에 대한 지도는 결코 쉬운 일이 아니라는 것이다. 즉, 산술에서 학습되었던 경험들이 적절하게 대수 도입 단계에서 재구성되어야 하는데, 학생들은 자신들이 산수과정에서 획득한 문제 풀이 방법을 고수하려는 경향이 있어서, 대수적 구조를 인식시키는데 많은 어려움이 있었다.

한편, 본 연구는 대수 지도 과정 전체에서 나타나는 총체적인 장애가 아닌 특정 부분에 국한된 장애 유형만을 연구 대상으로 삼았기 때문에 본 연구자가 제시했던 지도 방법이 다른 대수 분야의 지도에는 적절하지 않을 수 있음을 밝혀두고자 한다. 따라

서, 앞으로도 산술에서 대수로의 이행 과정에서 학생들에게 도움이 될 수 있는 연구가 일선 교사들을 포함한 모든 수학교육 종사자들에 의해 지속적으로 되어져야만 하고 이러한 연구 결과는 적절한 논의를 거쳐 학교 교과지도에 활용되어지는 것이 바람직하다고 본다.

또한, 본 연구에서 제시된 장애 해소를 위한 지도 방법이 성적이 저조한 학생들에게는 거의 효과가 없는 것으로 나타남에 따라, 그 학생들의 지도에 대한 관심이 새삼 강조될 필요가 있음을 느낀다.

참 고 문 헌

1. 교육부, 1994, 중학교 수학과 교육과정 해설, 대한교과서주식회사.
2. 교육부, 1994, 국민학교 교육과정 해설(Ⅰ) - 총론, 국어, 수학 -, 대한교과서 주식회사.
3. 교육부, 1990, 산수 4-1,2 · 5-1,2 · 6-1,2 , 국정교과서주식회사.
4. 교육부, 1990, 산수 익힘책 4-1,2 · 5-1,2 6-1,2 , 대한교과서주식회사.
5. 김남희, 1991, 변수 개념과 대수식의 이해에 관한 연구, 대한수학교육학회 논문집 1권(1호), 서울 : pp.93-105.
6. ———, 1994, 대수적 사고에 관한 고찰:산술과의 관련성과 변수개념, 대한수학교육학회 논문집 4권(2호), 서울 : pp.189-203.
7. 김성준, 1994, 산술에서 대수로의 전이에 관한 고찰, 교육학 석사 학위 논문, 서울대학교 대학원.
8. 김응태, 박한식, 우정호, 1989, 수학교육학 개론, 서울대학교 출판부, 서울.
9. 김연식, 김흥기, 1994, 중학교 수학 1,2,3, 동아출판사.

10 ————, 1994, 중학교 수학 1,2,3 — 교사용 지도서, 동아출판사.

11. 이종영, 1994, 프로그래밍 맥락에서 변수 개념 지도의 가능성, 교육학 석사 학위 논문, 서울대학교 대학원.
12. Booth,L. R., "Children's Difficulties in Beginning Algebra", NCTM, The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook: pp.20-32.
13. F. Coxford, P. Shulte, 1988, "The Ideals of Algebra, k-12", NCTM.
14. Filloy, E. & Rojano, T., 1985, "Obstruction to the Acquisition of Elemental

Algebraic Concepts and teaching Strategies", Proceedings of 9th International Conference for the PME.

15. Hans Freudenthal, 1983, "Didactical phenomenology of mathematical structures".
16. Happer, E., 1987, "Ghosts of Diophatus", Educational Studies in Mathematics, Vol. 18.
17. Herscovics, N., 1989, "Cognitive Obstacles Encountered in the Learning Algebra", Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, NCTM : pp.60-86.
18. H.R.Hamley, "Relational and Functional Thinking in Mathematics", 9th yearbook. NCTM.
19. Kieran, C., 1981,"Concepts Associated with the Equality Symbol", Educational Studies in Mathematics, Vol. 12 : pp.33-56.
20. ――――― , 1989, "The Early Learning of Algebra : A Structural Perspective, NCTM : pp.60-86.
21. ――――― , 1990, Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra, Mathematics and Cognition, p.112.
22. ――――― , 1992, The Learning and teaching of School Algebra, In Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of NCTM.
23. Kieran, C.& Chalouh, L., 1993, "Prealgebra:Transition from Arithmetic to Algebra", Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics, Macmillan Publishing Company, NCTM : pp.179-202.
24. NCTM, 1989, Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, Vol.4, pp.57~58.
25. Parker. S. & Wagner. S., 1993, "Advancing Algebra", Research Ideas for the Classroom High School Mathematics, NCTM.