그래픽계산기를 이용한 함수지도에 관한 연구[1)]

권 오 남 (이화여자대학교)
박 경 미 (한국교육개발원)

I. 서 론

최근 들어 첨단산업 기술의 발전으로 컴퓨터의 대중화가 가속화되고 있으며, 이에 현대사회의 거의 모든 분야에서 컴퓨터가 활용되고 있다. 컴퓨터의 보급이 보편화되면서 수학의 교수-학습에 이를 활용하려는 사회적인 요구와 필요성 때문에 학교수학에 컴퓨터를 도입하자는 구체적인 논의가 이루어지고 있다. 컴퓨터를 사용하면 학생들이 수학에 대한 흥미와 관심을 새로운 측면에서 도울 뿐만 아니라 문제 해결과정의 체계적인 분석, 해답의 타당성 분석, 오류 분석 등의 과정을 통하여 수학적 사고력을 보다 강화시킬 수 있다는 장점을 가지고 있다.

그러나, 현재 우리 나라의 수학교육계에서는 학습도구로서의 컴퓨터가 능률적이고 효과적인 환경을 제공할 수 있다는 점을 인식하고 있지만 실제로 현장에서 수학 교수-학습에 이를 활용할 수 있을 만한 교육환경이 마련되어 있지 못하다. 실제로 컴퓨터는 많은 사람들이 기대한 만큼 수학과 교수-학습에 영향을 주지 못하고 있다. 그 이유로는 우선 많은 학교들이 여전히 각 교실에서 수업할 수 있는 컴퓨터를 확보하고 있지 못하다는 점과, 교사들이 사용할 수 있는 소프트웨어가 충분하지 못하다는 점이다. 또한 Mathematica, Maple, Derive 등 좋은 소프트웨어가 있으나 구입하기에는 가격이 비싸다.

그래픽계산기(graphic calculator)는 컴퓨터가 가지고 있는 장점을 살리면서 중등수학교육에 활용할 수 있는 대안적 도구라 할 수 있다. 그래픽계산기 휴대의 간편성은 학생들이 수학시간에 컴퓨터를 이용하기 위해서 컴퓨터 교실로 이동해야 하는 번거로

---

1. 본 연구는 1995년도 교육부 지원 교과교육공동연구 학술연구비 지원에 의해 연구되었음.

움을 피할 수 있게 해 줄 뿐더러 그 가격 면에서도 컴퓨터 한 대의 가격으로 한 학급이 사용할 수 있는 그래픽계산기를 구입할 수 있을 만큼 저렴하다. 그래픽계산기는 프로그래밍(BASIC 언어와 유사), 그래픽 등 컴퓨터에 준하는 대부분의 기능을 갖추고 있는 소위 "포켓 컴퓨터(pocket computer)" 라 할 수 있다 (Demana & Waits, 1987).

함수 개념은 수학에서 가장 중요한 개념의 하나이며, 그 추상성은 교수하기 어려운 개념이기도 하다. 특히 학생들은 함수를 그래프로 표현하여 시각화하는 것에 어려움을 겪고 있다. 현재 대부분의 교과서는 지필 만을 가지고 몇 개의 순서쌍의 점들을 연결해서 함수의 그래프를 그리는 교수방법을 보여주고 있다. 그러나 이런 방법은 그래프를 그리는데 드는 소요되는 시간 낭비를 초래할 뿐만 아니라 몇 개의 점을 이산적으로 구한 다음 연속적으로 연결하기 때문에 엄밀하게 말하자면 정확한 과정이 아니라고 할 수 있다.(Heid, 1988). 함수의 그래프는 두 변수 사이의 복잡한 정보를 시각적으로 보여준다. 지필로 그래프를 그리는 경우 몇 개의 점을 찾아 점을 찍는 과정에서 그래프를 그리는 그 자체가 학습의 목적이 되어 그래프를 그리는 원래의 목적 즉, 두 변수 사이의 특별한 관계(함수)를 이해하는 것을 잃게 된다(Demana & Waits, 1988; Heid, 1988; Foley, 1990). 더욱이, 실제적인 자료(realistic data)에 근거한 함수의 응용문제는 흥미롭고 유용하지만 지필로 풀기에는 계산이 복잡하기 때문에 교수하기 어려운 경향이 있다.(Demana & Waits, 1987; Heid, 1990; Fey, 1989). 특히 이차함수, 지수함수, 삼각함수, 로그함수의 그래프를 이해하는 데에 학생들이 어려움을 겪고 있으며, 함수와 그 함수의 그래프의 연관성을 이해하지 못하는 경향이 있다는 연구결과들도 보고되고 있다. 예를 들면, 적지 않은 학생들이 연립일차방정식의 해가 그래프의 교점에 해당된다는 사실을 알지 못하고 있다(Foley, 1990).

컴퓨터 기능에 필적할 만한 그래픽계산기의 등장은 함수의 교수-학습을 신장시킬 수 있는 잠재력을 가지고 있다(Demana & Waits, 1990; Jones, 1995). 그래픽계산기는 여러 가지 종류의 함수의 그래프를 그릴 수 있다는 기본적인 기능 외에 다양한 방법으로 빠르고 융통성 있게 그래프의 변형을 할 수 있다는 장점을 가지고 있다. Vonder Embse(1988)는 1년간 수학 수업에서 다루는 함수를 그래픽계산기를 이용할 때에는 3시간이면 그릴 수 있다고 지적하였다. 일반적으로 수업시간에 지필을 이용하여 그래프를 그리므로 기껏해야 한 두 개의 그래프를 그리고 그 성질을 조사하게 된다. 따라서 복잡한 함수가 주어졌을 때 원하는 그래프를 정확하게 그리기 위한 충분한 정보, 예를 들면, 극값, x절편, y절편등을 계산하기는 매우 어려운 일이다. 이러한 정보가 바로 교

사가 교실에서 학생들과 의사소통(communication)하고자 하는 내용이다. 그러나 그래픽계산기를 이용하면 그 그래프를 그려 낼 뿐만 아니라 그래픽계산기의 여러 가지 기능을 통해 지필로 함수를 그릴 경우에 알아내야 하는 정보도 쉽게 얻을 수 있다. 따라서 학교수학에서 그래픽계산기의 사용이 함수의 학습지도에 혁신적인 방법이 될 수 있으며, 실제로 NCTM의 "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics"(NCTM, 1989)에서는 중등학교 수학교육에서 그래픽계산기의 활용을 권장하고 있다.

본 연구는 수학에서 중요한 개념 중 하나인 함수개념을 그래픽계산기를 이용하여 다양한 방법으로 가르치는 것에 대한 연구이다. 미국, 유럽 등 선진국의 수학교육에 있어서 그래픽계산기를 사용한 연구들이 대학은 물론이고 중, 고등학교에까지 확장되어가고 있는 추세이나 우리 나라에서는 최근에 황우형(1996)이 그래픽계산기를 소개하였을 뿐 아직 이에 대한 연구는 없으며 보급조차 되어 있지 않다. 따라서, 본 연구는 강의식 방법에서 탈피한 실험식 수업방법의 시도일 뿐만 아니라 컴퓨터가 가지고 있는 장점을 살리면서 장소에 구애받지 않고 사용할 수 있는 그래픽계산기의 활용방법에 대한 우리 나라 최초의 연구로서 이에 대한 연구가 매우 필요하다고 본다. 이러한 필요성에 따라 본 연구는 함수 교수-학습에 있어서의 그래픽계산기의 활용 방안을 제시하여 수학과 수업 방법을 개선하는 데 목적이 있다.

II. 함수 교수-학습에 있어서의 그래픽계산기 활용방안

계산기가 구비된 수학교실에서 학생들은 탐구하고 가설을 세우고 발견을 검증하는 과학 실험실과 같은 환경에서 학습할 수 있다. 이러한 환경에서 교사는 학생들이 중요한 수학적 개념을 이해하거나 스스로 발견할 수 있도록 관련 있는 활동을 제공하게 된다. 그래픽 계산기 등 교수공학이 잘 갖추어진 교실 환경이 수업 형태에 미치는 가장 기본적인 결과는 교사와 학생이 수학적 아이디어를 발전시키고, 수학문제를 해결하는 역동적인 교실이 될 수 있다는데 있다. 이와같이 그래픽계산기가 구비된 교실이나 컴퓨터 실험실은 안내식 발견 수업이(guided-discovery instruction model) 가능하다. 이러한 수업에서는 수학지식이 주로 교사로부터 학생에게 전달되는 전통적인 방법에서 탈피해 수학지식은 교사의 안내 또는 도움을 받아 학생 스스로 구성하는 것이 가능하게 된다. 이는 구체적인 조작 활동을 통하여 학생 개개인 스스로가 수학지식을 구

성한다는 소위 구성주의의 관점을 따르고 있다(박영배 & 김연식, 1994).

이 장에서는 본 연구에 사용된 안내식 발견 수업에서 함수의 교수학습에 대한그래픽계산기 활용 방안을 제시하고자 한다.

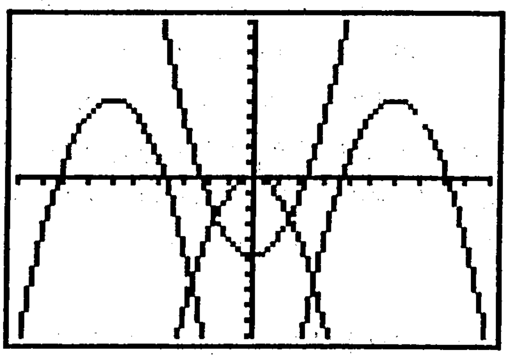
1. 그래픽계산기:수학적 탐구의 도구

예제1: 그래픽계산기의 화면의 영역을 고정하고

$$y=x^2$$
$$y=5+x^2$$
$$y=5+(x-6)^2$$
$$y=5+(x+3)^2$$

의 그래프를 그려라.

실수 v, h에 대하여 $y=v+(x-h)^2$ 의 그래프를 추측하여라.



<그림 1> 영역 $[-10, 10]\times[-10, 10]$에서 $y=x^2$ 의 그래프와 그 변환

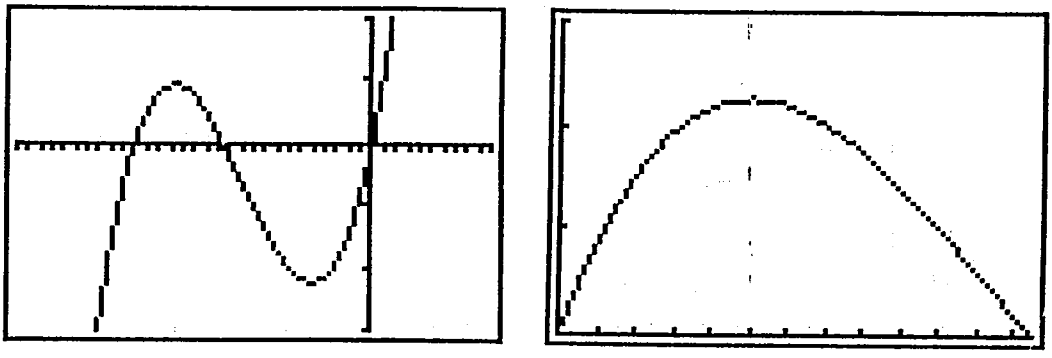
<예제1>에서의 교사의 역할은 이차함수의 변환의 결과를 전달하는 것이 아니라 "만일 ~라면 어떻게 될까(what if …)?"라는 질문을 통해 학생들 스스로가 v, h 의 역할을 이해하는데 도움을 주는 안내자의 역할이다. $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sin x$ 와 같은 기본적인 함수에 위의 예제를 적용한 후, 일반적으로 $y=af(bx+c)+d$ 가 다양한 매개변수 a, b, c, d 에 대해 $y=f(x)$와 어떤 관련이 있는지를 학생 스스로가 탐구할 때, 그래픽계산기의 역량은 십분 발휘될 수 있다. NCTM의 Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics(1989)에서는 $y=x^2$ 의 그래프와 $y=-0.5(x-2)^2-4$ 의 그래프의 관련성을 탐구하는 도구로써 그래픽계산기를 소개

하고 있다.

2. 그래픽계산기: 다양한 표상(representation)의 번역 도구

동일한 문제 상황 또는 동일한 수학적 개념의 서로 다른 표상 사이를 번역할 수 있는 학생의 능력을 신장시키는데 역시 그래픽계산기가 효과적으로 사용될 수 있다. 그래픽계산기는 대수적 표상 이외에 기하적 표상을 부가할 수 있는 기능을 갖고 있다. 기하적 표상이 가능함에 따라 학생들은 대수적 표상과 기하적 표상의 연결성을 탐구할 수 있는 기회를 갖게 된다. 대수적 표상과 기하적 표상의 연결은 중등학교에서 가장 중요한 것이다. 예를 들면, 대수에서 방정식의 근을 구하는 것은 함수의 그래프와 x축의 교점을 구하는 것이며, 연립방정식의 해를 구하는 것은 방정식의 그래프들의 교점의 좌표를 결정하는 것이며, 방정식의 극대값을 찾는 것은 그 함수의 그래프의 극대점을 찾는 것이다. <예제2>는 대수적 표상 $V=x(25-2x)(40-2x)$를 기하적 표상으로 번역하는 도구로써 그래픽계산기의 역할을 보여주고 있다. 상자부피를 최대로 하는 x값을 찾는 과정에서 그래픽확대(zoom-in)기능은 해의 정밀도를 높이는데 쓰인다. <그림 2>은 이 과정을 보여주고 있다. 전통적인 지필 교수법에서는 <예제2>와 같은 최대, 최소값 문제를 미적분학 지식이 없는 학생에게 가르칠 수 없다. 그러나 그래픽계산기에서 적절한 화면 영역을 설정하고 그래픽확대(zoom-in)기능을 사용하면 최대, 최소값 문제는 더 이상 미분의 지식을 필요로 하지 않게 된다.

<예제2> 25cm×40cm 판자의 네 모서리에 한 변의 길이가 x인 정사각형을 잘라내고 상자를 만든다고 하자. 부피를 최대로 하는 x의 값은 얼마인지 결정하여라.



<그림 2> 상자부피문제의 기하적표상

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구대상 및 절차

본 연구는 서울 시내에 소재하고 있는 두 개 고등학교에서 자원한 1학년 학생들을 대상으로 하고 있다. 그래픽계산기를 이용한 수업에 참여한 학생수는 유동적이었으므로, 사전, 사후 태도검사에 모두 응한 학생으로 제한하였다. 이러한 원칙에 따를 때, 참여한 학생은 총 49명으로 A고 23명 (남학생 16명, 여학생 7명), B고 26명 (남학생 14명, 여학생 12명) 이었다.

본 연구에서 사용된 그래픽계산기는 Texas Instrument의 TI-82 이며, 그래픽계산기를 이용한 수업은 A고, B고의 순서로 진행하였고, 수업은 5일에 걸쳐 하루 3시간씩, 총 15시간 실시하였다. 본 연구의 수업은 구성주의에 바탕을 둔 안내식 발견 수업의 형태(guided-discovery instructional model)를 취하고 있으며, "수학학습은 학생들이 주어진 문제 상황을 풀기 위해 그들의 활동을 재조직하는 과정"(Cobb et al, 1991)이라는 관점을 그 근간으로 한다.

그래픽계산기를 이용한 5일 동안의 구체적인 수업 내용은 다음과 같다.

1일	1차시	그래픽계산기의 소개, 사전검사(pre-test) 시행
	2차시	사용설명서(manual)에 따른 그래픽계산기의 조작 연습
	3차시	세 가지 방법에 의한 (제곱근, 번분수, Fibonacci 수열을 이용한 접근) 황금비(golden ratio)의 학습
2일	1차시	실제적 자료(realistic data)를 이용한 연립방정식 풀이 (대수적 해법과 그래프를 이용한 해법의 병행)
	2차시	위와 동일
	3차시	2차, 3차 함수의 그래프
3일	1차시	3차 함수의 최대, 최소값 구하기 (대수적 해법과 그래프를 이용한 해법의 병행)
	2차시	최대값, 최소값
	3차시	실린더의 표면적과 부피
4일	1차시	그래픽계산기를 이용한 기본적인 삼각함수(sin, cos, tan, cosec, sec, cot)의 이해
	2차시	y=AsinB(x-C)+D의 형태를 가진 삼각함수의 성질

3차시 $y=(A\sin Bx)^2$의 형태를 가진 삼각함수의 성질

5일 1차시 극좌표(polar coordinate)의 성질

2차시 $y=A+B\sin x$의 형태를 가진 방정식

3차시 사후검사(post-test) 및 설문조사 실시

2. 연구도구

그래픽계산기를 이용한 수업에서 실제적인 교과서의 역할을 한 것은 worksheet으로, Demana와 Waits의 "Precalculus" 등을 참고하여 제작되었다. Worksheet은 보고서의 형태를 띠고 있으며, 대부분 그래픽계산기를 조작해 봄으로써 답을 얻을 수 있는 항목들로 간단한 단답형도 있지만 고도의 사고력을 요구하는 열린문제(open-ended problem)도 다수 포함되어 있다.

또한 그래픽계산기의 사용이 학생들의 수학에 대한 가치관이나 태도 등 정의적 영역에 미치는 영향력을 측정하기 위하여 태도검사를 사전, 사후에 실시하고 spss/pc로 분석하였다. 더불어 그래픽계산기를 이용한 수업에 대한 학생들의 반응을 심층적으로 조사하기 위하여 13항목으로 이루어진 설문조사를 병행하였다.

Ⅳ. 연구결과

1. Worksheet 분석

위에서 언급한 대로 그래픽계산기를 이용한 실험수업은 황금비, 연립방정식의 해, 최대값·최소값, 실린더의 표면적과 부피, 2차, 3차 함수의 그래프, 삼각함수의 그래프, $A\sin B(x-C)+D$의 그래프, 삼각함수의 연산, 극좌표와 삼각함수의 9 가지 주제를 중심으로 이루어졌으며, 학생들은 매 주제에 대하여 worksheet을 작성하였다. 아홉 가지 주제 중 그래픽계산기의 시각화 효과를 발휘할 수 있는 주제로 2차, 3차 함수의 그래프를 선택하여 이에 대한 worksheet 분석 결과를 수록하였다.

2차, 3차 함수의 그래프에 대한 worksheet을 분석한 결과는 다음과 같다.

<표4> 2차, 3차 함수의 정 · 오답율

문항번호	정답율	오답율	무응답
Ⅰ 1	80.4%	19.6%	0%
2	82.1%	17.9%	0%
3	83.9%	0%	16.1%
4	82.1%	5.4%	12.5%
5	37.5%	28.6%	33.9%
6	55.4%	30.3%	14.3%
7	35.7%	42.9%	21.4%
Ⅱ 1 (1)	75.0%	25.0%	0%
(2)	85.7%	14.3%	0%
(3)	64.3%	31.9%	3.8%
(4)	71.4%	21.5%	7.1%
Ⅲ 1	85.7%	12.5%	1.8%
Ⅳ 1	87.5%	10.7%	1.8%
2	78.6%	12.5%	8.9%
Ⅴ 2	87.5%	3.6%	8.9%
3	71.4%	10.7%	17.9%
4	75.0%	12.5%	12.5%
5	85.7%	1.8%	12.5%
6	46.4%	39.3%	14.3%
Ⅵ 2	30.4%	50.0%	19.6%
3	26.8%	53.6%	19.6%
4	33.9%	30.4%	35.7%

Ⅰ-2와 Ⅱ-1-(1)문항에서 인수의 개념을 이해하고 있는 못한 학생들이 이외로 많았다. 또한 Ⅰ-1과 Ⅱ-1-(3)(4)에서는 꼭지점의 좌표, 축의 방정식의 개념조차도 명확하게 가지고 있지 못한 학생도 소수이기는 하지만 몇 명 발견되었다.

Ⅰ-5는 계산기를 이용하다가 '2차 방정식의 해를 구하는 다른 방법'에 대해서 질문하였기 때문에, 학생들이 계산기와 연관지으려는 시도를 하는 경우가 대부분이었다. 따라서 이 문제의 경우는 묻는 내용에 대한 서술을 좀 더 명확할 필요가 있다고 판단되었다.

Ⅰ-6,7은 학생들이 계산기로 조작을 해 보고 문제의 상황도 어느 정도 파악하였으나 이를 서술하는 과정에서 많은 어려움을 경험하였던 것으로 드러났다.

Ⅱ는 trace key를 이용하는 문항으로, 직관적 접근을 취하지 않은 학생들이 보다 정확한 값을 찾으려고 시도하다가 결국 근사값으로 답을 한 경우가 다수 있었다.

Ⅴ에서 학생들은 3차 방정식의 근을 다양하게 구해보고도 결론에서는 단순히 근을

'3개'라고만 답하는 경우가 많았다. 이는 '2차 방정식의 근이 2개다'라고 단순하게 기억하는 데서 온 결과라고 할 수 있다. 학생들이 2중근, 3중근의 개념을 생각하고 답을 한 것인지는 불확실하지만 여기서는 오답으로 처리하였다.

한편 VI의 응답율과 정답율은 특히 낮았다. 그래픽계산기로 window 설정을 달리하면서 그래프를 그려보기는 하였지만 x와 y의 범위를 넓힌 것인지 좁힌 것인지, x의 범위를 넓힌다는 것이 화면에 눈금이 많아지도록 해야 하는 것인지, 또 x_{min} 값이나 x_{max} 값을 크게 해야 하는지 작게 해야 하는 것인지 등의 관계를 잘 알고 있지 못한 것으로 파악된다. 비록 소수이기는 하지만 화면이 크면 폭이 넓어진다고 답한 학생도 있어서 그래프에 대한 개념의 이해가 크게 부족한 것으로 나타났다.

2. 태도검사 분석

그래픽계산기를 활용한 수업이 수학에 대한 학생들의 가치관에 어떠한 변화를 주었는지 조사하기 위하여 실험수업의 전후에 태도검사(attitude survey)를 실시하였다. 태도검사지는 과정으로서의 수학(mathematics as a process), 수학과 자의식(mathematics and myself), 협력학습(cooperative learning), 수학과 사회(mathematics and society), 수학과 성별(mathematics and gender), 수학과 공학(mathematics and technology)이라는 여섯 개의 하위영역으로 이루어져 있으며, 한 영역에 2-4개 문항씩, 총 22개의 문항으로 구성되어 있다. 문항들에 대한 반응은 '결코 그렇지 않다', '그렇지 않다', '모르겠다', '동의한다', '전적으로 동의한다'로 총 5단계를 설정하여 1점-5점이 할당되었으며, 22개의 문항 중 일곱 개 문항은 부정문으로 되어 있으므로 입력 시 점수를 전환(recoding)하였다.

태도검사 결과를 분석해 볼 때, 수학에 대한 학생들의 태도는 상당히 긍정적인 것으로 드러났다. 각 항목들의 전후 평균은 2.78부터 4.29 사이에 분포하며, 대부분 3점 대에 위치하고 있었다. 이 수업에 참가한 학생들은 수업 이외의 시간에 자원하여 수학을 배울 만큼 강한 학습동기를 지니고 있었던 만큼, 학생들은 사전검사 당시에도 수학에 대해 다분히 긍정적인 가치관을 지니고 있었던 것으로 이해될 수 있다. 각 항목별로 분석해보면, 5% 유의수준에서 통계적으로 유의미한(statistically significant) 차이를 보인 항목을 없었으며, 전후검사의 차이는 0부터 최고 0.34로 근소하였다. 이렇게 경미한 차이는 수학에 대한 학생들의 가치관은 오랜 시간에 걸쳐 형성된 것이기 때문에 5일 15시간의 그래픽계산기 수업으로는 가치관의 변모를 유도할 만한 결정적인 영향력을 행사하기 어렵다는 측면에서 설명될 수 있을 것이다.

총 22문항 중 사후검사의 평균이 사전검사보다 높은 항목은 16항목이었고, 사후검사의 평균이 사전검사보다 낮게 나타난 항목은 5항목이었으며, 두 검사의 평균이 동일한 것은 1항목이었다. 위에서 언급한 바와 같이 수학에 대한 가치관이라는 것이 쉽게 변모할 수 있는성질의 것이 아니기 때문에 비록 통계적으로 유의미한 차이는 발견되지 않았지만, 5일이라는 짧은 기간 동안 16항목에 걸쳐 긍정적인 변화가 일어난 것은 시사하는 바가 상당히 크다고 할 수 있다.

전후검사에서 0.3 이상의 차이가 나타난 항목은 다음의 세 항목이었다.

* 수학문제는 대부분의 경우 여러 가지 방법으로 풀 수 있다. (+0.31)
* 수학교과서에서 다루는 응용문제는 지나치게 인위적이다. (+0.31)
* 나는 함수나 방정식에 관한 수학문제를 처음 접했을 때, 머릿속에 그 그래프를 그려본다. (+0.34)

비교적 큰 차이가 보인 이유를 유추해 보면, 우선 첫 번째 항목은 그래픽계산기를 이용함으로써 수학문제에 대한 해법이 유일한 것이 아니라 다양한 접근방법이 있을 수 있다는 것을 경험한 데서 연유하였다고 볼 수 있고, 두 번째 항목에서는 그래픽계산기를 이용한 문제에서 제시하고 있는 실제적이고 현실적인(realistic) 수치는 기존의 수학교과서의 응용문제가 계산과정의 복잡성을 고려하여 인위적으로 조작해 놓은 수치라는 인식을 새롭게 한 데서 기인하였다고 볼 수 있다. 세 번째 항목에 대한 이유로는 그래픽계산기를 통한 수업에서는 함수나 방정식을 주로 그래프로 접근하기 때문에, 함수나 방정식에 대한 대수적인 사고보다는 머릿속에 그 그래프를 그려보는 기하적 사고를 한 데서 찾아볼 수 있을 것이다.

태도검사에 대한 영역별 분석을 보면, 여섯 개의 하위 영역 중 '수학과 사회'를 제외한 다섯 개의 하위영역에서 사후검사의 평균이 사전검사보다 높았으며, '과정으로서의 수학'과 '수학과 공학'에서 5% 유의수준으로 유의한 통계적 차이를 보였다. 부연 설명하자면, 그래픽계산기를 이용한 수업을 통해 학생들은 수학문제는 여러 가지 다양한 방법으로 해결할 수 있으며, 수학은 규칙과 원리로만 이루어져 있어 암기를 통해 학습해야되는 것이 아니고 창조적 사고가 필요하다는 방향으로 사고를 선회하게 되었다고 할 수 있다. 또한 계산기를 이용한다면 다양한 수학내용을 배울 수 있고, 기존의 교과서처럼 인위적으로 단순화되어 있는 비현실적인 응용문제가 아닌 현실감 있는 응용문제의 해결이 가능하며, 여러 테크놀로지의 이용에 자신감이 생겼고, 함수나 방정식을 그래프화하여 사고하는 것을 선호하게 되었다고 해석할 수 있다.

태도검사에 대한 성별 분석을 보면, '수학과 성별'을 제외한 다섯 영역에서 수학에 대한 남학생의 태도가 여학생보다 긍정적이고 적극적이었다. '수학과 성별' 영역에서의 여학생의 진취적이 사고는 여학생 자신들의 문제인 만큼 남학생들보다 긍정적이고 진보적인 가치관을 가지고 있는 것으로 나타났다.

사전, 사후검사의 평균이 한쪽은 증가로, 다른 한쪽은 감소로 나타남으로써, 평균 변화 추이에 있어 성별차이가 눈에 띠는 영역은 '수학과 자의식', '수학과 사회', '수학과 성별' 영역인 것으로 드러났다. 우선 '수학과 자의식' 영역을 보면 남학생들은 그래픽계산기를 이용한 수업을 통해 자신감이 증대된 반면, 여학생들의 자신감을 다소 감소하였다. 그래픽계산기를 조작하는데 있어 남학생보다 많은 어려움을 겪었던 여학생들은 연쇄적으로 수학에 대한 자신감까지 축소되었을 것이라고 해석할 수 있고, 반대로 남학생들은 그래픽계산기에 익숙해지고 자유자재로 이용하기까지 어려움이 비교적 덜하였으므로, 수학에 대한 자신감 증대로 귀결되었을 가능성이 높다.

3. 설문지 분석

그래픽계산기를 이용한 수업에 대한 학생들의 반응을 심층적으로 조사하기 위하여 13항목으로 이루어진 설문조사를 하였으며 51명의 학생들이 설문에 응하였다.

첫 번째 질문인 그래픽계산기를 이용한 학습의 장점이라고 생각되는 측면에 대하여, 대부분의 학생들은 시각화와 개념 이해를 꼽았다. 그 외에 '실생활과 관련된 다양한 주제를 배울 수 있다', '수학에 좀 더 흥미롭게 접근할 수 있었다', '왜 이렇게 되는가에 대하여 관심을 갖게 해준다', '정보화시대에 대비한 좋은 환경을 마련해 준다', 'program을 짜는데 있어서 논리적 사고력에 도움을 준다' 등 다양하였다.

두 번째, 그래픽계산기를 이용한 학습의 단점으로 학생들은 무엇보다도 계산능력의 저하를 언급했으며, 그 외에 계산기 조작의 어려움이나 느린 학습속도에 대해서도 우려하고 있었다. 기타에 해당하는 답변으로는 '생각을 하지 않고 계산기에 의존한다, '과정을 볼 수 없으므로 별로 도움이 안된다', '그래프를 그릴 때 범위 설정이 어렵다'라는 반응도 있었다.

세 번째, 학생들은 그래픽계산기의 조작이 비교적 쉽다고 인식하고 있는 것으로 나타났다. 전체 답변자 51명 학생 중 반이 넘는 학생들이 쉽다고 반응했으며, 양쪽 극단인 '아주 쉽다'나 '아주 어렵다'는 드물었다. 또한 그래픽계산기의 조작에 익숙해지기까지 시간에 대하여 50% 이상의 학생들이 2시간 미만으로 보고하였다.

네 번째, 그래픽계산기를 이용하여 학습한 내용 중 극좌표와 삼각함수를 가장 재미

있는 내용으로 생각하고 있었으며, 그 다음으로는 실린더의 표면적과 부피, 황금비 등의 순이었다. 이에 반해 연립방정식이나 삼각함수의 연산 등 교과서에서 이미 배워 익숙한 내용에는 별 흥미를 갖지 못하는 것으로 나타났다.

다섯 번째, 학생들은 실린더의 표면적과 부피를 그래픽계산기의 도움을 가장 필요로 하는 내용으로 생각하고 있으며, 그 다음으로는 극좌표와 삼각함수, 황금비를 꼽았다. 한편 나머지 다섯 가지 주제인 연립방정식의 해, 최대, 최소, 삼각함수의 그래프, y=AsinB(x-C)+D의 그래프, 삼각함수의 연산에 대해서는 다섯 명 이하의 학생들이 그래픽계산기의 도움이 필요한 주제로 선택을 하였다. 다시 말해, 교과서에서 다루었던 내용은 이미 학습한 경험이 있으므로, 계산기의 기능을 이용하여 다른 접근방법으로 문제를 풀었더라도 계산기의 도움이 필요 없는 것으로 인식하고, 기존의 교과서에서 접하지 못한 내용에 대해서는 그래픽계산기의 도움이 절실한 주제라고 생각하는 경향이 있다.

여섯 번째, 그래픽계산기를 이용하여 학습한 내용 이외에 그래픽계산기의 도움이 유용할 것이라고 생각하는 내용은 주로 그래프와 관련된 고차함수의 그래프, 부등식의 영역, 점과 점 사이의 거리, 포물선, 유리함수, 무리함수, 도형의 방정식 등이며, 그 외에도 고차 부등식 , 분수방정식, 무리방정식, 원과 직선의 거리, 확률, 미분, 적분, 행렬식 등 교육과정과 연계된 내용이 대부분이었다. 한편 물리, 화학분야, 측량할 때, 디자인과 같이 수학 외적인 내용을 선정한 경우도 있었으며, 시험을 볼 때와 같이 실리적인 답변을 한 경우도 있었다.

일곱 번째, 그래픽계산기를 이용한 이번의 학습 기회가 수학에 대한 가치관에 변화를 주었는가에 대하여 18명의 학생들이 긍정을 33명의 학생들이 부정하였다. 특히 그래픽계산기를 이용한 학습 기회가 협동학습에 대한 가치관의 변화를 가져왔다는 반응이 21명, 그렇지 않다는 반응이 29명이었다. 이러한 학생들의 반응은 그래픽계산기를 이용한 수업이 협동학습에 대한 인식의 전환을 가져올 것이라는 기대와는 다소 어긋난 경향이 있다. 처음 실험을 했던 A고에서는 내용 준비 등에 많은 노력을 기울였기 때문에 협동학습에 대하여 충분히 부각시키지 못한 경향이 있는데, 두 번째 학교인 B고에서는 한 번 수업을 한 내용이기 때문에 소홀했던 협동학습 측면까지도 세심하게 배려할 수 있었다.

V. 결 론

그래픽계산기를 이용한 본 연구는 본질적으로 많은 어려움을 안고 시작하였다. 계산기를 이용한 수학수업에 대한 실험은 몇 차례 수행되었어도, 그래픽계산기를 이용한 수학수업에 대한 연구는 국내 최초라고 할 수 있기 때문에, 참고할 국내의 선행연구도 전무하였으며, 따라서 교재 구성이나 실험 진행 등에 대하여 축적된 노하우가 없었다. 또한 실험 일정을 잡는 데에 있어서도 여러 가지 현실적인 난관에 봉착하였다. 주어진 교육과정은 기존의 칠판과 지필수업으로도 소화하기가 벅차기 때문에 정규시간에 실험수업을 하는 것은 엄두도 못 내었으며, 방과 후에는 학교에서 실시하는 보충수업이나 학생이 개인적으로 받는 과외수업, 학원교습 등으로 인하여 시간을 얻기가 거의 불가능하였다. 따라서 고육지책으로 마련된 것이 방학 중 보충수업 기간의 오후 시간이었으며, 그나마 5일 15시간 수업으로 만족해야 했다. 이러한 어려움을 안고 시작한 연구이지만 실험 기간 중 학생들이 보여준 관심과 열의, worksheet과 태도검사 및 설문지를 통해 본 학생들의 긍정적인 반응은 나름대로 소기의 연구 성과를 달성하였다고 판단할 수 있다.

태도검사 결과에 따르면 각 문항별로는 통계적으로 유의미한 차이가 나타나지 않았다. 수학적 가치관은 오랜 시간에 걸쳐 서서히 형성된 것이기 때문에 5일 15시간의 수업경험으로는 가치관의 변모를 기대하기는 역부족이라고 할 수 있다. 그러나 태도검사에 대한 하위영역별 분석에서는 과정으로서의 수학(mathematics as a process)과 교육과 공학(mathematics and technology)이라는 두 영역에서는 통계적으로 유의한(5% 유의수준)차이가 발견되었다.

본 연구를 뒷받침하는 교육철학이자 연구의 의도라고 할 수 있는 세 가지 관점에서 본 실험을 조망해 보면 다음과 같다. 첫 번째는 수학 학습에 대한 구성주의적 접근방식이라고 할 수 있는데, 학생들은 이미 만들어진(ready-made) 지식을 수동적으로 수용하는 입장을 떠나, 그래픽계산기라는 도구를 통해 수학적 지식을 능동적으로 획득하는 자율적 구성자의 역할을 수행하였다는 점에서 구성주의에 입각한 수업이 어느 정도는 가능하였다고 볼 수 있다. 두 번째는 수업에 그래픽계산기라는 도구를 활용함으로써 지겹고 따분한 수학수업에 활력을 불어넣고, 수학문제도 좀 더 현실적이고 실제적인 상황으로 제시하려는 의도로, 실험 당시의 수업분위기나 설문지의 반응 등을 고려해 볼 때, 어느 정도는 이러한 의도가 관철된 것으로 볼 수 있다. 세 번째는 수학에

대한 접근에 있어 산술적이고 계산적인 방식보다는 시각적으로 직관적인 방식을 유도해 보려는 것으로, 실험수업에서 보여준 학생들의 양태나 설문지의 반응을 고려해 볼 때, 학생들이 다소나마 '대수적인 접근'보다는 '그래프적인 접근'을 선호하게 되었다고 판단할 수 있다.

본 연구는 앞에서 언급한 대로 그래픽계산기에 대한 국내 최초의 연구로 본격적인 연구이기 보다는 그래픽계산기의 활용 가능성을 타진하기 위한 준비단계(preliminary fashion)의 기초연구라 할 수 있다. 본 연구의 제한점(limitation)이자 향후 연구에 대한 제안점(suggestion)으로는 첫째, 본 실험에는 자원한 학생들만이 참가하였으므로, 실험집단의 구성원들은 대부분 수학학습에 대한 동기가 뚜렷한 학생들이었다. 따라서 본 연구의 결과를 전반적인 학생들의 경우로 일반화하는데는 무리가 따른다고 하겠다. 이러한 연구를 일반적인 학생들에게 전면적으로 실시해 봄으로써 그래픽계산기의 활용이 수학적 성취도 면에서 어떠한 수준에 있는 학생들에게 더욱 효과적인지 밝히는 것도 필요할 것으로 보인다. 둘째, 방학 중 보충수업 시간에 학생들을 지도한 관계로 실험 대상 학생 수가 많지는 않았다. 표본수가 적기 때문에 통계 처리하는 양적 분석 뿐 아니라 worksheet이나 질문지에 대한 질적 분석도 병행하였지만 좀 더 대규모의 연구가 후속 되어야 할 것으로 보인다. 실험 대상의 수가 커질 경우에는 그래픽계산기의 이용에 대한 성별 차이 등도 하나의 변인으로 추가하여 조사할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

박영배, 김연식 (1996), 수학 교수.학습의 구성주의적 전개에 관한 연구, 1996년도 대한수학교육학회 춘계, 201-230, 대한수학교육학회

황우형 (1996), 그래픽 계산기 활용의 실제-함수의 그래프와 방정식의 해를 중심으로, 1996년도 대한수학교육학회 춘계, 105-122, 대한수학교육학회

Ayers T. , Davis G. , Dubinsky E. & Lewin P. (1989). Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathemetics Education*, 19, 246-59

Cobb, Paul, Wood, Terry, Yackel, Erna, Nicholls, John, Wheatley, Grayson, Trigatti, Beatriz, & Perlwitz, Marcella.(1991). Assessment of a problem-centered second grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics*

Education, 22(1), 3-29

Danham, P & Dick , T. P. (1994). Research on Graphing Calculators, *Mathematics Teacher,* 87, No.6, 440-445)

Davis, Robert, Maher, Carolyn, & Noddings, Nel. (Eds). (1991). Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*,4.

Demana F. & Waits B. K. (1987). Problem Solving using microcomputers. *The College Mathematics Journal*, 18, 236-241.

Demana F. & Waits B. K. (1988). Pitfalls in graphical computation, or why a single graph isn't enough. *The College Mathematics Journal* ,19, 177-183

Demana F. & Waits B. K. (1990). *Precalculus Mathematics: A Graphing Approach.* Reading MA: Addison-Wesley Publishing Company.

Demana F. & Waits B. K. (1990). Enhancing mathematics teaching and learning through technology. In T.J. Cooney & C.R. Hirsch(Eds), *Teaching and learning Mathematics in the 1990's*. 1990 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dick, Thomas.(1992) "Super Calculators: Implications for Calculus Curricurum, Instruction, and Assessment." *In Calculators in Mathematics Education,* 1992 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by James T. Fey, 145-57. Reston, Va.: The Council.

Dunham, Penelope H.(1992) "Teaching with Graphing Calculators: A Survey of Research on Graphing Technology." In *Proceedings of the Fourth International Conference on Technology in Collegiate Mathematics,* edited by Lewis Lum,89-101. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co.

Fey, J. T. (1989) School algebra for the year 2000. In S. Vagner S. C. Kieran (Eds.), *Reasearch Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 199-213). Reste, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Heid, M. K. (1988) Resequencuing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19,* 3-25

Heid, M. K. (1990) Implementing the standards: Uses of technology in pre-algebra and beginninig algebra. *The Mathematics Teacher, 84*, 194-198

McClendon, Mickey A.(1992) "The Development of a Graphics Calculator Study Guide for Calculus Students." Ph. D. diss., University of Oregon. *Dissertation Abstracts International* 52 :2450A.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics. (1992). Calculators in Mathematics Classroom. NCTM 1992 Yearbook. Reston, VA.

Rich, B. (1990). *The effects of the use graphing calculators on the learning of function concepts in precalculus mathematics.* (Doctoral dissertation, University of Iowa,1990)

Travers, K. J.(1981), Second International Mathematics Study detailed report for the United States, CHAMPAIGN, IL, Stipes publishing company.

Wolfe, Mary D.(1990) "Design and Development of an Interactive Computer Graphics Tool to Aid in the Understanding of the Generral Function Concept." Ph. D. diss., Georgia State University. *Dissertation Abstracts International* 51:1945A

<부록1>

2차, 3차 함수의 그래프

학습목표

1. 2차 함수의 해의 의미를 알 수 있다.
2. 2차 함수의 꼭지점과 축을 찾을 수 있다.
3. 그래프를 보고 2차 함수를 만들 수 있다.

사용법

ZOOM을 사용한 후에 RANGE를 다시 설정한다.

< WINDOW 설정 >

$X_{min} = -9.4$ $Y_{min} = -6.2$

$X_{max} = 9.4$ $Y_{max} = 6.2$

$X_{scal} = 1$ $Y_{scal} = 1$

1. 그래프에 의한 풀이

1. Y=메뉴에 $y_1 = x^2 - 4$를 입력하여 GRAPH를 그려라.

 a. x축과 만나는 점을 찾기 위해 TRACE를 이용한다.

  $x_1 =$ $x_2 =$

 b. 그래프의 꼭지점은?

 c. 축의 방정식은?

2. $x^2 - 4 = 0$을 풀기위해 인수분해를 이용하라.

 a. 인수는 ( ) 와 ( )

 b. 해는 $x_1 =$ $x_2 =$

3. 계산기에서 본 x축과의 교점과 인수분해에 의한 해는 다른가?

4. x축과의 교점과 방정식의 해에 대해 어떤 결론을 얻을 수 있는가?

5. 2차방정식의 해를 구하는 다른 방법이 또 있는가?

2. 2차 함수의 그래프

Y= 메뉴에 $y_1 = -2x^2 - 2x +$; 을 입력하고 GRAPH를 그려라.

a. $y=-x^2-2x+3$을 인수 분해하면 인수들은 (　　　) 와 (　　　) 이다.

b. x축과의 교점을 구하기 위해 TRACE를 사용한다.

$x_1=$　　　　　　　　$x_2=$

c. 그래프의 꼭지점은?

d. 축의 방정식은?

3. 2차 함수와 1차 함수의 교점

Y=메뉴에 $y=x^2$와 $y=2x+3$을 입력하고 GRAPH를 그려라.

a. 두 그래프의 교점은 몇 개인가?

b. 교점의 좌표를 구하여라.

$x=$　　　　　$y=$

4. 2차 함수와 3차 함수의 교점

$$\begin{cases} y=x^2-3x-7 \\ y=x^3-2x^2+11x-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-x^2-9 \\ y=3x^3-x+8 \end{cases}$$

a. Y= 메뉴에 입력하고 GRAPH를 그려라.

b. 두 그래프의 교점이 있는가?

c. 교점의 좌표는?

$x=$　　　　　$y=$

5. 3차 방정식의 근

a. Y=메뉴에 함수를 입력하고 GRAPH를 그려라.

$y=x^3$

$y=4x^3$

$y=\frac{1}{10}x^3$

b. x축과의 교점을 찾아라. 교점의 갯수는?

$x=$

c. 방정식의 해와의 관계를 설명하여라.

d. $y=x^3+x^2-5x+3$과 x축과의 교점의 갯수는?

e. $y=x^3-7x+6$과 x축과의 교점의 개수는?

f. 그렇다면 3차 방정식의 근의 갯수는?

6. RANGE에 따른 그래프의 형태

a. 기본이 되는 영역에 $y=x^2$의 그래프를 그려라.

$X_{\min}=-10$ $X_{\max}=10$ $X_{sci}=1$

$Y_{\min}=-10$ $Y_{\max}=10$ $Y_{sci}=1$

b. WINDOW를 어떻게 설정할 때, 포물선의 폭이 넓어지는가?

c. WINDOW를 어떻게 설정할 때, 포물선의 폭이 좁아지는가?

d. x축 y축 구간이 바뀌면 WINDOW설정에 따라 포물선이 어떻게 보이는가?