차원 분열 도형(Fractal)탐구를 통한 교수/학습 활동

김 수 환 (청주교육대학교)
김 남 균 (서울토성초등학교)

I. 서론

차원을 직관적인 방법으로 말하자면, 직선은 일차원 대상들의 전형적인 것이며, 평면은 이차원 대상들의 전형적인 것이다. 그렇다면 분수의 차원을 갖는 기하학적 대상들은 없을까? 1890년에는 Peano가, 바로 그 이듬해인 1891년에는 Hilbert가 어떤 평면에 존재하는 곡선들을 논하였는데 그것은 곡선에 관한 우리들의 고지식한 생각이 너무나 제한적임을 입증하였다. 그들은 어떤 평면을 '가득채우는' 곡선들을 논하였다. 즉, 주어진 어떤 평면의 조각에 대하여, 그 평면 조각의 모든 점과 만나는 어떤 곡선이 존재한다는 것이다(Peiten, Jürgens, & Saupe, 1992).

자연에서 공간을 채우는 구조들의 유기체는 생명체들의 기초적 성분들 중의 하나이다. 어떤 기관은 물과 산소와 같은 필수적인 지원 물질들이 공급되어야 한다. 많은 경우에 이러한 基體들은 그 기관의 입체에 있는 모든 점을 지나는 도관 체계를 통하여 운송될 것이다. 가령, 신장은 세 개의 잘 짜여진 나무와 같은 도관 체계 즉, 동맥, 정맥, 비뇨기를 갖고 있다. 그들 각각은 신장의 모든 부분에 접근할 수 있다. 차원분열도형은 그러한 복잡한 구조를 효율적인 방법으로 어떻게 조직화할 것인가 하는 문제를 해결해준다. 물론 이것은 Peano와 Hilbert가 100년쯤 전에 흥미를 가졌던 것은 아니었다. 차원분열도형의 개념이 분명해진 것은 Mandelbrot의 업적이 드러난 1980년 이후인 지금이다(Peiten, Jürgens, & Saupe, 1992).

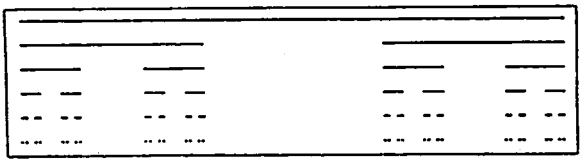
수학이라면 누구나 딱딱하고 재미없는 언어와 기호들의 조작이라고 생각하기 쉽고, 그런 이유로 의식적으로 수학적인 활동을 회피하는 사례들이 많은 것도 사실이다. 수학적 활동 자체가 흥미롭고 도전감을 불러일으킬 수 있는 정의적 요인을 고려한 탐구활동 자료의 개발과 보급이 시급한 일이라 생각된다. 교사는 소위 말하는 문제해결 과제의 제시 뿐 아니라 거기에 동기부여의 작용을 하는 과제를 끊임없이 제시할 수 있어야 할 것이다. LOGO나 BASIC 언어로 프로그래밍하여 차원분열도형의 단계별 분열과정을 컴퓨터 화면을 통하여 실제로 관찰해볼 수 있는 자료들도 이미 시중에는 많

이 소개되고 있다. 뿐만 아니라 차원분열도형의 개념을 쉽게 접근할 수 있도록 하기 위한 만화책도 보급되어 있으므로 이에 관심있는 사람들은 누구나 쉽게 접근할 수 있으리라 생각된다. 본고에서는 차원분열도형 그 자체에 관한 논의에 초점을 두기 보다는 차원분열도형의 사례들을 그림을 통하여 간단히 소개한 후 교실에서 실제로 탐구 활동을 전개할 수 있는 방안을 모색하고자 한다.

Ⅱ. 고전적인 차원분열도형과 자체 닮음성

1. 칸토르 집합

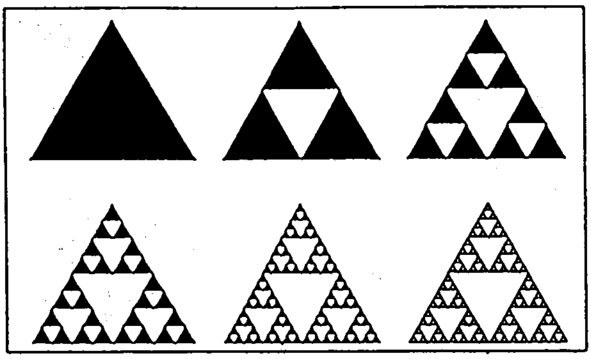
칸토르 집합은 집합론의 창시자로 알려진 독일의 수학자 Cantor(1845-1918)에 의해 1883년에 처음으로 알려진 어떤 예외적인 집합의 예이다. 폐구간 [0, 1]에서 시작하여 중앙의 1/3에 해당하는 개구간 (1/3, 2/3)을 제거하는 과정을 다음 <그림 1>과 같이 무한히 반복하면, 독특한 성질을 갖는 칸토르 집합이 구해진다.



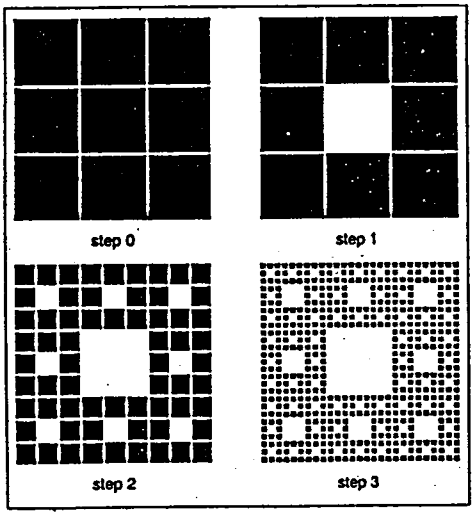
< 그림 1 > 칸토르 집합 구성의 초기 단계들

2. 시어핀스키 개스킷(Gasket)과 양탄자(Carpet)

Sierpinski(1882-1969)는 칸토르보다 약 40년 후의 폴란드의 세계적인 수학자로 정삼각형과 정사각형을 이용한 다음과 같은 고전적인 차원분열도형을 구성하였다.



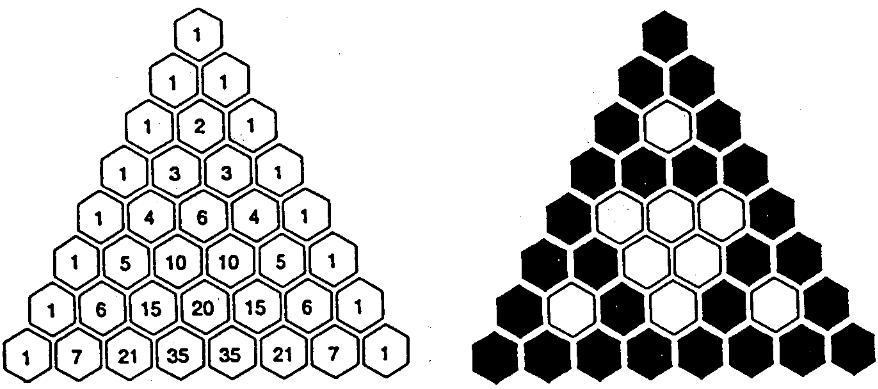
< 그림 2 > 시어핀스키 개스킷(Gasket)의 기본적인 구성 단계들



< 그림 3 > 시어핀스키 양탄자(Carpet)의 기본적인 구성 단계들

3. 파스칼의 삼각형

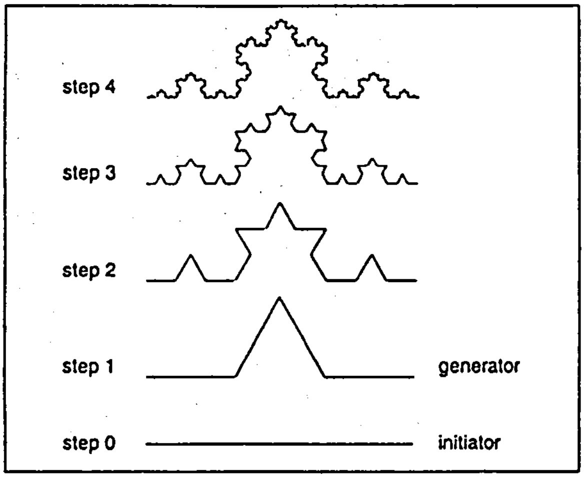
파스칼(1623-1662)은 프랑스의 위대한 수학자이자 과학자로, 스무살에 현대적인 컴퓨터의 전신이라 할 수 있는 정수의 덧셈을 위한 기계를 만들기도 하였다. 그러나, 파스칼의 삼각형으로 알려진 것은 사실상 그의 발견물이 아니며, 유럽에서는 이미 1527년에 알려진 것이며, 중국에서는 1303년에 처음으로 알려졌다고 한다.



< 그림 4 > 파스칼의 삼각형

4. Koch 곡선

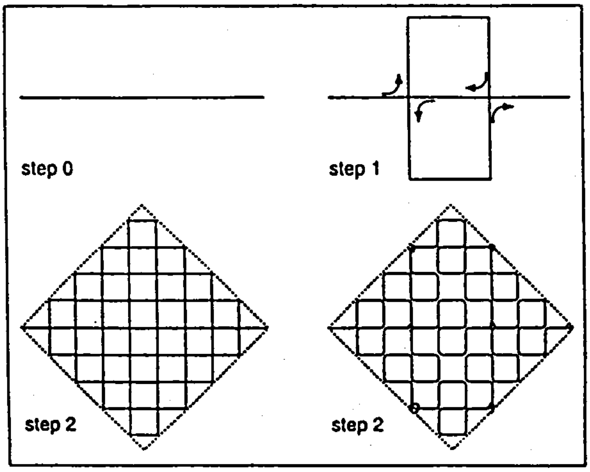
Koch는 스웨덴의 수학자로, 1904년에 소위 Koch 곡선을 구성하였다고 한다.



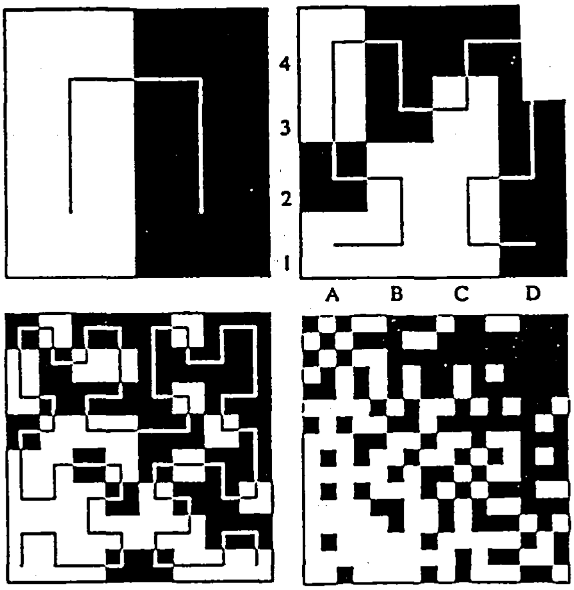
< 그림 5 > Koch 곡선

5. 공간을 채우는 곡선

1890년에는 Peano(1858-1932)가, 바로 그 이듬해인 1891년에는 Hilbert(1862-1943)가 어떤 평면에 존재하는 곡선들을 다음과 같이 논하였다.



< 그림 6 > Peano 곡선



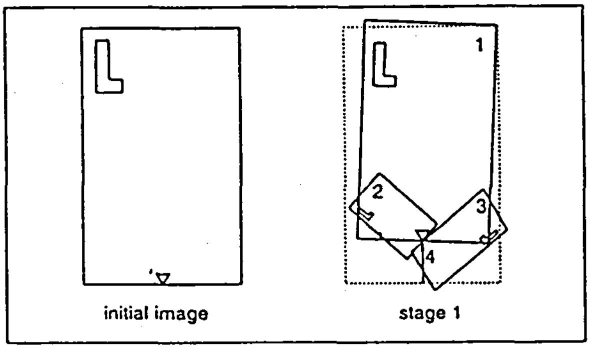
< 그림 7 > Hilbert 곡선

Ⅲ. 아핀변환에 의한 프랙탈의 표현

프랙탈 개념의 발전과 보급에 있어서 컴퓨터 그래픽의 역할은 크다. 컴퓨터 그래픽은 프랙탈 사물을 그림으로 나타내고 연구할 수 있게 하고, 프랙탈기하학은 컴퓨터 영상을 만들어 내는 데 사용될 수 있다. 프랙탈을 작도하는 데는 컴퓨터의 기능 방식인 단순한 반복 연산으로 몇번이고 반복할 수 있다. 물체의 기본 형태와 구조를 분석하여 자료를 소량으로 저장하고, 표현할 때에는 프랙탈의 개념을 그대로 적용시키는 IFS(Iterated Function System)가 있다. 이 IFS는 많은 영상 자료를 축소시켜서 저장하는 형상 축약기법이며, 효율적으로 자료를 처리한 후 원래 형상으로 복원할 수 있다.

수학자 Michael Barnsly와 그 연구 팀은 '아핀변환'이라고 불리는 과정을 통해서 매우 복잡한 형태를 사실적으로 재현하는 방법을 발견하였다. Barnsly는 프랙탈 수학이 물체의 특징들을 저장하는 간결한 방법이기 때문에 이러한 접근을 통해 영상의 내용을 단지 몇 개의 방정식으로 압축할 수 있다하고 영상 압축은 자연의 형태에서 발견되는 중복성(redundancy) 안에 있다고 믿었다.

Barnsly는 네가지 렌즈시스템만을 이용하여 <그림 10>과 같은 영상을 기호화하였다. 이는 <그림 9>의 아핀변환 행렬로 처음의 상(image)을 IFS로 반복 변환하여 얻어진 것이다.

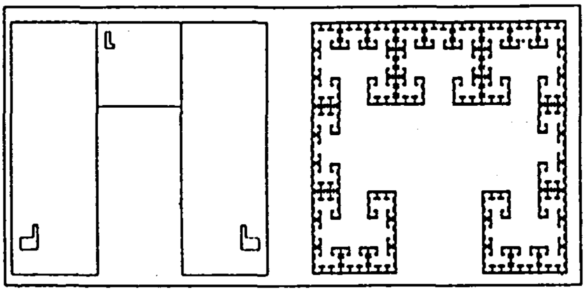


< 그림 8 > 반슬리 고사리의 청사진

	Translations		Rotations		Scalings	
	e	f	ϕ	ψ	r	s
1	0.0	1.6	−2.5	−2.5	0.85	0.85
2	0.0	1.6	49	49	0.3	0.34
3	0.0	0.44	120	−50	0.3	0.37
4	0.0	0.0	0	0	0.0	0.16

< 그림 9 > 변환의 변수

< 그림 10 > 반슬리 고사리



< 그림 11 > 3가지 변환의 IFS를 이용한 프랙탈 - 칸토르 미로

Ⅳ. 차원분열도형을 이용한 교수/학습 활동

유리수와 기하학적인 개념들을 이용하여 차원이란 주제를 탐구할 수 있다. 대부분의 학생들은 여러 가지 차원을 나타내는 데 이용될 수 있는 대상들을 잘 알고 있다. 가령, 바늘의 끝, 실의 조각, 종이 조각, 벽돌 등은 각각 0차원, 1차원, 2차원, 3차원의 실체들이다. 그런데 2와 3 사이의 차원을 갖는 대상이 존재할 수 있을까? 이러한 질문에 대한 조사 과정에서 학생들은 분수 지수와 비의 개념을 이용하여 분수 차원의 대상들, 즉 차원분열도형을 학습할 수 있을 것이다(Curcio, & Bezuk, 1994). 미국의 5-8학년 수준에서의 차원분열도형 탐구 활동 자료를 소개하면 다음과 같다.

<선행지식> 자연수 지수와 표기법, 계산기의 y^x 기능 키 이용법, 차원의 개념, 비, 축척, 닮음

<개념> 차원, 분수차원, 차원분열도형, 자체 닮음, 크기 비, 닮음비

<목적> ① 여러 가지 대상들의 차원에 대한 토론

② 여러 가지 차원의 도형들에 대한 자체 닮음성 만들기

③ 자체 닮음 도형을 만든 다음 닮음비와 크기비 분석하기

④ 닮음비와 크기비의 관계 분석

⑤ 차원분열도형 만들기와 자료 분석

⑥ 분수지수를 이용한 차원분열도형의 차원 표현

1. 차원 탐구 활동

가. 활동 1 : 차원이란 무엇인가?

<준비물> 활동지 1, OHP

[활동지 1] 여러 가지 차원의 대상

이름(　　　　　　　　　　)　　　　　　　　　　날짜(　　　　　　　　　)

여러분이 공부해온 대부분의 수학적 대상들은 범자연수의 차원을 갖는 대상들이었다. 가령, 정육면체와 정이십면체와 같은 입체도형들은 3차원 도형들이다. 정사각형과 삼각형 등 여러 가지 평면도형들은 2차원 도형들이다. 직선은 1차원이며, 점은 0차원이다.

다음 각 차원에 해당하는 수학적 대상들과 일상의 대상들을 몇 개씩 열거하여라.

0	1	2	3

위의 표에 적은 대상들의 어떤 특성들을 기술하여라.

1) 차원이란 용어의 의미에 관하여 토론한다. 차원이란 매우 추상적인 것으로 쉽게 정의되지 않는 용어이다. 어떤 대상의 차원이란 그것이 공간을 얼마나 점유하느냐의 측도라는 것이 기본적인 생각이다. 초·중학교 수준에서 차원 개념의 이해를 증진시키는 최선의 방법은 사례들의 논의 과정을 통한 것이다. 벽돌은 세 개의 수직 방향으로 공간을 점유하기 때문에 3차원의 대상이며, 길고, 넓고, 두껍다. 정사각형은 두 개의 수직 방향으로만 공간을 점유하기 때문에 2차원의 대상이며 길고 넓지만 두께가 없다. 한편, 직선은 오직 한 방향으로만 공간을 점유하기 때문에 1차원 대상이며 길지만, 넓이와 두께가 없다. 점은 공간을 전혀 점유하지 않기 때문에 0차원 대상이며 길이도, 넓이도, 두께도 없다.
2) 활동지 1을 학생들에게 나누어 준 다음 빈 칸에 각 차원에 맞는 대상들을 적게 한다.
3) 학생들이 짝을 지어 그들의 활동지에 적은 수학적 대상들과 일상의 대상들을 서로 교환하여 채우게 한 다음 각 차원의 대상들의 중요한 속성들을 자신의 말로 설명하고 활동지 아래 에 적도록 한다.

4) 몇 분 후 학급의 전체 학생들의 예들을 공유하게 한다. 이들을 OHP 용지에 적어 보여주고 각 대상들의 본질적인 속성들의 설명을 공유하게 한다.

5) 학생들이 제시한 일상의 이차원 대상들을 이용하여 수학적 모델로서의 이러한 대상들의 역할을 논의하게 한다. 가령, 한 조각의 종이는 길이와 폭이 있다. 그런데 높이도 있는가? 10장 또는 100장의 종이를 쌓으면 어떤가?

6) 2와 3 사이에는 어떤 수들이 있는가를 학생들에게 묻는다. "2와 3 사이의 차원을 갖는 대상은 존재할까?" 존재한다고 대답한 학생에게 그러한 대상은 어떤 모양일지를 말해보라고 하는 '사고를 유도하는 질문'을 한다.

나. 활동 2 : 정사각형 탐구

<준비물> 활동지 2, 활동지 2의 TP 자료, 3-4명의 각 소집단에 적어도 25개의 정사각형 블럭, 가령, 색채가 있는 타일, 속성 블럭, 세라믹 타일 등.

[활동지 2] 닮음비와 크기비의 관계

이름(　　　　　　　　)　　　　　　　　날짜(　　　　　　　　)

다음 정의들을 회상하여라.

$$\text{닮음비} = \frac{\text{새로운 도형의 길이}}{\text{원래 도형의 길이}} \qquad \text{크기비} = \frac{\text{새로운 도형의 크기}}{\text{원래 도형의 크기}}$$

여러 가지 닮음비에 대한 자료값을 기입하여라(원래 도형의 길이나 크기는 크기 1인 원래의 도형을 이용하는 것이 쉽다).

(　　　　　　)에 대한 자료

길이	크기	닮음비	크기비
1	1	1	1
2		2	
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

닮음비와 크기비의 관계를 추측하여 쓰시오.

1) 3-4명의 소집단을 편성하여 각 학생들에게 활동지 2와 정사각형 블록을 나누어 준다. 이러한 블록들은 정사각형을 나타내는 수학적 모델들로 이용될 것임을 학생

들에게 주지시킨다. 정사각형의 각 변은 단위 길이를 갖는 것으로 한다.

2) 바로 다음 크기의 정사각형을 만드는 데는 최소한 몇 개의 정사각형이 필요한 지를 학생들 에게 질문한다. 왜 이러한 모양들은 닮음일까? (크기는 다르지만, 모양이 같고, 대응하는 각의 크기가 같으며, 대응하는 변의 길이의 비가 같다.) 학생들이 그들의 생각들을 토론하게 한다.

3) "크기"라는 용어를 정의할 필요가 있다. 어떤 도형의 크기는 그 도형을 형성하는 단위 조각, 즉 여기서는 원래의 정사각형의 수를 세어 계산할 수 있다. 또 다른 용어의 정의는 다음과 같다.

$$\text{닮음비} = \frac{\text{새로운 도형의 길이}}{\text{원래 도형의 길이}} \qquad \text{크기비} = \frac{\text{새로운 도형의 크기}}{\text{원래 도형의 크기}}$$

이 정의에 의해 크기 1×1인 정사각형과 크기 2×2인 정사각형의 닮음비와 크기비를 계산하여 활동지 2의 표에 써 넣어라.

4) 더 큰 정사각형들에 대해서도 활동지 2의 자료를 계속하여 써 넣어라. 항상 1×1인 정사각형을 원래의 도형으로 한다. 왜냐하면, 임의의 어떤 두 정사각형이라도 비교될 수는 있지만 닮음비와 크기비가 분수가 되어 그 관계를 발견하기가 어렵게 될 수 있기 때문이다(심화활동 참조).

5) 활동지 2에서 닮음비와 크기비의 관계를 추측하여 적어라. 닮음비가 10인 경우에 추측한 것을 검정하여라. 정사각형의 수가 충분하지 못한 경우에 몇 개의 조를 연합하거나 길이가 10인 정사각형의 모델을 그려서 시도해보라.

6) 학생들이 추측을 공유하게 하여 다음과 같은 식이 성립함을 알게 한다.

$$(\text{닮음비})^2 = \text{크기비}$$

<심화 활동> 절차 4에서 언급한 바와 같이 크기가 1×1인 정사각형을 원래의 도형으로 하는 것이 쉽지만, 한 변의 길이가 2인 정사각형을 원래의 도형으로 하고, 한 변의 길이가 3인 정사각형을 새로운 도형으로 하여 닮음비와 크기비 사이의 관계를 알아보아라.

다. 정육면체 탐구

<준비물> 활동지 2, 활동지 2의 TP 자료, 3-4명의 각 소집단에 적어도 64개의 어떤 동일한 크기의 정육면체

1) 정사각형 탐구와 비교하여 정육면체 탐구의 결과인 닮음비와 크기비의 관계는 어떨지를 추측하게 한다. 이들은 같을까?

2) 정사각형 탐구에서와 같은 활동을 계속하게 한다. 바로 다음 크기의 정육면체를 만드는 데는 최소한 몇 개의 정육면체가 필요할 지를 묻는다. 원래의 정육면체와

새로운 정육면체의 닮음비와 크기비를 계산하여 활동지 2의 빈칸에 적고 그들이 어떤 추측에 확신을 가질 때까지 계속하게 한다.

3) 정사각형 탐구 결과와 비교하게 한다. 정사각형 탐구의 결과와 다른 점에 학생들이 놀라는가? 왜 이러한 일이 생겼는 지를 논의하게 하고 다음과 같은 관계식을 세울 수 있게 한다.

$$(\text{닮음비})^3 = \text{크기비}$$

정사각형, 정육면체 탐구의 결과 닮음비와 크기비, 차원 사이의 관계가 어떠한가를 추측하게 하여 이러한 관계에 의해 차원을 다음과 같이 정의할 수 있음을 지도한다.

$$(\text{닮음비})^{\text{차원}} = \text{크기비}$$

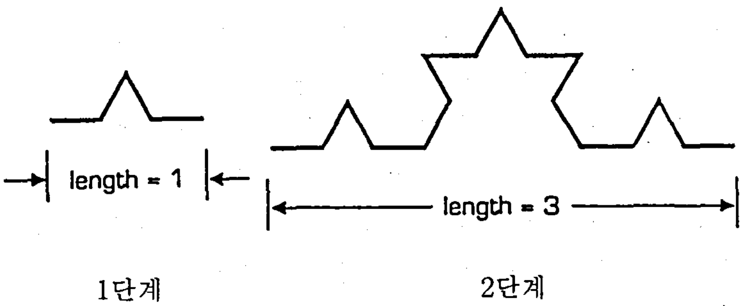
2. 차원분열도형 탐구

가. 차원분열도형 탐구

<준비물> 활동지 2, Overhead Master 1, y^x 기능을 가진 계산기(각 학생당 1개씩)

[Overhead Master 1] 차원분열도형의 차원 계산

① 임의의 단계에서 시작한다. 전 단계의 도형과 크기가 같은 복사물을 갖도록 다음 단계 확대도를 아래와 같이 그린다.



② 닮음비를 구하여라.

$$\text{닮음비} = \frac{\text{새로운 도형의 길이}}{\text{원래 도형의 길이}} = \underline{\qquad\qquad} =$$

③ 크기비를 구하여라.

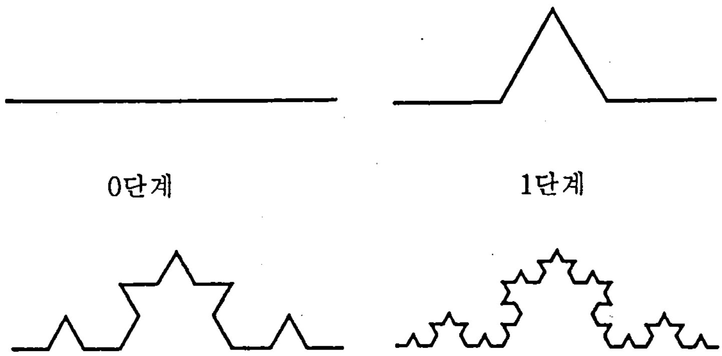
$$\text{크기비} = \frac{\text{새로운 도형의 크기}}{\text{원래 도형의 크기}} = \underline{\qquad\qquad} =$$

④ 차원의 정의를 이용하여 차원(d)을 추정하여라.

$$(\text{닮음비})^d = \text{크기비}$$

1) 2차원과 3차원 대상들에서 탐구한 차원의 정의를 회상하게 한다.

1차원 직선에서 시작하여 다른 방향으로 작은 직선 조각들을 첨가하여 다른 차원의 도형을 만들어낸다. 도형은 다음 규칙을 반복하여 적용함으로써 얻을 수 있다. "주어진 선분의 가운데 1/3을 'V'자를 뒤집은 모양으로 대체하되, 그 두 변은 각각 제거된 선분의 길이와 같게 한다." 길이가 1인 선분을 0단계라고 하면, 다음 <그림 12>와 같이 나타낼 수 있다.



0단계 1단계

2단계 3단계

< 그림 12 > 차원분열도형의 발전 단계

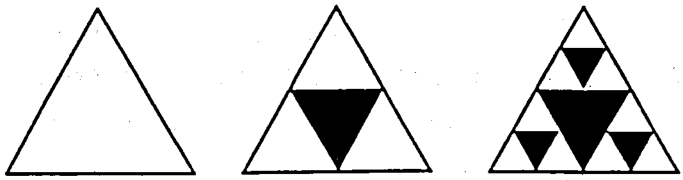
2) Overhead Master 1의 네 가지 절차에 의해 차원분열도형의 차원을 계산하게 한다. 네 번째 절차에서 $3^d=4$를 만족하는 차원 d를 추정하기 위하여 계산기를 이용한다. 그 결과 대략 $d=1.262$임을 얻는다.

3) 차원이 1보다는 크고 2보다는 작은 도형은 1차원 선분을 반복적으로 첨가함으로써 얻을 수 있음을 학생들에게 상기시킨다. 분수 차원을 갖는 이와 같은 대상들이 바로 차원분열도형임을 설명한다. 차원분열도형은 무한히 자기 유사성을 갖는 대상들로 각 조각은 전체 도형과 닮음의 성질을 가지며, 어떤 도형에 반복적으로 첨가하거나 제거함으로써 만들어지는 것이다. 다시 말해서 반복된 절차의 극한으로 얻어지는 대상을 차원분열도형이라 한다.

나. 또 다른 차원분열 도형

<준비물> Overhead Master 2, y^x 기능을 가진 계산기(각 학생당 1개씩)

[Overhead Master 2] 또 다른 차원분열도형



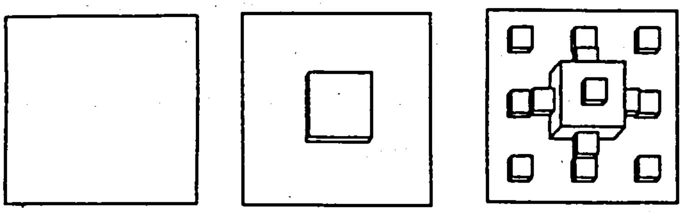
0단계 1단계 2단계

1) 앞의 예에서와 같이 네 가지 절차를 이용하여 다음과 같은 반복에 의해 획득된 도형의 차원을 계산하게 한다. "각 삼각형의 중앙 1/4을 제거한다."

2) 계산기로 차원분열도형의 차원을 계산하기 전에, 어떤 두 범자연수 사이에 차원이 있을까, 또는 어느 수에 더 가까울까에 대한 각자의 추측을 적게 한다.

3) 차원을 추정하기 위한 네 가지 절차를 완성하게 한다. 다시 소수 근사의 정확성의 합리적인 수준을 결정하게 한다. 여기서는 $2^d=3$ 에서, $d=1.585$

<심화 활동> "정사각형 영역의 중앙 1/9에 정육면체를 하나씩 더하여" 만든 차원분열도형의 차원을 계산하여라. 여기서는 $3^d=13$ 에서, $d=2.335$



0단계 1단계 2단계

Ⅳ. 결론

분수와 비율의 개념을 이용한 차원분열도형의 차원 탐구의 교육적 시사점을 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 범자연수 범주의 차원만을 생각하는 사고의 틀을 확장시켜 사고의 폭과 깊이를 함께 추구함으로써 유연한 사고력의 신장에 도움이 될 것이다.

둘째, 자연 현상의 관찰과 기하학적 대상들의 탐구 과정을 통하여 '실험 수학'으로서

의 수학적 활동을 직접 체험함으로써 역동적인 수학의 힘과 가치를 새롭게 느낄 수 있을 것이다.

셋째, 현대 사회에서 기술공학의 총아라고 할 수 있는 계산기와 컴퓨터를 활용한 수학적 활동의 과정에서 '지수와 로그'라고 하는 수학적 개념에 자연스럽게 접근할 수 있을 것이다.

넷째, 1980년 'Mandelbrot Set'의 발표 이후에 비로소 정립되어 고전적인 차원분열도형의 생각들을 포괄하는 현대수학의 산물이라고 할 수 있는 차원분열도형 탐구가 교실에서 구현됨으로써 수학 교육 활동에 신선한 바람을 불러일으키는 계기가 될 것이다.

참 고 문 헌

김순덕(1994). 중등교육에서 프랙탈에 대한 연구. 한국교원대학교대학원 석사학위 논문.

Curcio, F.R., & Bezuk, N.S.(1994). ***Understanding Rational Numbers and Proportions.*** In Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Addenda Series Grades 5-8. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Peiten, H., Jürgens, H., & Saupe, D.(1992). ***Fractals for the Classroom, Part one Introduction to Fractals and Chaos.*** NY: Springer-Verlag.