# 初·中等學生들의 數學的 文化 形成을 爲한 敎授/學習 模型 開發 研究

김 수 환 (청주교육대학교)

## Ⅰ. 서론

세계적으로도 유명한 한국인의 교육열에 부응하여 그 동안의 많은 학생들이 수학 공부에 열중해 온 노력에 비해 현실적으로 거둔 성과는 과연 만족할 만한 것인가? 그 동안의 노력들이 수학 그 자체를 가치 있는 교과라고 생각하기보다는 대학 입시와 같은 관문을 통과하기 위한 수단으로서의 수학에 대한 열정의 표출은 아니었던가? 이러한 질문에 대하여 강한 긍정도 강한 부정도 하기는 어렵지만, 수학 교육의 세계적인 동향들을 신중히 고려하고 우리의 수학 교육 경험을 거울삼아 미래 사회에 대비하여 진일보한 교육의 장을 마련할 필요가 있다.

근본적으로 교육을 사회화의 과정으로 본다면 수학교육도 문화적, 사회적, 제도적, 교육적, 개인적 수준의 가치들을 고려해야 할 것이다. 학습자는 기성 세대의 문화를 선택적으로 수용하는 반면 새로운 문화를 만들어 나감으로써 미래 사회의 주역이 되리란 점을 염두에 두고 미래 사회에서 중요하게 취급될 수학적 문화의 가치가 무엇인가를 규명함과 아울러 이를 토대로 한 수학 교육이 이루어져야 할 것이다. 또한 수학 교육의 세계적인 동향을 보아도 수학적 내용에 대한 학습의 결과 뿐 아니라 과정으로서의 수학적 활동에 중점을 두고 있다. 이는 수학 공부를 하기 어려워하는 것은 수학적 개념의 결핍 때문이라는 종전의 주장보다는 의사소통의 장애 때문이라는 연구들이 많아지고 있음과 맥을 같이한다. 또한 언어 교육에서도 문법적 지식에 강조 점을 두기보다는 의사소통 능력에 강조 점을 두는 것이 일반적인 추세이다.

이에 착안한 본 연구의 목적은 다음과 같다. 첫째, 사회·문화적 관점에서의 수학 교육과 문화적 활동에 내재한 수학으로서의 민속수학(ethno- mathematics)의 교육적 시사점을 도출한다. 둘째, 수학적 문화의 형성을 위하여 교수/학습에서의 상호작용과 의사소통으로서의 수학 교육에 입각한 새로운 시각에서의 교수/학습의 방향

을 정립한다. 셋째, 학생들 각자에게 의미 있는 수학적 경험을 제공하여 수학적 힘을 실현할 수 있도록 하는 교수/학습 모형을 개발하는 것이다. 넷째, 개발된 교수/학습 모형을 토대로 수학적 활동과 의사소통을 활성화할 수 있는 구체적인 수업 방법을 모색한다.

1. 연구 문제

가. 사회·문화적 관점에서의 수학 교육과 문화적 활동에 내재한 수학으로서의 민속수학의 교육적 시사점은?

나. 수학적 문화의 형성을 위한 새로운 시각에서의 교수/학습의 방향은?

다. 수학적 문화의 형성을 위한 교수/학습 모형은?

라. 개발된 교수/학습 모형을 토대로 한 구체적인 수업 예시 안은?

2. 용어의 정의

가. 數學的 文化

문화의 개념은 인류학적 관점에서는 '전체적인 삶의 방식'으로서의 총체적인 활동과 문화 유물로 볼 수 있으며, 지적 예술적 활동의 산물, 예술, 오락 등과 같이 단계적으로 좁혀서 생각할 수도 있다. 문화는 理念的 範疇, 社會學的 範疇, 情緖的 範疇, 技術的 範疇의 상호 관련된 네 가지 要素로 구성되지만, 道具와 手段의 製造와 利用에 관한 技術的 要素가 가장 基本的인 것으로서 다른 요소들의 형태와 내용을 결정한다. 문화의 기술적 요소는 기계류나 장비들에 제한되는 것이 아니라 기호체계들과도 관련된다. 가장 중요한 기호체계는 말과 글이겠지만 더욱 중요한 것은 쓰여진 언어이며, 물론 수학적 기호도 매우 중요한 요소이다.

인간의 문화 형성에 큰 변화를 가져온 것은 인간의 행동, 감각 체계, 추론 기능을 증폭시키기 위하여 문화적으로 구안된 도구들로 자동차와 망치, 레이더, 언어와 수학적 표상 등을 들 수 있다. 명수법 체계는 인간의 기억 용량의 한계를 초월하여 셈하고 기록할 수 있는 인간의 능력을 증폭시켰으며, 자릿값 체계는 대상들의 조작이나 口頭的 계산을 통한 가능성을 초월하여 셈하기와 계산의 범위를 확장시켰다. 수학적 표상 체계는 사람들이 이미 마음속에 간직한 의미들을 단순히 표현하는 것이 아니라 문화적으로 정의된 관습과 주요한 논리적 구조의 이용으로 인간의 지식을 발전시킨다. 수학은 매우 탁월한 "인간의 추론 능력의 증폭기"로서 문화 발전의 중요한 원동력이었으며 모든 문화에 존재한다.

일반적으로, 수학적 문화란 '수학적 부분 문화' 또는 '문화의 수학적 요소'라 할 수 있으며, 보편적인 수학적 문화의 공분모라고 할 수 있는 구체적인 요소인 환경적인 활동으로서의 셈하기, 위치 잡기, 측정하기, 설계하기, 놀이, 설명하기 등과 아울러 좀 더 고유한 민속적 관점의 문화적 활동들에 깊이 내재된 각양 각색의 다양한 수학적 형태들을 포함하는 것으로 한다.

나. 數學的 文化의 價値와 水準

수학적 문화의 이념적 차원에서의 가치는 객관성과 합리성, 정서적 차원에서의 가치는 통제성과 진보성, 사회학적 차원에서의 가치는 신비성과 개방성이 있다. 또한 수학적 문화의 수준은 비형식적인(Informal) 수준, 형식적인(Formal) 수준, 기술적인(Technical) 수준이 있는 것으로 본다. 비형식적인 수준, 즉 I 수준에서는 모두 수학의 기호화와 개념화를 은연중에 그리고 부정확하게 사용한다. 형식적인 수준, 즉 F 수준에서는 기호화와 개념화의 이용은 계획적이고 의식적이며 명백하다. 또한 기술적 수준, 즉 T 수준에서는 수학적 기호 체계가 발전되고 비판되며 수학자들이 수학적 문제를 연구하는 수준이다.

다. 수학적 문화 형성(ME)

수학적 문화란 어떤 다른 문화와 같이 살아 움직이는 과정 중에 있는 것으로, '개방성'의 가치에서와 같이 수학적 문화는 일부의 사람들이 배타적으로 '소유해서는' 안된다. 또한, 교육적 관점으로 볼 때 가장 중요한 것은 수학적 문화의 F 수준이다. T 수준과 I 수준은 모두 F 수준으로 유입되어 F 수준이 영향을 받기도 하지만, 또한 다른 것들을 지탱해주기도 한다. 우리 사회에서 수학을 가치 있게 하는 핵심적인 것은 수학의 형식적 문화라는 점에서 수학적 문화 형성(Mathematical Enculturation)은 F 수준의 수학적 문화 형성을 의미한다. 수학적 문화 형성의 과정은 본질적으로 수학 교육의 목적과 내용의 객관적인 표현인 의도된 교육과정의 수행과 성취를 위하여 어떤 형식적이고 제도적인 상황 하에서 교사와 학습자 사이에 발생하는 상호작용의 현상이다. 즉, 어떤 지식의 틀 내에서 수행되지만 그 틀을 재창조하고 재 정의할 목적으로 수행되는 상호작용의 과정이다. 이 과정은 무엇보다 사회적 상황을 중시할 뿐 아니라 학습자를 위한 인본주의적인 것이므로, 교사는 구체적인 내용의 전수에 초점을 둘 것이 아니라 수업에 참여한 학습자의 상호작용에 초점을 두어야 한다.

## Ⅱ. 수학교육에 대한 사회·문화적 관점

수학적 문화 형성의 목적은 학교에서 배운 수학이 개인의 사회·문화적 생활에서 힘을 발휘할 수 있게 하는 것이다. 이는 모든 학생들에게 수학자들의 문화를 전수해야 함을 의미하는 것은 아니다. 단지 오랜 인류의 문화 발전에 크게 기여한 수학적 요소인 가치 있는 활동으로서의 수학적 문화를 형성하게 함을 의미한다. 문화적 활동에 내재한 수학으로서의 민속수학을 포함한 문화적 현상으로서의 수학적 문화 형성을 실현하기 위해서는 교육과정과 교수/학습의 측면을 고려해야 할 것이다.

첫째, 교육과정의 측면에서는 활동 중심의 교육과정이 요망된다. 수학적 문화의 공통적인 활동으로 구성된 개념 중심의 요소인 셈하기, 위치 잡기, 측정하기, 설계하기, 놀이, 설명하기 등을 기본적인 틀로 삼아야 한다. 여기에 더하여 수학적 문화를 예증할 수 있는 전형적인 탐구 자료들로서의 문화적 요소와 함께 역시 수학적 지식 발달의 전형적인 예제를 구현하는 사회의 중요한 프로젝트들을 포함해야 한다. 기존의 교육과정과 다른 점은 내용보다는 활동을 중심으로 한 개념, 탐구, 프로젝트 등을 중요한 것으로 본다는 것이다.

대부분이 서양수학이라 할 수 있는 오늘날의 학교수학은 실용적 목표, 도야적 목표, 문화적 목표, 사회적 목표와 같은 4가지 목표를 지향하는 것으로, 명제의 체계라 할 수 있는 수학적 진리와 사회적 의사소통의 수단으로서의 잘 정비된 언어·기호(표기) 체계의 두 가지 측면을 가진다. 범세계적인 공통 언어로서의 수학은 물리학, 천문학, 고고학, 예술, 스포츠 등의 여러 가지 분야에 잘 이용되고 있으며, 우리의 일상 생활 중에도 잘 이용되고 있다. 이것이 학교에서 수학을 가르치고 학생들이 학습하는 이유이다. 문화 발전의 중요한 원동력인 동시에 우리 문화의 통합적인 부분인 수학의 발전은 '환경적 요청'이나 '수학 내적 요청'에서 비롯된다. 일상적인 도구로서의 수학적 활동들을 수학 교실에서 대상화할 수 있을 뿐 아니라 지적 호기심을 충족시킬 수 있는 것이어야 한다.

둘째, 교수/학습의 측면에서는 주어진 지식의 전수에 초점을 두기보다는 가치 있는 사회·문화적 활동들을 중심으로 한 '수학적 문화 형성'의 과정에 초점을 두어야 한다. 이는 교육과정에 제시된 활동들을 중심으로 수학적 문화를 새롭게 형성해 가는 과정으로, 교수/학습의 구성주의적 관점에다 그 구성의 상황을 문화적으로 특수하게 설정해주는 '문화 형성 과정'이어야 함을 의미한다. 오늘날 세계적으로 대동소

이한 수학의 내용을 활동 중심의 개념, 탐구, 프로젝트 등으로 구성된 교육과정에 의거하여 이를 보다 효율적으로 교수/학습하기 위하여 문화적 활동에 내재한 수학으로서의 민속수학과 일상적인 도구로서의 수학에 대한 관심이 요망된다. 즉, 자기가 속한 고유한 문화의 민속수학의 사고방식과 아이디어 등을 살리면서 아울러 다른 문화권의 민속수학의 사고방식과 아이디어 등을 활용할 것이 요구된다. 한편, 도구로서의 일상의 지식과 대상으로서의 학교에서의 지식의 차이는 있지만, 성공적인 수학적 개념화를 위해서는 학습자가 도구로서의 개념에 이미 접근해 있는 상황이 대상으로서의 개념으로의 전이에 용이하다. 또한 핵심 개념과 관련된 여러 가지 상황의 이해와 자연 언어를 통한 원래 상황의 표상은 도구에서 대상으로의 개념의 전이를 도울 수 있다.

수학적 문화 형성의 과정은 개인간의 상호 작용 과정이라는 것이 핵심이기 때문에 '교육 제도'에 호소하는 것보다는 이러한 과정에 대한 구체적인 책임감들을 가진 사람들의 역할이 더 중요하다. 수학적 문화 형성 담당자는 교사, 교사교육자, 상담자, 장학관, 교육과정 개발자, 자원 제공자, 연구자들을 말하지만 이들 중 가장 중요한 역할을 하는 사람은 교사이다. 그러나, 학습자의 수학적 문화 형성의 책임을 전적으로 교사에게 일임할 것이 아니라, 수학 교육 공동체의 공동의 노력이 요망된다. 또한 교사들도 학교와 교실에서의 전문적인 역할에 국한할 것이 아니라 그러한 제한을 초월한 전문적인 영향력을 발휘할 수 있어야 한다. 수학적 문화 형성은 그 형식적 수준의 문화 형성에 초점을 두는 것이므로, 학교수학과 통합교과적 수학이 중요한 대상인 것은 두말할 나위도 없다. 그런데, 문화의 수학적 요소로서의 수학적 문화란 셈하기, 측정하기, 설명하기 등의 환경 적인 활동 뿐 아니라 고유한 민속적 관점의 문화적 활동들에 내재된 다양한 수학적 형태들을 포함하는 것이다. 인류의 훌륭한 문화 유산으로서의 가치 있는 수학적 문화를 새롭게 형성하도록 하기 위해서는 생활수학의 실용성 뿐 아니라 민속수학의 독창성이 교수/학습의 과정에서 구현되어야 한다.

## Ⅲ. 수학적 문화 형성을 위한 상호작용과 의사소통

기존의 교수/학습 이론들로서의 유의미 학습 이론과 수학의 교수/학습에 관한 구성주의자 관점 등은 수학적 문화 형성을 위한 교수/학습의 방향에 시사하는 바가

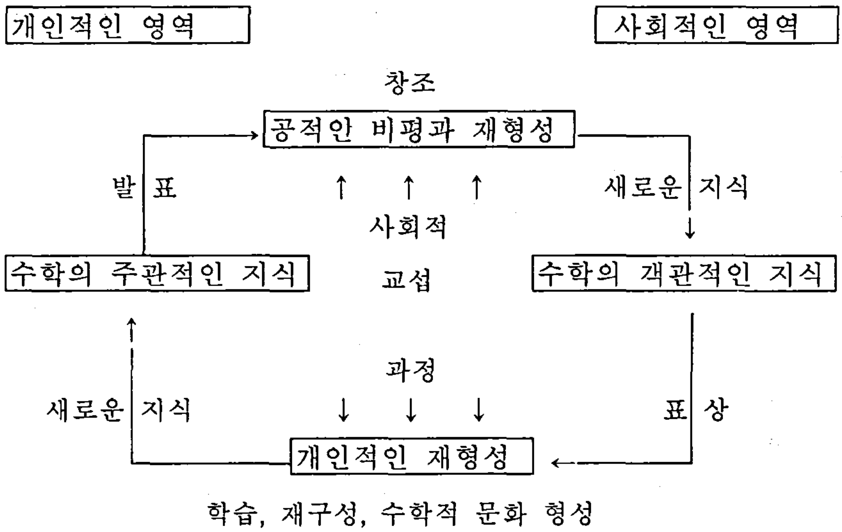
많다. 칸트는 주체를 중시하는 사상으로서의 합리론과 객체를 중시하는 사상으로서의 경험론을 통합하여 지식을 '구성된 현실'이라는 현상학적 영역에 올려놓음으로써 구성주의의 초석을 마련하였다. 사회적 구성주의자들은 수학의 객관적인 지식은 인간의 사회적인 활동들과 상호작용과 규칙들에 존재하며 이들을 통하여 개인들의 주관적인 지식과 언어와 사회생활에 의해 지원을 받는데, 이들은 계속적인 재 창출을 필요로 하는 것이라고 주장한다. 즉, 개인적인 영역에서의 수학의 주관적인 지식이 발표되어 공적인 비평과 재형성의 과정을 거쳐 사회적인 영역에서의 새로운 지식으로서의 수학의 객관적인 지식으로 자리를 잡는다. 한편, 수학의 객관적인 지식은 표상에 의한 개인적인 재형성 과정을 거쳐 개인적인 영역에서의 새로운 지식으로서의 수학의 주관적인 지식으로 자리를 잡게 된다. 여기서 수학적 문화 형성은 수학의 주관적인 지식으로부터의 공적인 창조와 수학의 객관적인 지식으로부터의 개인적인 재구성의 순환적인 과정으로 볼 수 있는데, 이들 간의 사회적 교섭이 강조된다. 그러나, 구성의 상황이 문화적으로 특수하다는 점을 염두에 두어야 한다. 수학적 문화 형성의 과정에서는 일상적인 도구로서의 수학적 개념을 포함한 상황과 함께 문화적 활동에 내재한 민속수학을 교실에서의 학습 대상으로 옮겨올 경우에 이들은 해결해야 할 문제라기보다는 이야기할 자료가 된다는 점에서 의사소통으로서의 수학 교육의 필요성이 대두된다.

수학의 학습에서 아동들의 어려움은 개념적 결핍보다는 의사소통의 장애에서 기인한다고 보고 아동들의 수학적 활동과 상호작용에 의한 의사소통을 활성화하기 위한 교수/학습의 새로운 지평을 모색하여야 한다. 수학은 창의적인 인간의 활동이며 교실에서의 사회적 상호작용은 학생들이 수학을 학습할 때 중요한 역할을 한다. 또한 정보화 사회에서 수학을 세계적인 공통언어로 본다면 의사소통으로서의 수학교육의 사회적 목표를 실현하여야 한다. 따라서 언어 교육에서도 문법적 지식에 강조점을 두기보다는 의사소통 능력에 강조 점을 두는 것이 일반적인 추세라는 점을 고려하여 수학적 생각들의 의사소통 활성화를 통한 교수/학습 전략의 재 구조화가 요망된다. 이러한 시각으로 본 교수/학습의 방향은 다음과 같다.

첫째, 수학의 교수/학습을 학습자의 수학적 문화 형성을 위한 과정으로 볼 때, 문화적 관점에서의 폭넓은 수학적 활동을 통한 학습자들의 상호 작용의 활성화가 절실하다. 이를 위해서는 수학적 문화의 가치들 중에서, '객관성'보다는 '합리성', '통제성'보다는 '진보성', '신비성'보다는 '개방성'을 강조함으로써, 수학적 지식의 절대주의

보다는 상대주의를 지향하는 발상의 전환이 필요하다. 우리는 교수/학습의 과정에서 수학을 형태들의 연구를 포함한 동적인 교과로 봄으로써 생생한 토론과 탐구를 통한 개방적인 상호 작용의 활성화를 기대할 수 있을 것이다. 가령, 소집단 활동 과정에서 학생들 간의 상호 의견의 교환과 상대방의 설명에 대한 요구와 같이 언어의 상호 작용의 효과를 얻을 수 있도록 수업을 조직화해야 할 것이다. 다시 말해서, 교수/학습의 새로운 방향은 학습자와는 별도로 존재하는 다른 사람들의 수학을 대상으로 공부할 것이 아니라, 전세계적으로 공유할 수 있는 수학적 활동들과 아울러 고유한 민속 수학적인 활동들이 융합된 독창적인 수학적 문화의 형성을 위한 상호 작용의 과정이어야 한다.

수학의 객관적인 지식은 인간의 사회적인 활동들과 상호작용과 규칙들에 존재하며 이들을 통하여 개인들의 주관적인 지식(과 언어와 사회생활)에 의해 지원을 받는데, 이들을 계속적인 재 창출을 필요로 하는 것이라고 사회적 구성주의자들은 주장한다. 수학에 대한 사회적 구성주의자의 관점은 주관적인 지식과 객관적인 지식이 서로 돕고 의존하는 입장에 두는 것이다. 주관적인 지식은 사회적 상호작용과 수용을 통하여 수학적 지식을 창출해낸다. 즉, 주관적인 지식은 객관적인 지식을 유지시키고 재창출하며, 객관적 지식은 개인들의 주관적 지식에 의거한다. 객관적 지식의 표상은 주관적 지식의 발생이자 재창조를 가능하게 하는 것이다. 이는 순환적인 창조로 설명할 수 있는데, 주관적인 지식이 객관적인 지식을 창출하고 다시 객관적인 지식은 주관적인 지식의 창조로 이어진다. 다음 <그림 1>은 주관적인 지식의 개인적인 영역과 객관적인 지식의 사회적 영역 사이의 연결을 보여주는 것으로 각각 서로의 창출을 지탱해주는 역할을 한다. 이를 위해서는 각각이 공개적으로 표현되어야 한다. 그런 다음에 상호작용 적이고 사회적인 교섭 과정이 있어서 지식의 재형성과 함께 새로운 지식으로서 다른 영역에의 구현에 이른다(Ernest, 1991).




<그림 1> 수학의 객관적인 지식과 주관적인 지식의 관계

수학은 창의적인 인간의 활동이며 교실에서의 사회적 상호작용은 학생들이 수학을 학습할 때 중요한 역할을 한다는 관점에서의 수업은 아동들 자신의 비 표준적인 방법의 구성, 문제해결 활동으로서의 수학의 학습, 수학의 학습에 있어서의 상호 작용의 역할 등 세 가지 측면을 고려해야 한다(Yackel, Cobb, Wood, Wheatley, & Merkel, 1990).

둘째, 수학적 문화 형성을 위한 교수/학습에서의 의사소통의 활성화가 필요하다. 여기서 은유는 단지 시의 장식적인 고안품에 해당하는 것이 아니라 세계관을 창출하기 위한 중심적인 언어적 전략들 중의 하나이며, 수학의 주관적인 지식과 객관적인 지식의 교섭을 위한 도구로 볼 수 있다. 언어 교육에서 문법보다는 의사소통 능력을 강조하는 것처럼 수학 교육에서도 가치 있는 사회·문화적 활동을 중심으로 한 개념, 탐구, 프로젝트 등을 통하여 수학적 문화를 새롭게 형성해가도록 해주어야 한다.

교수/학습 과정에서의 의사소통의 방법은 듣고 말하는 것과 읽고 쓰는 것으로 요약할 수 있다. 우선 말하기 의사소통을 위해서는 자신의 사고를 조직화하는 탐색적 대화와 함께 누군가에게 어떤 정보를 이해시키는 설명적 대화를 북돋워야 한다. 이를 위해서는 비언어적 전략과 언어적 전략의 개발이 요망된다. 수학 교실에서의 말

하기 의사소통에서 수학적 '통용어'로서의 수학 언어사용역의 창출은 은유와 유추에 의하는 경우가 많다. 원래, 유추란 용어는 그리스 수학에서 쓰이던 '비례'라는 의미의 'analogia'를 그리스 문법가들이 차용하였는데, 오늘날의 수학 교육에서 유추와 은유의 언어적 의미를 역으로 이용하고 있음은 '유추의 부메랑 효과'라 할 수 있다

말하기의 무형적 성질은 영구성을 감소시키므로 잘 변형되고 재해석될 수 있는 반면에 쓰기 언어의 주요한 특성은 볼 수 있다는 것이므로 어느 정도의 영구성과 반복가능성을 갖는다. 기록의 유형은 말로 쓰기, 혼합형 쓰기, 기호로 쓰기의 세 가지를 생각해볼 수 있는데, 기호로 쓰기는 높은 수준의 기록 방식으로 대부분의 수학 교사들이 지향하는 방식이지만 이를 조급하게 서두르는 것은 옳지 못하다. 한편 언어학에서의 전형적인 구문론인 촘스키의 변형 이론은 구구조문법과 변형의 요소를 포함한다는 점을 염두에 두고서 수학에서도 구조적 설명과 구조적 변화의 요소들을 탐구하여 이용할 수 있다.

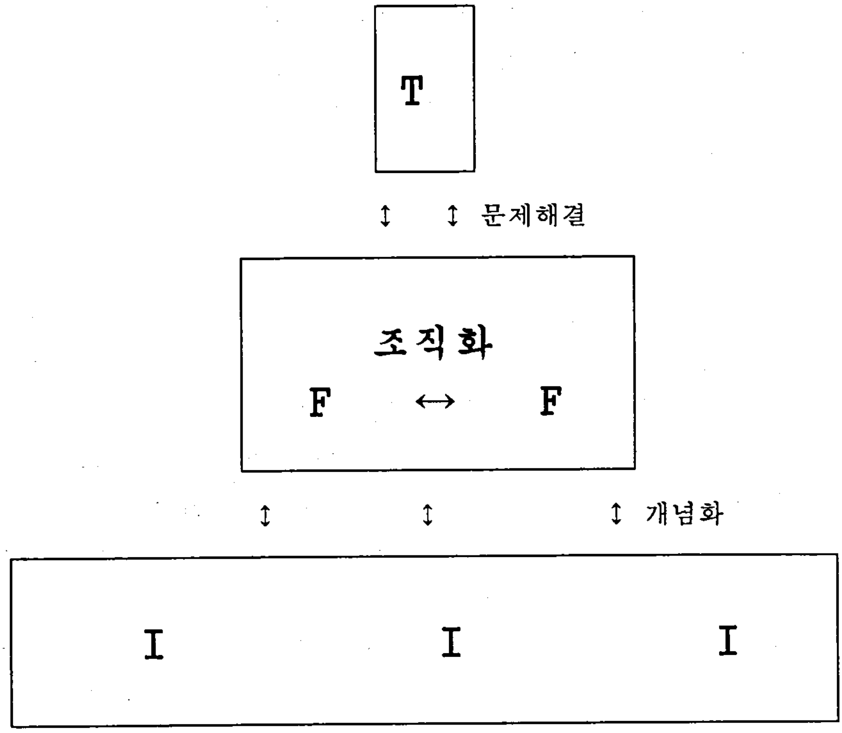
이러한 노력들이 교수/학습의 과정에서 구현될 때, 아동들의 수학적 경험들의 공유와 대조의 과정을 통한 수학적 의미의 사회적 구성이 가능할 것으로 보여진다. 즉, 동일한 개념이라 할 지라도 의사소통을 통하여 그 다양한 경험의 폭을 넓혀주는 것이 수학적 문화 형성의 바탕이 될 수 있을 것이다.

## Ⅳ. ME 교수/학습 모형

수학적 문화의 '객관화된' 표현으로서의 지식의 틀 내에서 수학적 문화 형성의 과정은 본질적으로 어떤 구체화의 과정, 즉 개념, 의미, 과정과 가치들이 어떤 준거에 따라 형성되어 가는 과정이므로 그것은 생각들을 형성해가는 의도적인 과정이다. 따라서 이 과정의 목적은 앎의 방식을 아동 각자가 발전시키도록 하는 것이다. 이러한 문화 형성 관계에는 세 가지 특성들이 있다. 하나는 문화 형성 관계의 非對稱的 本質에 관한 것으로 교사는 그 과정에 역동성을 부여하기 위하여 교사의 힘을 정당하게 이용하고, 학습자들의 구성적이고 협동적인 참여를 고무시키며, 자신의 영향력을 촉진적으로 이용해야 한다는 것이다. 다른 하나는 意圖的 側面이라고 하는 것으로 교사는 학습자가 기호적 요소에서의 개념들을 가능한 한 많이 경험하고 문화적, 사회적 요소들 내에서의 전형적인 예제들을 선택하여 구현하도록 하기 위한 개념적인 환경, 탐구적인 환경, 프로젝트 적인 환경 등을 제공해야 한다. 그리고 우

리가 수학적 생각들에 관련되어 있다는 사실에 관한 것으로서의 觀念的 對象化를 위하여, 교사는 학습자가 수학적 생각들의 공유와 대조를 통하여 의미를 사회적으로 구성하게 하고 설명을 구체화할 수 있게 해야 한다.

수학적 문화 형성은 어떤 지식의 틀 내에서 수행되지만 그 틀을 재창조하고 재정의할 목적으로 수행되는 사회·문화적 상호작용의 과정이다. 수학적 문화 형성을 위한 ME 교수/학습 모형의 기본 철학은 수학적 문화의 형식적 수준에 있는 사람들의 수학적 지식의 집합 F의 영역을 확대시키는 것이다. 교실에서는 지적으로 도전적인 수업 환경을 만들기 위하여 교사와 학생이 모두 수업의 주역이 되고, 가정에서는 학생이 수학적 문화의 주도자가 되고, 사회 생활에서는 대중이 모두 수학을 가까이하고 수학의 가치를 더욱 소중히 여기도록 하는 계기를 마련해야 한다. 이러한 수학적 문화 형성의 과정을 구현하기 위한 ME 교수/학습의 일반 모형은 다음 <그림 2>와 같다.




<그림 2> 교수/학습의 ME 일반 모형

위의 <그림 2>는 수학적 문화 형성을 위한 ME 일반 모형이라 볼 수 있으며, 이는 단계별로 기본 모형, 확장 모형, 완성 모형으로 나누어 생각해볼 수 있다. 활동 중심의 문화적 현상으로서의 수학 교육과정이 만족할 만한 수준으로 구비된 상황이라면, 기본 모형만으로도 수학적 문화 형성을 성공적으로 이룰 수가 있을 것이다. 그러나, 현행의 교육과정이 전형적인 수학적 문화를 예증해줄 만한 다양한 탐구 활동이나 프로젝트 활동을 안내하지 못하다는 전제하에, 이러한 활동을 활성화할 수 있는 방안으로서 확장 모형과 완성 모형을 제시하였다. 확장 모형은 특히 고유한 문화 속의 독특한 수학적 탐구 활동이나 다른 문화 속의 가치 있는 수학적 생각들을 공유하고 대조하는 활동을 활성화하기 위하여 학부모들이 학습자와 함께 상호작용할 수 있는 활동들의 개발을 위한 것이다. 또한 완성 모형은 직접적인 프로젝트를 통하여 여러 가지 사회적 문제의 해결에 수학적 활동이 유용하게 활용될 수 있음을 인식하게 함으로써 수학의 가치와 유용성을 인식하고 수학적 활동을 생활화하는 질 높은 문화를 형성하게 하자는 것이다.

1. ME 基本 模型

ME 基本 模型은 개념 중심의 記號的 요소를 교수/학습하기 위한 교사⇔학생간의 상호 작용에 초점을 둔 것이다. 기호적 요소는 수학에서 설명력 있는 중요한 개념들로 이루어진 것이므로, 이 모형에서의 교수/학습은 학습자의 환경에 기초를 둔 보편적이고 광범위한 수학적 활동과 의사소통의 활성화에 의한 상호작용에 초점을 두는 것이다.

가. 개념화

개념화 단계는 $I_1$ 수준의 다양한 활동과 경험을 $F_1$ 수준과 연계시키는 단계이다. 이를 위해서는 광범위하고 포괄적인 학습 경험을 갖도록 해야 한다. 여러 학생들의 활동성과 개성의 존중에 중점을 두어야 할 것이므로, 개념적 지식(Hiebert & Lefevre, 1986)의 획득에 도움이 되는 보편적이고 다양한 교수/학습 활동들이 요구된다. 개념화의 범주에는 수학적 지식의 회상, 표상 등이 포함되는 것으로 하되, 학습자의 활동과 의사소통이 중요한 역할을 하므로 교사는 이를 고무할 뿐 아니라 적절히 조절하여야 한다. 자연 언어를 통한 사회·문화적 경험들의 공유와 대조를 통하여 수학적으로 공인된 언어사용역을 이용한 의사소통의 활성화가 그 초점이다.

<사례 1> 분수의 개념화

문제 상황을 제시하여 여러 가지 활동을 함으로써 분수 개념을 다양하게 구성할

수 있다.

| 다섯 개의 초콜릿을 여섯 명의 아동이 똑 같이 나누어 가지는 방법(Bidwell, 1982: Bishop and Goffree, 1986)에서 스코틀랜드의 4개 초등학교의 10-12세 아동 300명은 무려 28가지의 서로 다른 방법을 생각하였다고 한다. |
|---|

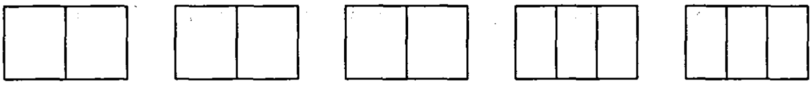
세 가지의 두드러진 방법은 다음과 같았다.

<그림 3> 초콜릿 분할도(1)

첫 번째 방법은 <그림 3>와 같이, 다섯 개 각각의 초콜릿을 6등분하여 여섯 명 각자가 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 5/6 씩 갖는 방법이었다.

<그림 4> 초콜릿 분할도(2)

두 번째 방법은 <그림 4>와 같이, 어느 한 명이 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 5/6 를 갖고, 나머지 다섯 명은 1 - 1/6 = 5/6 를 갖는 방법이었다.



<그림 5> 초콜릿 분할도(3)

세 번째 방법은 <그림 5>와 같이, 여섯 명 각자가 세 개의 초콜릿을 각각 이등분하고 나머지 두 개를 삼등분 하여 1/2 + 1/3 = 5/6 씩 갖는 방법이었다.

그 이외에는 거의 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/12 = 5/6,

1/3 + 1/3 + 1/6 = 5/6,

6/9 + 1/6 = 5/6

의 범주에 포함되는 활동들이었다고 한다.

나. 조직화

조직화 단계는 $F_1$ 수준의 개념이나 용어들이 상호 작용하여 정교화된 지식의 체계를 갖도록 하는 단계이다. 비 형식적인 수준의 수학적 사실들이 형식적 수준의 개념화 또는 기호화로 연결된 상태에서, 학생들 각자는 기존의 지식 체계에 새로운

개념적, 절차적 지식을 첨가하여 확장된 지식의 연결망을 갖추어가도록 해주어야 한다. 주로 수학의 형식적 수준의 기호들 간의 정교화가 발생하고 개념적 지식과 절차적 지식이 상호 작용하는 단계이므로, 조직화의 범주에는 간단한 추측, 증명 방법의 선정, 문제해결의 알고리즘 등이 포함되는 것으로 볼 수 있으며, 선행조직자의 제시와 활발한 의사소통이 중요한 역할을 한다.

<사례 2> 비교조직자의 제시

인수분해를 교수/학습할 때 곱셈공식을 알고 있는 상태에서 전개와 인수분해의 유사점과 차이점을 지적하는 비교조직자에 해당하는 선행조직자의 제시는 인수분해 학습의 효율성을 높여 준다.

| |
|---|
| 인수분해와 곱셈공식의 관계는 역의 관계로 동치인 두 식 사이에 상호 가역성이 있음을 알게 함으로써 비교조직자는 학습 내용을 보다 명확하게 해주며, 인수분해에 관한 새로운 정보를 곱셈공식에 관한 이전의 정보에 관련지어 정착시킴으로써 안정성을 준다(Bell, 1978; 김수환, 1994). |

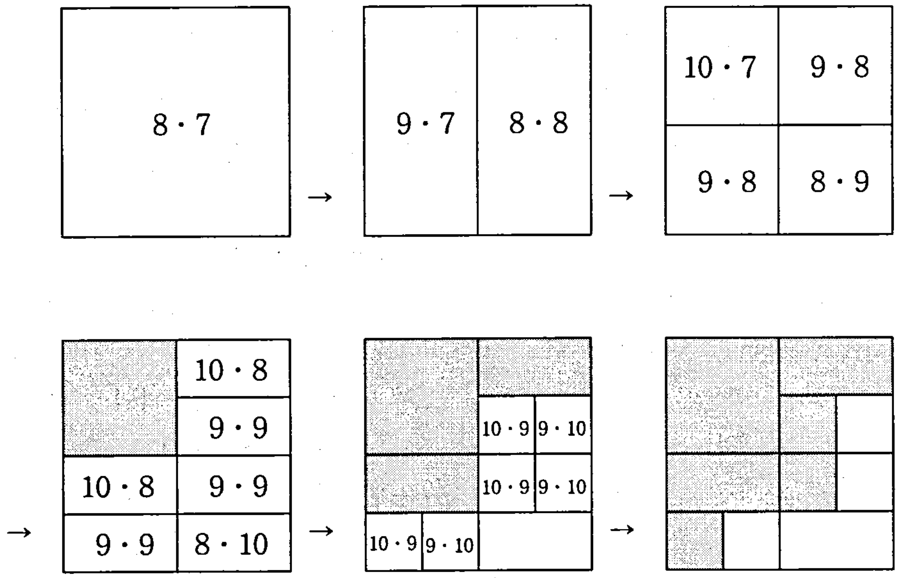
다. 문제 해결

문제 해결 단계는 정교 화된 수학적 용어와 개념의 지식 체계를 가진 $F_1$ 수준을 $T_1$ 수준으로 발전시키는 것을 의미한다. 새로운 수학적 개념이나 절차의 발견에 해당하는 창의성의 발현을 도모해야 한다. 이를 위해 학습자 개인에 있어서 머리 속에 짜여져 있는 지식의 연결 망을 토대로 새로운 문제 상황이 제기되었을 때, 당장에는 쉽게 해결될 수 없지만 주어진 문제 상황을 의식하고 해결하려는 도전 의식을 고무시키는 학습 환경을 만들어 주도록 한다. 문제해결의 범주에는 개념화나 조직화의 범주에 속하는 활동들이 모두 포함되는 것으로 볼 수도 있지만, 특히 복잡한 단계를 거쳐야 하는 추론이나, 수학 내외적 연결성 등을 요구하는 활동을 포함하는 것으로 한다. 여기서는 상황적 문제 해결, 메타 과정에 대한 중시, 문제 해결 과정의 모델화 등이 요구된다.

<사례 3> 기하학적인 확률 모델

갑과 을 두 사람이 동전던지기를 하였다. 동전의 앞면이 나오면, 1점을 얻는 것으로 하여 먼저 10점을 얻은 사람이 피자를 혼자 다 먹기로 하였다. 그런데 갑이 8점, 을이 7점을 얻은 상황에서 시합이 중단되었다면, 피자는 어떻게 나누어 먹는 것이 바람직하겠는가? (NCTM, 1989)

중단된 동전던지기 게임에서의 피자의 분할 문제를 해결하기 위해서는 이후에 전개될 상황들의 경우를 따져 확률의 계산을 시도하려고 하는 경향이 많을 것이다. 그러나, 확률에 대한 학습을 하지 않은 경우라 할 지라도, 다음 <그림 6>과 같이 기하학적인 확률 모델을 구안할 수만 있다면, 참신하고 설득력 있는 문제 해결의 한 가지 전략이 될 수 있다.




<그림 6> 피자의 분할도

이는 수학적 문제 해결을 위하여 정형 적인 방법에만 의존할 것이 아니라 다양한 방법을 모색하게 하는 좋은 사례이다. 흔히들 영재교육이나 심화 과정의 교육을 생각할 때, 상급 학년의 교육과정을 조기에 도입하여 숙달시킴으로써 종적인 깊이를 추구하려는 경향이 있다. 이것은 마땅한 프로그램을 찾지 못한 연유도 있겠지만 너무나 손쉬운 방법에 의존하고 마는 매너리즘의 소산이라 볼 수도 있다. 진정한 수학적 문화의 형성을 위해서는 수학적 문제해결 활동의 종적인 깊이도 중요하지만,

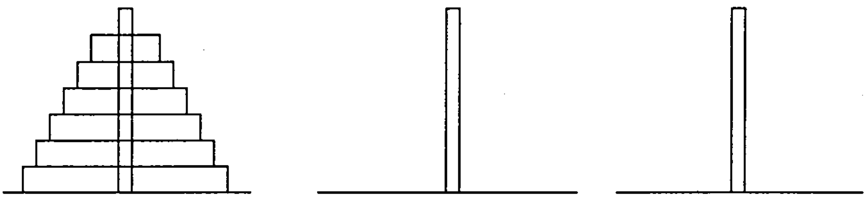
그 횡적인 폭이 중요한 것이라 볼 수 있다.

2. ME 擴張 模型

ME 擴張 模型은 개념 중심의 記號的 요소에 더하여 탐구 중심의 文化的 요소를 교수/학습하기 위한 교사⇔학생⇔학부모간의 상호 작용에 초점을 둔 것이다. 인간의 보편적인 활동을 중심으로 한 기호적 요소의 학습만으로 모든 학생들의 수학적 문화 형성을 이루기는 어려울 것이다. 따라서 이 모형은 기본 모형의 보완을 위해 모든 문화들에 존재하는 공통적인 탐구 자료와 다른 문화권에서 독특하게 보유하는 탐구 자료들로 구성된 文化的 요소들에 대한 탐구 활동을 강조한 것이다. 여기서 주목할 점은 이러한 문화적 현상으로서의 수학의 전형적인 탐구 자료들을 例證하고 具顯함으로써, 수학적 문화 형성을 도모한다는 것이다.

**다른 문화 또는 공통적인 탐구 사례** 하노이 탑 문제(The Tower of Hanoi problem: Ernest & Newell, 1969; Mayer, 1983; Holton, 1988)

<문제 상황> 다음 <그림 7>과 같이 세 개의 나무 막대기와 그 막대기에 꼭 맞게 끼울 수 있도록 가운데에 구멍이 나 있는 $n$ 개의 서로 다른 크기의 원판으로 이루어진 장난감이 있다. 처음에는 한 막대기에 모든 원판이 걸려있되, 가장 작은 원판이 제일 위에 걸려 있고 아래로 갈수록 점점 큰 원판들이 걸려있다.



<그림 7> 하노이 탑

<규칙> ㉠ 한 번에 한 개의 원판을 한 막대기에서 다른 막대기로 옮길 수 있다.

㉡ 작은 원판 위에는 큰 원판을 걸 수 없다.

<목표> 이러한 규칙에 따라 처음의 막대기 위에 있는 모든 원판을 다른 막대기에 옮겨 걸어야 한다.

(1) $n$이 1일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?(개념화)

(2) $n$이 2일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?(개념화)

(3) $n$이 3일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?(개념화)

(4) $n$이 4일 때는 몇 회의 시행을 해야 할까?(개념화)

(5) 어떤 규칙성을 발견할 수 있는가?(조직화)

(6) 수학적 귀납법에 의해 이러한 일은 ( $2^n-1$ )회의 시행으로 수행할 수 있음을 증명하여라.

(문제해결)

(활동 및 풀이)

(1) $n$이 1일 때; 1

(2) $n$이 2일 때; 3

(3) $n$이 3일 때; 7

(4) $n$이 4일 때; 15

(5) 3개인 경우 먼저 작은 것 2개를 옮긴 다음에 마지막 하나를 옮기고 다시 2개를 옮긴다. 즉, 3 + 1 + 3 = 7. 마찬가지로 4개인 경우에도 위의 3개를 먼저 옮긴 다음에 마지막 하나를 옮기고 다시 3개를 옮겨야 하므로 7 + 1 + 7 = 15이다.

(6) $n = k$일 때; $(2^k-1)$ 회의 시행이 필요하다면, $n = (k + 1)$일 때는 (5)에 의해 $(2^k-1) + 1 + (2^k-1) = 2^{k+1}-1$ 이므로 모든 자연수에 대하여 성립한다.

3. ME 完成 模型

ME 完成 模型은 개념 중심의 記號的 요소, 탐구 중심의 文化的 요소에 더하여 프로젝트 중심의 社會的 요소를 교수/학습하기 위한 교사⇔학생⇔학부모⇔사회 간의 상호 작용에 초점을 둔 것이다. 인간의 보편적인 활동과 문화적 현상으로서의 수학적 탐구 자료들의 탐구를 통해서도 수학적 문화의 형성을 실현하기는 쉽지 않을 것이다. 따라서, 이 모형은 기본 모형과 확장 모형의 완성을 위하여, 인간의 생활 터전은 사회라는 점을 토대로, 과거, 현재, 미래 사회를 중심으로 한 프로젝트를 실제로 학생들이 해결함으로써 수학적 문화 형성을 가능하게 하자는 것이다. 여기서 주목할 점은 社會的 요소로서의 프로젝트는 수학적 설명력을 다양하게 이용할 수 있는 전형적인 사례를 例證하고 具顯함으로써 수학적 문화 형성을 도모한다는 것이다.

<문제 상황> 지난해는 쥐의 해이므로 지난해에 태어나는 아기들은 쥐띠라고 한다. 그런데, 지난해의 신생아 이외에도 쥐띠는 많다. 그 이유는 무엇일까? 이러한

민속적인 관행에 스며들어 있는 민속수학을 탐구하기 위하여 이 학급 학생들은 이미 각자의 가족의 나이와 함께 띠를 조사해왔다. 소위 띠에는 쥐띠, 소띠, 호랑이띠, 토끼띠, 용띠, 뱀띠, 말띠, 양띠, 원숭이띠, 닭띠, 개띠, 돼지띠 등이 있다.

| |
|---|
| (프로젝트) 쥐띠의 60세 回甲<br>(모형) ME 완성 모형<br>(환경) 고유한 민속문화의 개념적 · 탐구적 · 프로젝트 적 환경<br>(목적) 수학적 문화 형성<br>- 조사하기, 셈하기, 설계하기, 설명하기<br>- 자료의 조사 및 정리에 의한 설명<br>(표 만들기, 막대그래프와 그림그래프 그리기)<br>- 탐구에 의한 배수와 최소공배수의 개념 형성 및 문제해결<br>(방법) 소집단별 조사 및 탐구 활동에 의한 상호작용과 의사소통 |

<문제 1> 열두 띠의 그림그래프

소집단별로 학생들 각자의 가족의 나이와 함께 조사해온 띠에 대하여 쥐띠, 소띠, 호랑이띠, 토끼띠, 용띠, 뱀띠, 말띠, 양띠, 원숭이띠, 닭띠, 개띠, 돼지띠 등에 해당하는 사람의 수를 표로 만들고, 이를 막대그래프와 그림그래프로 나타내어라.

<문제 2> 쥐띠의 나이 분포

각 띠에 속한 사람들의 나이의 분포를 조사해보고 어떤 일정한 현상이 나타난다면 그 이유는 무엇일까?

<문제 3> 쥐띠의 회갑

우리는 태어나서 만 60세가 되는 해의 생일을 회갑이라 하여 특별한 생일 잔치, 즉 회갑 잔치를 벌이며 많은 일가 친지들이 모여 축하하고 즐기는 풍속을 가지고 있다. 왜 하필 60세가 되는 해의 생일을 회갑이라 하였을까?

## V. 결론 및 제언

본 연구자는 우리들의 삶의 질을 염두에 두고 문화라는 개념과 수학교육을 관련짓고자 하였다. 수학은 중요하다고 하면서도 무엇 때문에 수학을 공부하는가에 대해서는 명료한 답을 제시하기가 어려웠다고 생각한 것이다. 문헌 연구를 토대로 수학적 문화의 개념을 정립하고 가치 있는 수학적 문화의 형성을 위한 ME 교수/학습 모형을 구안하였다. 또한 이러한 모형이 교실에서 실제로 적용될 수 있도록 하기

위하여 구체적인 몇 가지의 사례들을 제시함과 아울러 초등학교 5학년의 '쥐띠의 60세 회갑', 중학교 2학년의 '수원성의 축성'이라는 프로젝트 중심의 수업 예시 안을 만들었다. '쥐띠의 60세 회갑' 프로젝트는 민속적인 관행에 스며들어 있는 민속수학의 탐구를 통하여 셈하기, 설계하기, 설명하기 등의 수학적 문화를 형성하도록 하기 위한 것이다. 또한 실제적인 통계 자료의 조사와 정리를 바탕으로 한 탐구의 과정에서 배수와 최소공배수의 개념을 형성할 수 있도록 하기 위한 것이다. 그리고 '수원성의 축성' 프로젝트 역시 셈하기, 측정하기, 설계하기, 설명하기 등의 수학적 문화 형성을 위한 것으로, 고유한 민속 문화재의 답사 경험을 토대로한 수학적 설명을 통하여 수학적 문화 형성 뿐 아니라 문화적 자부심도 갖게 하자는 것이다.

그러나 본 연구는 수학적 문화 형성을 위한 교수/학습의 새로운 방향을 정립하기 위하여 ME 교수/학습 모형과 함께 아이디어 수준의 수업 예시 안을 제시한 것에 지나지 않으므로, 풍부한 교수/학습 자료의 개발과 현장 적용 연구 등 많은 과제를 남겨두고 있다. 많은 현장 교사들의 건설적인 비판 과정을 거쳐 현장에서 유용한 모형이 되기를 간절히 바랄 뿐이다. 교실 현장에서의 실천은 종국적으로는 오케스트라의 지휘자라 할 수 있는 교사의 몫이다.

## 참 고 문 헌

강완. (1991). 수학적 지식의 교수학적 변환. 수학교육 제 30권 제 3호, 통권 71호. 한국수학교육학회. pp. 71-89.

김동욱. (1989). 수원성. 서울: 대원사

김용운, 김용국. (1982). 韓國數學史. 서울: 悅話堂.

김병성. (1992). 敎育社會學 關聯理論. 서울 : 良書院

김수환. (1993). 수학교육에서의 효율적인 학습 전략의 모색. 수학교육 제 32권 제 4 호, 통권 79호. 한국수학교육학회. pp. 452-470. (1994). 문제해결력 신장을 위한 교수학습 모형. 청람수학교육 제 4집, 수학과 (초・중등) 문제해결 지도에 관한 워크샵. 한국교원대학교 수학교육연구소. pp. 209-230. (1995). 의사소통을 활성화를 위한 학습 지도. 청람수학교육 제 5집 2권, 수학과 교수・학습지도 개선을 위한 워크샵-수학적 힘의 개발을 중심으로-(중등). 한국교원대학교 수학교육연구소. pp. 19-35.

김연식, 박영배. (1994). 급진적 구성주의의 수학교육학적 의미. 대한수학교육학회 논문집 제 4권 제 1호, 대한수학교육학회. pp. 25-38.
류희찬, 조완영. (1994). 수학교육의 수업 원리로서의 반영적 추상화. 대한수학교육학회 논문집 제 4권 제 1호, 대한수학교육학회. pp. 237-253.
박경미. (1995). 수학교육에 있어서의 구성주의. 1995년도 대한수학교육학회 춘계 수학교육 연구 발표대회 논문집, pp. 67-78.
박배훈, 김수환. (1994). 수학적 문화적응을 위한 교수·학습 모델. 대한수학교육학회 논문집 제 4권 제 2호, 대한수학교육학회. pp. 67-77.
박배훈, 박근덕. (1991). 산학계몽에 나타난 분수 고찰. 수학교육 제 30권 제 3호, 통권 71호. 한국수학교육학회. pp. 101-126.
박한식. (1986). 사회인에 필요한 수학력 고찰. 수학과 사회, 한일합동 수학교육 세미나, 수학교육 제 24권 제 2호, 통권 57호. 한국수학교육학회. pp. 117-125. (1993.9.1). Bishop의 '다문화의 교육과 수학의 학습 지도' 강의 노트.
신현성. (1995). 수학교육과정에서 지도계열의 구성문제. 1995년도 대한수학교육학회 춘계 수학교육 연구 발표 대회 논문집, pp. 95-108.
이가원 역. (1976). 四書五經 6, 周易. 서울: 平凡社.
이규환. (1985). 교육사회학. 서울: 배영사.
이재학, 김수환. (1992). 논리적 사고력 신장을 위한 Logo 프로그래밍 활동의 효과 분석. 수학교육 제 31권 제 1호, 통권 72호. 한국수학교육학회. pp. 11-22.
양인환. (1990). 수학적 문제해결에서의 소집단 활동의 인지적 효과 분석. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.
전평국. (1995). 시급한 학교 수학의 변화. 청람수학교육 제 5집 1권, 수학과 교수·학습 지도 개선을 위한 워크샵-수학적 힘의 개발을 중심으로-(초등). 한국교원대학교 수학교육연구소. pp. 1-4.
정지선. (1995). 1995학년도 서울동작교육구청 연구수업 수학과 학습 지도안.
한국교육개발원. (1985). 수학과 문제해결력 신장을 위한 수업 방법 개선 연구, 연구 보고 RR 85-9, pp. 22-55.
한국교육개발원. (1995). 중학교 수학 교육과정 상세화 및 평가 기준 개발
數學教育學研究會. (1993). 新數學教育の理論と實際(中學校). 聖文社.

伍政(1995, 7월 1-2일). 民族數學を生かす數學敎育の存り方について. 全國數學敎育學會發表資料.

中西 隆. (1995). 數學敎育における文化人類學的アプロ-チの意義-數學と生きた 文化 の形成に向けて- 第2回 全國數學敎育學會, 第17回 近畿數學敎育學會發表 資料.

Barnes, D. (1976). *From communication to curriculum.* Harmondsworth: Penguin.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation-a cultural perspective on mathematics education-.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

d'Ambrosio, U. (1985). *Socio-cultural bases for mathematics education.* Unicamp, Campinas Brasil.

Davies, I. (1973). Knowledge, education, and power. In R. Brown(Ed.), *Knowledge, education, and cultural change.* London: Tavistock.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* Hampshire: The Falmer Press.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics:an introductory analysis. In J. Hiebert(Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*(pp.1-27). Hilsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Konold, C., and Johnson, D. K. (1991). Philosophical and psychological aspects of constructivism. In L. P. Steffe, *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp.1-13). New York: Springer-Verlag.

Mellin-Olsen, S. (1991). The Double bind as a didactical trap. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen and J. van Dormolen(Eds.), *Mathematical knowledge:its growth through teaching* pp.39-59). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Noddings, N. (1990). Constructivism in mathematics education. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings(Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics, JRME Monograph No. 4.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Nunes, T. (1992). Ethnomathematics and everyday cognition. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* NY: Macmillan Publishing Company.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically-communication in mathematics classroom.* London: Routledge & Kegan Paul Inc.

Sinclair, H. (1983). Young children's acquisition of language and understanding of mathematics. In M, Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak, & M. Suydam(Eds.), *Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education,* (pp. 7-12). Boston: Birkhäuser.

White, L. A. (1959). *The evolution of culture.* New York: McGraw-Hill.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G., & Merkel, G. (1990). The importance of social interaction in children' construction of mathematical knowledge. In T. J. Cooney, & C. R. Hirsch, *Teahing and learning mathematics in 1990s, (1990 Yearbook),* (pp. 12-21). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.