한국초등수학교육학회지 1, 87-98. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 1, 87-98.

# 실천으로서의 수학에 대한 소고

정 은 실[1]

실천은 내용으로서의 실천과 방법으로서의 실천으로 분류된다. 수학의 실천적 본질은 실제로 행하여진 수학자의 활동을 의미한다. 방법으로서의 실천을 위해서 학생들은 수학자의 도제가 된 입장에서 수학을 마치 수학자가 일상에서 하듯 배울 수도 있다. 수학을 배운다는 것은 공통의 언어를 공유하는 실천가들 사이에 진행되는 대화에 들어가는 것을 의미한다. 수학 교실의 모습은 수학의 내용을 개념과 절차의 형태로 획득하는 활동으로 이루어지는 것이 아니라 수학적 사고의 개인적 실천과 협동적 실천으로 이루어져야 한다.

## I. 서 론

전통적인 주지주의 교육관은, 이론과 실천을 양분하고 이론적 삶의 우위성을 강조한 전통적인 철학적 가정에 터하고 있다. 전통 철학은 앎을 추구하는 삶이 가장 높은 질의 삶이라고 보았으며, 이 때 앎이란 수동적인 관조를 통해서 얻어지는 것으로서 실천적 활동과는 구분되는 것이다. 이러한 가정을 받아들인 교육은 바로 관조를 통해서 얻어지는 이론적 지식을 다루는 데에서 그 의미와 가치를 찾을 수밖에 없었고 그 결과 교육을 실천적 활동으로 이루어지는 삶으로부터 분리시키는 결과를 가져오게 되었다.

수학의 경우도 마찬가지여서 지식이란 일반적으로 어떤 사람의 정신 내에 존재하는 어떤 내용으로서 인지 구조와 절차를 포함한 것으로 여기고 수학 교육은 언제나 그러한 지식의 전수를 그 일차적 과제로 삼아 왔다는 점은 부인하기 어렵다. 여러 가지 이유로 인지 구조와 절차의 획득이란 면에서 수학적 지식을 생각하는 것이 가치 있는 것이었고 또 앞으로도 계속 그럴 것이다. 그러나 이 견해는 수학적 경험에 대해 완전한 설명을 해주지 못하며, 새로운 형태의 교육학에 이론적 근거를 제공해 주지 못하고 있다.

이를 보완하는 견해로서 최근 '실천[2]으로서의 수학'을 강조하고 있다. 실천이란 '합리적인 인간 활동 (Tymoczko, 1986), 또는 '사회적으로 의미 충실한 맥락 속에서 수행되어지는 일상적인 활동'(Greeno, 1988)으로서, 학교에서의 수학적 지식은 정의, 공리, 유도의 논리에 의해서 조직되지만 일상적 활동인 실천은 사회 구조와 환경 구조에 의해 조직된다. 수학적 지식을 실천으로 보는 견해는 최근 수학 철학에 의해서도 지지를 받고 있다.

특히 라카토스는 수학적 담론과 문화의 뉘앙스를 보여주기 위하여 사회적 논쟁 과정을 묘사하였다. Kitcher(1984)는 수학적 지식의 성장을 이해하기 위한 중요 개념으로 '수학적 실천'이라는 개념을 사용하고 있는 바 그 구성 요소로서 언어, 수용된 명제의 집합, 수용된 추론의 집합, 중요한 것으로 선정된 질

---

1) 진주 교육 대학교 ([660-756] 경남 진주시 신안동 380)

2) '실천'은 practice를 번역한 것으로서 이것은 '실제'로 번역할 수도 있다. '실제'는 '있는 그대로의 형편'으로서 정적인 의미가 있고, '실천'은 '실지로 이행함'으로 동적인 의미가 있다. 소박한 의미로 practice는 '이론'에 대비되는 말로서 '무엇을 한다'든가 '만든다'는 활동적인 측면을 드러내는 말이다. '이론'의 특징은 '반성(reflection)'인 반면, '실천'의 특징은 '행동' 또는 '활동'이다.

문들의 집합, 수학적 견해의 집합 다섯 가지를 들고 있다. 또 그는 단순히 공유된 결과가 아니라 공유된 의미의 중요성에 기반을 둔 수학 인식론을 발전시켰다. 여기서 그는 수학이 무엇인가를 이해하기 위하여 수학을 만드는 사람 또는 수학 사용자의 활동 또는 실천 사항을 이해할 필요가 있다고 주장한다. 이러한 견해는 수학을 이해한다는 것은 그 영역 내의 개념과 원리 구조를 이해하는 것과 동치라는 통상적인 견해와는 그 궤를 달리한다.

이학주(1989)는 실천의 교육적 의미를 기술하면서 "교육은 실천적 활동을 교육의 내용으로 삼아야 하며 실천적 행위의 원리에 따라 방법이 고안되어야 한다."(p.93)고 주장하고 있다. 이는 실천의 두 가지 측면 즉, 교육 내용으로서의 실천과 교육 방법으로서의 실천을 고려해야 한다는 주장이다. 교육이 실천적 활동을 교육 내용으로 삼아야 한다는 말의 의미는, 지식이 가지고 있는 실천적 성격 자체가 곧 교육 내용이 되어야 한다는 뜻이며, 교육 방법으로서의 실천의 의미는 지식을 가르친다고 할 때 그 지식이 가지고 있는 성격이 훼손되지 않는 방식으로 가르쳐야 한다는 것이다. 이에 근거하여 본고에서도 수학 교육 내용으로서의 실천 즉 수학이 가지고 있는 실천적 성격은 무엇이며, 수학적 지식이 가지고 있는 성격이 훼손되지 않는 방식으로 가르치기 위해서는 어떠해야 하는지를 살펴보고자 한다.

## II. 수학의 실천적 성격

흔히 수학은 논쟁의 여지가 없이 확립된 지식 체계 즉 완성된 산물로 여겨진다. 수학은 전제가 참일 때 그 결과가 필연적으로 참이라고 인정되는 논리에 기초하므로 필연적으로 확립된 지식이라는 것이다. Hilbert와 같은 형식주의자들은 수학을 형식적 규칙이나 알고리즘에 의해 처리될 수 있는, 해석이 가해지지 않은 계산법이나 공리 체계로 본다. 이같은 주장은 수학의 기록된 표현에 초점을 맞추고 수학의 연역적인 성질과 형식적 증명을 강조하는 입장이다.

반면에 수학을 완성된 산물 이상의 것으로 보는 견해도 있다. Freudenthal(1973)은 수학을 결과적 지식 체계로서의 수학 곧 기성 수학과 활동 중인 수학 곧 실행되는 수학으로 구분하고 후자를 강조하고 있다. Polya(1957)도 유클리드 식의 엄밀한 과학으로서의 수학과 '발생 상태 그대로의' 수학으로 구분하고 있다. 그는 후자 즉 '실험적이고 귀납적인 과학'으로서의 수학을 강조하며, 실제로 인간에 의해 '발생되고 있는' 수학의 모습을 제시하려고 노력하였다. Lakatos(1976)는 수학적 활동을 '인간적 활동'으로 보고 있는데, Ernest (1991)는 Lakatos와 같이 수학을 수학자들이 지금 하고 있고 또 과거에 해 왔던 인간의 활동으로 보며 이에는 어쩔 수 없이 따르게 되는 불완전함이 있다고 보는 사람들을 준경험주의자라고 부르고, Davis, Hallett, Hersh, Tymoczko 등도 이에 속한다고 말하고 있다. 이들의 견해에 따른다면 실천으로서의 수학 즉 수학의 실천적 성격은 수학자들과 수학을 이용하는 사람들의 실제적 활동을 검토해 봄으로써 알 수 있는 것이다. 그러면 수학자들이 실제로 하고 있는 활동은 어떤 것인가? Polya(1966)는 수학자의 중요한 활동에는 다음과 같이 두 가지가 있음을 밝히고 있다.

> 수학자에게 가장 독창적인 활동은 엄밀한 증명을 발견하고 공리 체계를 구축하는 것이다. 그러나 수학자가 완성해서 발간된 저서에는 보통 거의 흔적을 남기지 않는, 그러나 중요한 다른 활동, 예를 들면, 구체적인 상황에서 수학적 개념을 추출해 내는 것, 또는 그것을 인식하는 것, 그리고 여러 가지 형식으로 추측하는 것, 결과를 예상하는 것, 증명의 세세한 부분을 완성하기 전 증명의 대강을 예상하는 것 등이 있다. 그러한 추측에는 관찰한 것으로부터의 일반화, 귀납적 추리, 유비추리 등을 포함할 수 있다. (p. 124.)

다시 말해서 실제로 수학자가 행하는 중요한 수학적 활동은 공리, 정의, 엄밀한 증명 등을 구축하는 것과 같은 '형식적' 활동도 있지만 보다 중요한 활동은 일반화, 유추, 추상화, 귀납 등과 같은 '비형식적' 활동이라는 것이다. Tymoczko(1986)도 수학의 실천적 특징으로서 비형식적 증명, 역사적 발달, 수학적 오류의 가능성, 증명과 대비되는 수학적 설명, 수학자 사이의 의사 교환 등을 들 수 있다고 말하고 있다. 특히 Ernest(1991)는 수학자 사이의 의사 교환을 다음과 같이 강조하고 있다.

> 수학이란 수학 문제를 해결하려고 노력하는 사람 사이의 대화이다. 수학자는 오류 가능하고, 개념과 증명을 포함하는 수학자들의 산물은 결코 최종적이거나 완전할 수 없다. 그것은 엄밀성의 기준이 바뀌거나 새로운 변화 또는 의미가 발생할 때 재조정될 수 있는 것으로 본다. 인간 활동으로서의 수학은 그 역사 그리고 과학이나 그 밖의 것에의 적용과 분리하여 생각할 수 없다. (p. 35.)

한편 National Research Council(1989)에서 발간한 보고서에서는 다음과 같이 수학적 활동을 예시하고 있다.

> 수학은 우리 주변 세계를 이해하는 데 도움을 주는, 숨겨진 패턴을 드러내 준다. ... 수학을 '하는' 과정은 단순한 계산 또는 연역 이상의 것이다. 즉, 그것은 패턴을 관찰하고, 추측을 검사하며 결과를 예상하는 것을 포함한다. 실제적인 수학은 패턴과 순서의 과학이다. 그 영역은 분자나 세포가 아니라 수, 확률(chance), 도형, 알고리즘 그리고 변환이다. 추상적인 대상으로서의 수학은 그 진리 규준이 관찰보다는 논리에 의존한다. 그러나 진리를 발견하는 수단으로서는 관찰, 모의 실험, 심지어 실험을 이용한다. (p. 31.)

앞에서 지적했듯이 Polya도 귀납적이고 실험적인 과학으로서의 수학을 강조하고 있으며 Kitcher (1984)도 수학적 지식의 원천은 인간의 지각임을 지적하고 있다. 그에 따르면 개인의 수학적 지식의 근원을 그가 속한 사회의 지식에 두고 있는 바, 개인의 지식은 그가 속한 사회의 권위자의 지식에 근거하며, 그 사회 권위자의 지식은 그보다 앞선 사회의 권위자의 지식에 근거한다는 것이다. 이렇게 계속 그 뿌리를 찾아가면 맨 처음의 수학적 지식은 어떻게 시작되었는가? 여기서 Kitcher는 평범한 지각에 호소하고 있다. 수학적 지식은 지각에 의해 획득된 단편적인 지식으로부터 생겨났다는 것이다. 몇 천년 전 우리의 선조는 실천적 경험을 통하여 초보적인 산술과 기하의 진리를 학습하는 것을 시작으로 하여 현재 우리가 물려받고 있는 수학 지식 체계를 꽃피우기 시작했다는 것이다.

수학은 의심할 나위 없이 확립된 정리들이 증가하면서 성장하는 것이 아니라 많은 시행 착오와 우회로를 거치면서 발전한다. 또한 그 정리에 이르는 탐구의 정신과 발견의 양식을 중요시한다. 이와 같이 '살아 있는' 활동을 강조하는 입장에서 보면 수학은 논리에만 의존하는 것이 아니며 논리에 의해서만 그 특성이 규정되지도 않는다. '발생 상태 그대로의' 수학, 실천으로서의 수학이란 '책에서 베껴 낼 수 있는 지식의 무더기'가 아니라 '그것을 통하여 사물을 보는 눈'이며, '그것에 관하여 알아야 할' 그 무엇이 아니라, '그것으로 무엇인가 할 줄 알아야 할' 그 무엇으로서 이러한 실천으로서의 수학이 보다 중시되어야 하는 것이다.

이러한 주장에서 교육적 시사점을 찾아본다면 수학 교육에서도 지각을 이용한 관찰, 실험을 강조해야 한다는 것과 연역적 추론 뿐 아니라 비형식적 추론인 귀납, 유추 등을 중시하여 학생들로 하여금 '추측하는' 것을 학습하도록 해야 하는 것이다. 또한 의사 교환을 통한 수업의 중요성을 알 수 있는 바 이에 대해서는 다음 절에서 좀 더 자세히 살펴보기로 하자.

## III. 교육 방법으로서의 실천

이학주(1989)는 주지주의적 교육관이 강조해 온 이론적 가치만으로 해명할 수 없는 삶의 측면으로서 '삶의 활동성'을 들고 있다. 삶의 이론적 측면이 무엇을 '안다'든가, 혹은 무엇을 '본다'는 말속에 그 특징이 담겨 있다고 본다면, 삶의 활동적 측면의 성격은 무엇을 '한다'든가, '만든다'는 말로 드러나게 된다. 이러한 삶의 활동적 측면이 교육 방법으로서의 '실천'이라고 말할 수 있다. 그러면 수학적 지식이 가지고 있는 실천적 성격이 훼손되지 않는 방식으로 가르치기 위해서는 어떠해야 하는지를 살펴보기로 하자. 이러한 원리는 이론적 지식을 포함한 모든 지식이 본질적으로 실천적 성격을 가지고 있다는 인식론적 가정이 전제된 것으로서, 만일 기계적인 방식으로 지식을 가르친다면 그것은 이미 지식의 의미를 잃게 된다는 점을 시사한다.

### 1. 소규모 협력 학습

앞서 소개한 바와 같이 Greeno(1988)는 실천을 '사회적으로 의미 충실한 맥락 속에서 수행되어지는 일상 활동'으로 정의하고, 그러한 활동은 다른 사람과의 의사 교환 및 협력, 그리고 주어진 상황에서 가용한 자원을 이용하는 방법에 대한 지식에 의존한다고 말하고 있다. 실천에 대한 이와 같은 정의는 이학주가 기술하고 있는 실천의 의미 가운데 교육 방법으로서의 실천에 대한 생각과 일치함을 알 수 있는데, Greeno의 표현 가운데 눈에 띄는 것이 '다른 사람과의 의사 교환 및 협력'이라는 말이다. 어떤 사회 단체의 구성원이 되는 것은 구성원 사이의 의사 교환 즉, 대화를 통해서 이루어진다. NCTM의 Standards의 교육과정 규준에는 의사 교환으로서의 수학을 강조하고 있으며, Silver(1992)도 수학 교실을 수학적 아이디어에 대한 의사 교환이 풍부하게 일어나는 장소로, 교사와 학생이 진정으로 수학적 실천에 참여하는 장소로 묘사하고 있다. 즉 그들은 학생들이 협동적으로 수학적 실천에 참여하는 공동체 - 때로는 서로 공개된 방법으로 협동해서 공부하고 또 수학적 사고와 추론의 실천을 위한 공동체로서 그리고 공동 규범이라는 의미에서 언제나 동료들과 또 교사와 협동해서 공부하는 - 수학 교실을 묘사하려고 애썼다.

지금까지 우리 나라의 수학 학습은 대체로 의사 교환의 역할을 무시하고 교사의 일방적인 지도하의 수업을 하고 있었지만 최근 들어서 열린 학습에 관심을 갖기 시작하면서 의사 교환과 소집단 협력 학습에 관심을 갖기 시작하고 있다. 의사 교환을 강조하는 소집단 협력 학습에서는 학생들이 단지 해답을 말하는 것이 아니라 그들의 생각 즉, 그들이 관찰한 것을 이야기하고, 왜 그런 절차를 밟았으며, 그 해답이 왜 옳다고 생각하는지를 설명할 기회를 요구한다. 학생들은 수학에 대해 사고하고 추론하도록 하거나, 말로 또는 글로 다른 사람에게 그들의 생각한 결과를 나눌 때 그 아이디어를 분명하게 진술한다. 따라서 의사 교환은 각 학생들과 그들이 속한 공동체에 서로 유익을 주는 활동 중심에 놓여 있다.

게다가 확신시키고 정당화하는 것이 학생들의 주의를 집중시키는 활동 장소로 교실이 변화될 때, 수학적 실천의 문화적 규범 내에서 자신의 생각을 서로 나누는 행위는 수학적 추론에 대한 요구와 가치를 제공한다. 그러한 교실에서는 열린 문제를 사용하여 의사 교환을 촉진시키는 것을 보게 되며, 다양한 해석과 다양한 해결 방법에 대해 토론하도록 이끈다. 이러한 소집단 협력 학습의 장점에 대해 류희찬(1996)은 다음과 같이 세 가지로 요약하고 있다.

첫째, 소집단 협력 학습은 피동적인 수용 학습에서 적극적인 활동이 수반되는 학습을 가능케 한다. 소집단 협력 학습은 학습자를 위한 사회적 지원 체제를 제공한다. 학생들의 각자의 생각을 교환하고, 자유

롭게 질문하고, 서로 설명하고, 사고와 개념을 명료화하고, 의미 있는 방법으로 서로에게 학습에 대한 감정을 표현하는 기회를 가질 수 있게 된다.

둘째, 소집단 협력 학습에서는 모든 구성원들에게 적당한 임무를 부여하며 팀 점수를 성적에 반영함으로써 각자 뿐 아니라 팀 전체가 함께 발전하여야 한다는 생각을 심어 줌으로써 보다 많은 학생들에게 수학 학습에서의 성공 기회를 제공할 수 있다. 부진아는 속진아에게로부터 가르침을 받아 학습을 촉진시킬 수 있으며, 학습 속진아는 부진아들을 가르침으로써 자기의 학습을 강화할 수 있다.

셋째, 학생들은 그들의 논리로 서로 이해시킬 수 있음으로 해서 많은 것을 배울 수 있다. 학생들은 같은 문제를 해결하기 위한 여러 가지 방법을 배울 수도 있으며 서로에게 기본적인 개념과 필요한 계산적인 절차를 지도할 수 있다. 소집단 협력 학습의 예는 여러 가지 들 수 있겠지만 프로젝트 학습이 대표적이다. 프로젝트는 일반적으로 집단별로 부과되기 때문에 학생들이 협력 학습을 할 수 있는 좋은 기회가 되는 것이다. 이 학습에서는 수학 내용이나 개념을 포함하고 있는 실제적 상황을 문제화한 프로젝트의 구성이 중요하다. 백석윤, 서점균(1996)은 진주 교대 부속 초등학교 6학년을 대상으로 한 수업에서 다음과 같은 프로젝트를 제시하고 있다.

<프로젝트 1> 아빠가 운전하시는 자동차 '무쏘'가 있다. 이 자동차의 부피는 얼마나 될까? 단, 모든 차창은 닫혀 있으며 바퀴를 포함한다.

<프로젝트 2> 우리 교실에 흰색의 모조지 전지를 이용하여 벽을 바르려고 한다. 바닥, 출입문, 창문, 칠판, 게시판, 사물함 등은 제외하고 순수하게 벽과 천장만 바르려고 한다. 이 때 필요한 최소한의 비용을 산출하여라. 단, 인건비는 생각지 않으며 반드시 모조지 전지(100파운드)만을 사용하며 풀로서 벽을 바른다.

학생들이 문제를 인식하고 정의하며, 그것을 해결하기 위한 변수를 찾고 무엇을 어떻게 해야 하는지를 결정하고 과제를 분담하여 수행하고 그 결과를 전체 앞에서 분명하게 제시하는 일련의 과정을 보면, 프로젝트 학습은 일상 생활과 유사하다. 학생들은 구성원들과 이야기하고 구두나 서면으로 학급 전체 앞에서 결과를 전달함으로써 의사 교환 기능을 정교화할 수 있게 되며, 또한 프로젝트를 함께 수행함으로써 학생들은 필수적인 사회 생활 기능을 익히게 될 뿐 아니라, 수학이란 교과의 속성이나 가치를 경험할 수 있게 되는 것이다.

## 2. '수학 문화의 소우주'로서의 교실

Schoenfeld(1988)는 교실을 '수학 문화의 소우주'(p. 87)라는 말로 교육 방법으로서의 실천을 설명하면서, 전통적인 수학 교실의 가치에 의문을 제기하고 있다. 그는 수학 교실에서의 '지식의 문화적 전달'에 대해 논의하면서 다음과 같은 두 가지 가정을 한다. 첫 번째 가정은 '학교 교육의 성격'에 대한 것으로서 학교 수학 학습은 문화적 현상과 인지적 현상을 동시에 포함하는 것으로 여겨지며 그 둘은 분리할 수 없다는 것이다. 대부분의 교육 연구에서 교실은 단순히 학습이 일어나는 장소로 여기고 교실 내에서 발생하는 인지적 측면에만 초점을 맞춘다. 그러나 교실은 또한 문화적 환경으로서, 일상적인 실천과 문화 의식에 의해 영속되는, 수학의 성격과 목적에 관한 신념과 가치가 존재하는 곳이기도 하다.

따라서 학생이 그들의 형식적 수학 수업에서 수용하는 수학적 사실과 절차에 대한 지식은 학생이 수학에 대해 학습하는 것 중 단 하나의 요소만을 포함하고 있을 뿐이다. 그것이 의도된 것이건 아니건 간에 '수학이 실제로 무엇에 대한 것인가'에 대한 학생의 느낌은 학교 수학 문화 즉, 학생이 수학적 사실과 절차를 학습하는 환경에 의해 조형되며, 그 느낌은 배운 수학을 어떻게 이용하는가를 결정하는 것이다. 두 번째 가정은 '수학의 성격'에 대한 것으로서 수학을 한다는 것은 의미 찾기 행위라는 것이다. 더

육이 수학 수업에서 학생이 배우는 수학적 사실과 절차는 목적 그 자체라기보다는 그 목적을 위한 수단이어야 한다.

이러한 두 가지 가정으로부터 연구와 실천을 위한 시사점을 얻을 수 있는 바, 하나는 철학적, 현상학적 수준에서 - 학생이 수학 교실에서 실제로 배우는 것이 무엇이며, 교실 밖에서 학습한 것을 어떻게 그리고 왜 사용하는지를 설명할 수 있기 위한 - 문화적, 인지적 현상을 포함하는 이론과 방법론의 개발에 대한 것이고, 또 다른 하나는 교실 문화를 고려한 교육과정 설계에 대한 것이다.

먼저 문화와 인지에 대하여 Schoenfeld는 학교 수학 문화가 학생들의 수학적 행동을 조형한다고 주장한다. 한 조사에서 "26마리의 양과 10마리의 염소를 태운 배가 있다. 이 배의 선장의 나이는?"과 같은 불합리한 문제에 답하는 아동들이 4명 중 3명 꼴로 나왔는데, (가장 많은 답은 36이었다) 그것은 학교 수학 문화에서 문장제는 언제나 해답을 갖고, 그 해답은 문제에 주어진 수를 적당히 조작함으로써 얻어졌었기 때문이라고 그는 보고 있다. 이 문제에 답하는 아동은 의미 찾기 행동을 하는 것이 아니다.

그렇다면 이러한 학생 행동의 근원은 어디인가? 실제로 수학 수업에서는 학생들은 문제의 의미를 찾을 필요가 없다는 생각을 갖도록 만들고 있다. 예를 들면 같은 유형의 문제를 제시하고 첫 번째 문제를 해결하는 방법을 이해한 후에 그 다음 문제들은 같은 절차를 반복 적용하는 연습을 시행한다면, 그러한 교실 수학 문화를 구성하는 일상 활동이 학생들의 인지에 영향을 끼치는 것이다. 의미 찾기는 문맥 유관이며, 소문화의 실천에 의해 문화적 소우주 내에서 정의된다. 교실 밖에서 볼 때, 문제마다 하나 하나 따로 의미를 생각하지 않고 같은 절차를 여러 문제에 적용하는 것은 불합리하다는 것은 분명하다.

그러나 특별한 소우주인 교실 내부의 문화는 계속해서 옳은 결과를 만들어 내는 그 절차가 의미 있었다는 것이다. 따라서 대부분의 아동이 그 절차를 이용한 것이다. 아동들의 행동은 교실에서 일어나는 실제와 전적으로 일치한다. 산술 문제에서 해답을 구하는 '순수 인지적'인 것처럼 보이는 학생들의 행동은 그들이 참여하고 있는 매일 매일의 교실 의식에 의해서 조형된 것이다. 이와 같이 잘못된 교실 문화가 만들어져서는 안된다.

요약해서 말하면 Schoenfeld는 지식의 많은 부분은 '국소적'이며 문맥 유관일 뿐 아니라 그 지식의 발달은 학습이 일어나는 문맥과 연관되어 있다는 인식론적 가정과, 어떤 분야에 대한 이해의 발달은 그 분야의 실천에 의해 조형된다는 실천 이론에 기초하여 인지 구조의 문화적 근원에 대한 논의를 하고 있다.

다음에는 Schoenfeld(1988)가 교실 문화를 고려한 수학 교육 과정 설계에 대한 그의 견해를 살펴보기로 하자.

문화가 다르면 같은 것을 다른 방식으로 보고 해석한다. 사람의 세계관은 그 문화에 의해 조형이 되는 것이다. 수학자의 부분 문화에 대해서도 같은 말을 할 수 있다. 수학적으로 사고하는 것을 학습하는 데에도 문화적 요소가 존재한다. 즉, 수학자가 되는 것은 문화 이식(文化 移植, acculturation)의 과정을 포함하는 데 그 과정에서 입문하는 사람은 특별한 공동체의 회원이 되고 그 공동체의 가치를 수용한다. 수학자는 대부분의 시간을 대상의 의미를 찾으면서 보낸다. 수학을 한다는 것은 의미 찾기이며, 수학자가 된다는 것은 수학자의 심미안을 개발 또는 내면화하는 것을 말한다.

다시 말하면, 구조와 구조적 관계를 지각하는 것, 분석하고 이해하는 것, 대상을 어떻게 조화시키는가를 조사하는 것 등을 선호하게 하는 것이다. 이런 심미안을 개발하는 것이 수학적으로 사고하는 것을 학습케 하는 근본적인 측면이다. 그런데 이런 심미안은 수학의 형식적 절차를 마스터함으로써 개발될 수 있는 것이 아니다. 그것은 내면화 즉 적당한 가치가 어떤 문화의 일상적인 실천 속에 반영되는 그런 문화 속에 거주함으로써만 획득된다.

결국 수학적으로 사고하는 것을 가르친다는 것은 수학적 '도구'(여러 가지 수학적 사실과 절차)를 마스터하는 것과 수학의 의미 - 의미 찾기 활동과 그런 방식으로 수학을 이용하는 습관으로서의 수학관-를 개발하는 것 모두를 포함한다. 그런데 전자는 그런 대로 획득하기가 쉽지만 후자는 그렇지 못하다. 의미 찾기 활동으로 수학을 바라보기 위해서 학생들은 그런 방식으로 내면화해야만 한다.

즉, 그들은 수학적 문화의 소우주인 교실, 의미 찾기로서의 수학의 가치가 일상적인 실천에 반영되는 교실에서 수학을 학습해야만 하는 것이다. 그러면 어떻게 올바른 수학 문화의 소우주인 교실 환경을 만들어 낼 수 있는가? 그 한가지 사례를 Fawcett가 고등학교 학생을 대상으로 한 기하 지도 방법에서 찾아 볼 수 있을 것이다.

Fawcett(1938)는 수학 교육에서 Dewey의 반성적 사고의 육성을 중시하고 수학의 실천적인 면을 강조하는 증명 지도에 대한 실험 연구를 하였다. 그는 실천으로서의 수학을 배운 학생은, 단지 개념과 절차의 형태로 수학 내용을 배운 학생보다, 훨씬 더 생산적인 수학적 지식을 갖게 될 것으로 믿었다. 그리고 그러한 지식의 생산성으로 말미암아 일상적인 추론에서 수학적 개념과 원리를 사용하는 능력에서 큰 차이를 보일 것으로 믿었다. Fawcett는 수학이 중요한 것은 수학 내용 그 자체보다 수학이 모든 사람에게 가장 중요한 사고 양식을 가장 전형적으로, 분명하게 그리고 간단하게 드러내 주기 때문이라는 Young의 말에 동의하면서 그 사고 양식을 개발하기 위한 지도 방법을 소개하고 있는데 이는 실천을 통한 지도의 한 예가 될 수 있을 것으로 생각된다.

특히 Fawcett는 전이의 중요성을 논하면서 전이를 얻기를 기대한다면 학교 수학에서 수학적 맥락에서는 물론 실세계의 상황에서 정의, 논리적 추론 등을 논의하는 것이 필수적인 것으로 보았다. 그는 학생들이 수학을 의미 있게 만든 그 방식대로 학생들이 수학을 구성하도록 하는 지도 방법에 초점을 맞추었다. 학생들은 스스로 만든 정리를 증명하였으며 무정의 용어와 정의해야 할 용어를 스스로 선정하였고, 정의는 학생들의 토론을 통하여 얻어낸 자연스런 결과였다. 증명해야 할 명제를 일방적으로 제시하는 것이 아니라 학생들이 추측했던 문제 상황에서 출발하여 그 결과를 증명하도록 하였다. 학생들의 수학적 활동이나 비수학적인 일상적 활동에서 묵시적인 가정의 탐색을 권장하며 그것을 중요한 것으로 여겼다. 더욱이 탐구의 논리가 토론과 반성의 대상이 되었다. Fawcett의 실험 수업 상황은 성격상 수학 문화적인 것이다. 이에 대해 Schoenfeld(1988)는 다음과 같이 말하고 있다.

> *The Nature of Proof*를 읽어보면 Fawcett가 학생들에게 기하를 학습하게 하는데, 또 논리적 추론을 형식적인 수학의 외부에 있는 과제에 전이하도록 하는데 필요한 여러 가지 인지적인 지원 구조를 제공하고 있음이 분명하다. 그러나 그는 그 이상의 것을 하였다. Fawcett의 교실에서는 학생들이 참여하는 일상적인 의식과 실천에서 매우 중요한 수학적인 가치, 신념, 예언이 권유되었고 강화되었다. 본질적으로 그의 교실 환경은 의미를 창조하는 문화였다. 그 분위기는 이성적인 분위기였다. 명제가 권위적으로 제시되지 않았고 오히려 평가되고 결정되었다. 추측하는 것이 권장되었지만 그 추측의 바탕은 타당한 것으로 수락된 명제이었다. 수업 시간에는 그 명제를 정당화하는 추론 과정을 수용하였다. 그 기준은 높았지만 인위적이거나 독단적으로 외부에서 부과되지 않았다. 실제 그 기준 자체는 토론의 대상이었다. 수업 시간에는 정확한 진술이 의도된 의미를 완전히 사로잡을 때까지 정의를 다듬어 나갔다. 또한 진술이 분명하고 확신을 주는 증명이 될 때까지 정리를 다듬어 나갔다. 학생들은 실천적인 수학자가 하는 방식으로 수학과 함께 살았다. (pp. 90-91.)

Schoenfeld(1987)는 자기 자신도 문제 해결 강좌에서 수학 문화의 소우주를 만드는 일이 가능했음을 밝히면서, 여기에 참가한 학생들은 '수학인'이 되어 수학자가 하는 방식으로 수학을 창조하고 토론하고 서로의 의견을 나누었다고 말하고 있다. 그들의 활동에는 발명과 발견이 포함되며, 대가가 요약해 놓은

수학적 진리를 그대로 배우는 것이 아니라, 수학을 하는 것이 강조되었다.

### 3. 도제 관계 교수 학습 모델

전통적인 학교 교육에서는 학습 사태와 학습된 지식이 적용되는 사태가 매우 다르며, 학습과 적용 사이에 순서가 정해져서 먼저 학습이 일어나고 그 다음에 적용이 이뤄지기 때문에 그 시간차가 분명하다. Greeno(1988)는 학교 수학은 '신중하게 탈배경화된 지식'으로서 학교 수학은 어디에나 적용할 수 있을 정도로 추상화되어 있지만, 그 학습은 그것이 이용되는 맥락과 무관하다고 보고 있다. 일상 활동은 사회적 구조와 환경적 구조에 의해서 조직화되는 반면에, 학교 수학은 사실, 규칙적 절차, 기계적인 연습에 의해 획득되는 지식의 집합이다. 그것은 학교 교육은 다소 비실제적임을 암시한다. 학교는 학생에게 일을 준비시키지만, 일은 학교 밖에 있는 것이다.

이에 대한 개선책으로 최근 Lave 등(1988)은 새로운 모델로서 도제 관계 교수 학습 모델을 제시하고 있는데 그는 리베리아의 양복장이 도제에 대하여 연구를 한 후 이를 학교 현장에 적용하였다. 초보자는 대가(大家) 양복장이와 함께 일하면서 대가의 기능, 태도, 성향 등을 학습하며, 초보자 양복장이는 실지로 양복 만드는 일을 해봄으로써 그 지식과 기능을 개발한다. 마찬가지로 학교 수학 교육은 학생으로 하여금 도제가 되게 하여, 대가 수학자가 매일 습관적으로 하고 있는 그것을 모방하도록 학습하는 것을 말한다. 이것은 어떤 분야에 대한 이해의 발달은 그 분야의 실천에 의해서 조형된다고 보는 실천 이론에 따른 것으로서, 교실에서 일어나는 일들이 수학자가 하고 있는 일들과 일치해야 한다는 것이다. 이것은 학생들이 수학적 실천에 참여하는 방식으로 수학을 학습할 때, 수학을 보다 잘 이해하게 될 가능성이 커진다는 것을 의미한다.

Masingila(1993)도 도제 관계 교수 학습 모델을 추천하면서, 이 모델을 이용해야 하는 이유로서 다음 세 가지를 들고 있다. 첫째, 도제 관계 모델은 수학적 지식을 어떤 맥락 내에서 발전될 수 있게 한다는 것 때문이다. 이것은 지식이 실천 가운데서 생성된다는 것을 가정하고 있으므로 학교 안과 밖에서 사고하고 학습하는 방법 사이에 연속성이 있음을 시사해 준다. 학교 안에서든 밖에서든 학습은 학습이고 수학적 사고는 수학적 사고이다. 둘째, 인지 발달은 교사와 학생이 협력하여 활동할 때 일어날 수 있다는 점이다.

Vygotsky의 근접 발달 영역(zone of proximal development) 개념에 의하면 인지 과정은 먼저 사회적 평면에서 일어나며 그 다음에 이 공유된 과정이 내면화되고 변형됨에 따라 개인적 평면이 형성된다. 따라서 근접 발달 영역은 문화 기능을 학습하는데 민감한 역동적 구역이고, 아동은 좀 더 많은 그 문화의 구성원과 함께 문제 해결 활동에 참여함으로써 이 구역을 개발하게 되는 것이다. 셋째, 수학 문화는 교실 내에서 발달되며 학생들은 수학 사회에 입문하게 되기 때문이다. 학생들은 훨씬 경험이 많은 그 문화의 구성원과 밀접하게 활동함으로써 수학 지식을 발전시킬 뿐 아니라 그들 스스로 수학 공동체의 일부가 되는 것이다. 학교는 전통적으로 기성화된, 이미 포장된 수학 절차를 훈련시키는 반면, 도제 관계는 모델은 훈련 이상의 것 즉, 수학 공동체에 입문하는 길을 열어 주는 것이다.

그러나 Masingila(1993)에 따르면, 교실에서의 도제 교육과 노동 현장에서의 도제 교육이 두 가지 점에서 차이가 있다. 그 하나는 노동 현장에서는 전문가와 도제가 일대일로 일에 참여하지만 교실에서는 그렇지 못하고, 또 다른 하나는 노동 현장에서의 도제들은 주어진 상황에 맞는 지식을 구성하고 있는 반면에 교실에서의 학생들은 그렇지 못하다는 점이다. 그렇다고 교실에서의 도제 관계가 노동 현장에서의 도제 관계 보다 교육적으로 비효과적이라는 것은 아니다. 노동 현장에서는 도제가 노동 활동에 참여할 때 전문가에 의해 안내와 지도를 받는다. 교실에서는 학생들이 교사에 의해 안내를 받지만, 더욱 중요한

것은 그들이 수학을 하는 일에 협동적으로 참여할 때, 동료 학생에 의해서도 안내를 받고 도전을 받는다는 점이다.

따라서 도제 관계 모델을 교실에 적용할 때에는 공동 학습이 바람직할 것이다. 즉, 교사는 학생(도제)들이 다른 학생(도제)들과 함께 활동하도록 교실 환경을 만들어 줌으로서 학생들이 수학 사회에 입문하는 것을 도와주어야 하는 것이다. 두 번째 차이점으로 노동 현장에서의 도제들은 주어진 상황에 맞는 지식을 구성하고 있는 반면에 교실에서의 학생들은 '탈배경화된 지식'을 구성하고 있다. 학교 수학은 추상화된 지식으로 학생들은 보다 더 일반적이고, 다양한 상황에 적용할 수 있는 내용과 과정을 구성할 수 있다. 문제는 어떻게 하면 학교 수학에 풍부하고, 발전적인 문제를 포함시키느냐 하는 것이다.

Lave 등은 도제 교육과 학교 교육을 다음과 같이 대비시키고 있다. 학교 교육은 '실천을 위한 세세한 처방 → 문제 부과 → 아동은 수업의 중심 → 실행 평가'와 같이 진행되며, 도제 교육은 '활동을 위한 기회 → 갈등 사태 → 아동은 대가의 활동 가운데서 주변적인 참여자 → 일상적인 실천'과 같이 진행된다는 것이다. 여기서 알 수 있는 것은 도제 관계에 기초한 교육 과정을 조직할 때에는 가르쳐야 할 것을 학교 수업보다 다른 수준에서, 그리고 덜 구체적인 수준에서 특수화하는 것이 좋다는 것이다.

도제 교육은 교육 과정 목표를 분명히 알고 있고 문제 해결에 능숙한 대가의 협조로, 문제 해결 활동을 위한 기회를 제공하는 것을 목표로 한다. 그 목표는 구체적인 문제나 절차에 대한 연습 문제로 제시하는 것이 아니라, 갈등 사태와 발명 발견을 위한 기회, 활동 패턴을 제공하는 것이다. 이와 같은 도제 관계 교수 학습 모델을 실지로 적용하기 위해서는 더 많은 연구를 필요로 하지만 Lave(1988)가 예로 든 실험 학교 아동들에게는 다음과 같은 활동을 하도록 요구되었다.

① 수, 도형 및 절차에서 흥미 있는 패턴을 찾고, 그 패턴을 비교한다. 그 패턴을 확장하여 그 패턴이 개연적인 것이 되도록 만든다.
② 주어진 문제를 변형한다.
③ 자신의 문제를 만들고, 다른 사람을 위한 문제를 만들어 본다.
④ 수학적으로 의미 있는 것을 스스로 인지하여 탐구하고, 그것을 며칠 또는 몇 주간 계속 추구해 본다.
⑤ 한 문제에 하나 이상의 해를 찾아내고, 하나 이상의 형식화를 한다.
⑥ 이해한 것의 특성과 장점을 고찰하고, 어떻게 그것을 이해하게 되었는지를 고찰한다.
⑦ 수학적 개념을 불러일으키고 예증해 주는 상황을 이용한다.
⑧ 배운 방식대로 다른 아동들을 가르친다.

Lave는 이런 방법을 통해서 학생들은 수학자들이 갖고 있는 사고 습관과 관점을 개발할 수 있을 것으로 보고 있다.

## IV. 요약 및 결론

'실천'은 사회적으로 의미 충실한 맥락 속에서 수행되어지는 일상 활동이며 그러한 활동은 다른 사람과의 의사 전달 및 협력 그리고 주어진 상황에서 가용한 자원을 이용하는 방법적 지식에 의존한다. 지금까지의 교육을 지배해 온 전통적인 주지주의 교육관은, 이론과 실천을 양분하고 이론적 삶의 우위성을 강조한 전통 철학적 가정을 받아들여 교육의 의미와 가치를 오직 이론적 지식의 추구에서 찾음으로써, 교육을 실천적 활동으로 이루어지는 삶으로부터 분리시키는 결과를 가져오게 하였다.

실천은 수학적 지식이 가지고 있는 실천적 성격 자체가 곧 교육 내용이 되어야 한다는 교육 내용으로서의 실천, 수학적 지식을 가르친다고 할 때 그 지식이 가지고 있는 실천적 성격이 훼손되지 않는 방식으로 가르쳐야 한다는 교육 방법으로서의 실천 두 가지로 구분된다. 수학에서의 실천적 성격은 수학자가 실제로 행하는 활동을 말하는 것이다. 수학자의 독창적인 활동은 엄밀한 증명과 공리 체계를 구축하는 것이지만 이를 위해서는 일반화, 유추, 추상화, 귀납 등과 같은 비형식적인 사고 활동이 요구된다.

교육 방법으로서의 실천은 무엇을 '한다'든가, '만든다'는 말로 드러나는 활동적 측면으로서 무엇을 '본다', '안다'는 말 속에 숨겨진 삶의 이론적 측면에 대비되는 말이다. 수학 교실은 문화적인 환경으로서, 일상적인 실천과 문화 의식에 의해 영속되는, 수학의 성격과 목적에 관한 신념과 가치가 존재하는 '수학 문화의 소우주'이다. 따라서 '수학이 실제로 무엇에 대한 것인가'에 대한 학생의 느낌은 학교 수학 문화 즉, 학생이 수학적 사실과 절차를 학습하는 환경에 의해 조형되며, 그 느낌에 의해 배운 수학을 어떻게 이용하는가가 결정된다. 교실 활동은 단지 기성의 수학적 개념과 절차를 획득하는 방향으로 나아갈 것이 아니라 수학적 사고가 일어나는 그대로를 경험시키는 방향으로 나감으로써 학생들은 수학자들이 갖고 있는 사고 습관과 관점을 획득하게 되리라는 생각이다.

이런 의미에서 수학 교육은 학생으로 하여금 도제 수학자가 되게 하여, 수학자가 매일 습관적으로 하고 있는 그것을 그대로 실천하는 것이 바람직하다. 즉, 교실에서 일어나는 일들이 수학자가 하고 있는 일들과 일치해야 하는 것이다. 한편 어떤 사회 단체의 구성원이 되는 것은 구성원 사이의 의사 교환을 통해서 이루어진다. 지금까지 우리 나라의 수학 학습은 대체로 의사 교환의 역할을 무시하고 교사의 일방적인 지도하의 수업을 하고 있었지만 최근 들어 의사 교환을 강조하는 소집단 협력 학습에 관심을 기울이고 있다. 의사 교환을 강조하는 소집단 협력 학습에서는 그들이 관찰한 것을 이야기하고, 왜 그런 절차를 밟았으며, 그 해답이 왜 옳다고 생각하는지를 설명할 기회를 요구한다. 만일 교사가 어떤 방식으로 이야기하고 발문하면, 학생은 그러한 언어를 배우고, 문제를 해결하는 것을 배우며 수학적으로 행동하게 된다. 의사 교환이 각 학생들과 그들이 속한 공동체에 서로 유익을 주는 활동 중심에 놓여 있는 것이다.

인지 구조와 절차의 획득이란 면에서 수학 지식을 생각하는 것도 가치 있는 일이지만, 이 견해만으로는 수학적 경험에 대해 완전한 설명을 해주지 못한다. 실천으로서의 수학을 강조하는 보완적 견해는 수학 교실에서 학생들이 참여하는 활동에 초점을 맞출 뿐 아니라 수학을 만들고 이용하는 공동체 내의 실천에 초점을 맞출 것을 제안하고 있기 때문에, 현재 수학 교육에서 요구하고 있는 추론, 문제 해결, 의사 교환의 강조 등과 관련을 맺고 있다. 수학 지식은 개인적으로 뿐 아니라 사회적으로 구성되어 있으며, 수학의 실천은 근본적으로 사회적 실천이기 때문에, 수학을 실천으로 본다는 것은 지금까지 무시해 왔던 수학과 수학 교육의 사회적이고 문화적인 측면을 조사하고 수용할 것을 권장하고 있다.

## 참 고 문 헌

백석윤, 서점균 (1996). *프로젝트형 과제를 통한 열린 수학 학습 지도 연구.* (출판중).

이학주 (1989). *실천적 행위의 교육적 의미.* 서울 대학교 대학원 박사 학위 논문.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* The Falmer Press.

Fawcett, H. P. (1938). *The Nature of Proof.* New York: Columbia University Teachers College, Bureau of Publications.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht, Holland: D. Reidel.

Greeno, J. G. (1988). For the study of mathematics epistemology. In Charles, & Silver (Ed.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, Vol. 3.* (pp. 23-32). NCTM.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge.* New York: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge University Press.

Lave et al. (1988). Problem solving as an everyday practice. In Charles, & Silver (Ed.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, Vol. 3.* (pp. 61-81). NCTM.

Masingila, J. O. (1983). Learning from mathematics practice in out-of-school situations. *For the Learning of Mathematics 13*(2), 18-22.

NCSM (1977). *Position Paper on Basic Mathematical Skills.* Washington, D. C.: National Institute of Education.

NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA: Author.

Polya, G. (1957). *How to Solve It.* Princeton University Press.

Polya, G. (1966). On teaching problem solving. In CBMS, *The Role of Axiomatics and Problem Solving in Mathematics* (123-129). Ginn and Company.

Schoenfeld, A. H. (Ed.) (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education.* Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1988). Problem solving in context. In Charles, & Silver (Ed.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, Vol. 3.* (pp. 82-92). NCTM.

Silver, E. A. (1994). Mathematical thinking and reasoning for all students: Moving from rhetoric to reality. In D. F. Robitaille et. al. (Ed.), *Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education* (pp. 311-326). Les Presses de l'Universite Laval.

Tymoczko, T. (Ed.) (1986). *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Boston: Birkhäuser.

<Abstract>

## Considerations on Mathematics as a Practice

### Jeong, Eun-Sil[3]

A practice is classified into the practice as a content and the practice as a method. The former means that the practical nature of mathematical knowledge itself should be a content of mathematics and the latter means that one should teach the mathematical knowledge in such a way as the practical nature is not damaged.

The practical nature of mathematics means mathematician's activity as it is actually done. Activities of the mathematician are not only discovering strict proofs or building axiomatic system but informal thinking activities such as generalization, analogy, abstraction, induction etc. In this study, it is found that the most instructive ones for the future users of mathematics are such practice as content.

For the practice as a method, students might learn, by becoming apprentice mathematicians, to do what master mathematicians do in their everyday practice. Classrooms are cultural milieux and microsoms of mathematical culture in which there are sets of beliefs and values that are perpetuated by the day-to-day practices and rituals of the cultures. Therefore, the students' sense of 'what mathematics is really about' is shaped by the culture of school mathematics. In turn, the sense of what mathematics is really all about determines how the students use the mathematics they have learned. In this sense, the practice on which classroom instruction might be modelled is that of mathematicians at work.

To learn mathematics is to enter into an ongoing conversation conducted between practitioners who share common language. So students should experience mathematics in a way similar to the way mathematicians live it. It implies a view of mathematics classrooms as a places in which classroom activity is directed not simply toward the acquisition of the content of mathematics in the form of concepts and procedures but rather toward the individual and collaborative practice of mathematical thinking.

3) Chinju National University of Education (380 Shinan-dong, Chinju, Kyungnam 660-756, Korea; FAX: 0591-740-1239; E-mail: esjeong@ns.chinju-e.ac.kr)