한국초등수학교육학회지 1, 67-86.		Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 1, 67-86.

문제해결력 신장을 위한 전략 지도 방안

남 승 인[1)]

본 연구의 목적은 문제 해결력을 신장시키기 위해 해결 전략과 각 전략별 문제의 유형을 살펴보고, 전략 지도를 위한 구체적인 방안을 모색하는 데 있다. 전략의 지도 계열은 사용하기 쉬운 전략부터 사용하기 어려운 전략의 차례로, 또 전략 습득에 소요되는 시간이 적은 것부터 많은 것의 차례로 지도하는 것이 바람직하다. 또한, 전략의 습득 지도를 위한 문제는 그 전략의 간편함과 우수함을 알 수 있어야 하고, 기존의 지식과 기능으로 해결할 수 있어야 하며, 학생들이 흥미를 느낄 수 있는 문제가 제시되어야 할 것이다. 그리고, 전략의 응용 및 심화·발전시키기 위해서는 동일한 문제를 여러 가지 전략을 이용하여 해결한 후 각 전략의 특성을 분석·비교해 보는 기회가 필요하며, 좀 더 복잡한 문제 장면으로 확대·적용해 보는 기회가 필요하다.

I. 서 론

NCTM(1980)이 「학교 수학을 위한 권고」에서 "1980년대에는 문제해결이 학교 수학의 초점이 되어야 한다"고 권고한 이래 전 세계적으로 학교 수학에서는 문제 해결의 구현에 많은 관심을 기울여 왔으며, 최근에 와서는 수학 교육에서 가장 역점을 두어야 할 대상이 되었다. 예컨대 미국의 NCTM(1989)이 발표한 교육과정과 평가 규준안(*Curriculm and Evaluation Standards in School Mathematics*), 영국의 교육성이 발표한 국가 교육과정(*National Curriculm*, 1989), 일본의 문부성에서 발표한 새 학습지도요령(1989) 등에 있어서 문제 해결력의 육성을 수학 교육의 중요한 목표로 제시하고 있으며, 우리 나라에서도 제 5차 교육과정에 이어 제 6차 교육과정에 문제 해결력 신장을 강조하고 있다.

특히 제6차 수학과 교육과정에서는 문제 해결력 신장을 교과 목표로서 뿐만 아니라 지도 내용면에서 구체적인 전략을 밝힘으로써 보다 적극성을 띠고 있다. 또한 교과서 구성에서도 문제해결력 신장을 더욱 강화한다는 입장에서 문제 해결 전략의 학습을 위해 단원 - 여러 가지 문제(1) - 을 증설하였다. 이와 같이 수학 교육에서 문제 해결 지도의 강조는 문제 해결의 과정을 통해서 보다 확실한 수학적 지식이나 수학적인 사고를 정착시킨다는 학습 지도의 방법적인 면과 문제 해결력의 육성, 스스로 수학적 문제를 발견·설정하고 그것을 해결한다는 독자성, 보다 적극적인 수학적 힘의 육성에 그 의도가 있는 것으로 생각된다.

문제 해결력 신장을 위해서는 학생들에게 지나치게 많은 훈련과 연습을 요구하기 보다는 중요한 개념이나 원리 구성 및 문제 해결에 필요한 발견술, 즉 문제 해결 전략을 가르칠 필요가 있다. 문제 해결 전략은 문제를 해결하는 창조적인 안내라고 볼 때, 문제 해결 전략 그 자체가 문제 해결을 보장해 주지는 않을 지언정 학생들은 문제를 해결하는 과정에서 여러 가지 전략을 적용해 봄으로써, 각 전략의 특성 및 유용성을 알게 될 것이며, 또한 그 전략을 사용하는 데 자신감을 가질 수 있을 뿐만 아니라 다양한

---

1) 대구 교육 대학교 ([705-715] 대구시 남구 대명2동 1797-6)

문제 상황에 효율적으로 적용할 수 있는 '정신적 습관'을 형성시킬 수 있을 것이다.

양인환(1992), 신준식(1994), 학교수학연구 다락모임(1994)에 의하면 '문제 해결의 성공율은 대부분 평상시 문제를 풀어 본 경험과 밀접한 관계가 있으며, 여러 가지 문제 해결 전략의 학습은 문제 해결력 신장에 중요한 영향을 미친다.'고 주장하고, 문제 해결력을 신장시키기 위해서 무엇보다 중시되어야 할 사항은 다양한 발견술을 적용해 보는 경험, 즉 다양한 해결 전략을 습득하고 이를 적용해 보는 경험을 강조하고 있다. NCTM(1980, 1983)에서도 문제 해결은 일종의 사고 태도 또는 습관의 취득이기 때문에 문제 해결을 위한 전략의 지도는 어릴 때부터 시작할 것과 학생들에게는 문제 상황을 통해 전략의 필요성을 인식하도록 하고, 문제 해결 경험을 통해 전략 습득의 유용성을 깨닫게 할 것을 권고하고 있다.

여기에서의 문제 해결은 학생들이 그들 주변에서 수학의 유용성과 그 기능을 경험하는 과정이고, 전략은 이를 위한 탐구와 적용 방법이라고 볼 때 수학을 학습하고 적용하는 일관된 상황을 제공하기 위해서 전략에 대한 학습이 강조되어야 할 것이다. 따라서 수학 교육에서의 문제 해결 전략의 지도는 전략 습득의 필요성이나 그 이점의 뒷받침을 통하여 학생들을 주체적 학습으로 유도하고 문제 상황으로부터 수학의 기초적인 지식, 기능의 의미 이해를 통한 확실한 정착, 해결 과정을 통한 수학적 사고나 태도의 육성 및 문제해결력의 육성을 지향하는 학생 중심 교육의 실천적인 방편이 될 수 있을 것이다. 본고에서는 Lenchner의 분류에 따른 전략별 문제의 유형과 문제 해결력 신장을 위한 전략 지도 방안에 대해서 살펴보고자 한다.

II. 문제와 문제 해결 전략

1. 문 제

수학에서 논의하는 문제(problem)란 학자에 따라 여러 가지로 해석되고 있다. Lester(1978)는 문제란 '처음에는 정확한 해(solution)의 길을 알지 못하지만 해의 결과를 요하는 개인 또는 단체에게 부과된 양적인 장면(quantitative situation)', 즉 '개인이나 집단이 해결하려는 그러나 구체적이거나 확실한 해결의 방법을 쉽게 얻을 수 없는 어떤 상황'으로 정의하고 있다.

Krulik & Rudnick(1984)은 문제란 '학생들이 즉각 알맞은 해에 이르는 길을 찾지 못하고 당황하고 어떤 장벽을 느껴야 하며, 기존에 알고 있는 방법뿐만 아니라 새로운 풀이 방법을 고안하여 시행함으로써 탐구하는 과정으로 들어가도록 하는 장면'으로 정의하고, 문제는 모든 학습자들의 수준에서 공통적으로 정의될 수 없으며, 동일한 문제에 대해서도 개인의 수학적 능력에 따라 다음의 세 가지, 즉 질문(question), 연습(exercises), 문제(problem)의 의미를 갖는다고 보고 있다 (Krulik & Rudnick 1984, pp. 3-4).

여기서 질문은 과거에 학습한 내용에 대한 학습 경험을 되살려 대답할 수 있는 것으로서 회상(recall)과 관계가 깊은 장면, 연습은 어떤 내용을 학습한 후 여기서 얻은 지식을 보다 확실히 학습자에게 정착시키기 위한 반복 훈련(drill)과 실습(practice) 과정에서의 장면, 문제는 어떤 수학의 내용을 처음으로 배우게 될 때, 즉 학습 경험이 처음으로 이루어질 때의 당면 과제로써 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 정보의 수집과 해결 방법의 탐구가 이루어지며 또한 깊은 사고가 요구되는 장면으로 구분하고 있다.

또 Lenchner(1983, p. 8)는 '학교 수학의 궁극적인 목적은 문제 해결 능력을 발달시키는 데 있으나 아직까지 일부 교사들은 계산 기능의 숙달로부터 저절로 문제 해결력이 길러지는 것으로 잘못 생각하고

있다'고 지적하고 문제 해결은 문제 해결 그 자체를 배우는 것이 필요하며, 문제 해결 지도를 위해서는 연습(exercise)과 문제(problem)를 구별할 필요성을 제기하고 있다.

그는 연습이란 해결 방법이 이미 알려진 작업의 수행, 즉 계산 과정상의 한 가지 또는 그 이상의 알고리즘을 적용하면 곧바로 문제의 해에 이르게 되는 장면이며, 문제란 해결을 위한 전략이 즉각적으로 명백히 드러나지 않기 때문에 해에 이르는 길이 복잡하므로 해에 이르기 위해서는 문제 해결자의 창조적이고 독창적인 어떤 차원의 아이디어가 요구되는 장면으로 규정하고 있다.

예컨데 다음 [예 1]의 문제에서 ①, ②, ③의 해결은 간단한 조사나 계산 알고리즘에 의해서 해결할 수 있는 문제로 이러한 유형의 문제를 일반적으로 연습 문제(exercises)로 분류하는 반면, ④, ⑤, ⑥의 해결은 비형식적인 해결 절차가 적용되는 문제로써 문제 해결을 수행하기에 앞서서 해결을 위한 적절한 전략을 선택해야 하는 문제로 이런 유형의 질문을 문제(problems)로 분류하고 있다.

[예 1] 영수는 10원짜리 동전을 13개, 50원짜리 동전을 5개, 100원짜리 동전을 3개 가지고 있다.

① 영수가 가지고 있는 동전은 모두 몇 개인가?

② 영수가 가지고 있는 돈은 모두 얼마인가?

③ 두 개의 동전으로 살수 있는 가장 비싼 물건의 값은 얼마이고, 가장 싼 물건의 값은 얼마인가?

④ 한 종류의 동전으로 살 수 있는 물건을 다른 동전을 사용하여 사는 방법은 몇 가지인가?

⑤ 세 종류의 동전을 골고루 이용하여 살 수 있는 물건값은 몇 가지인가?

⑥ 한 개 또는 그 이상의 동전을 사용하여 값이 다른 물건을 몇 가지나 살 수 있을까?

따라서 앞으로의 수학 교육에서는 위 ④, ⑤, ⑥과 같은 유형의 문제에 초점을 두어야 할 것이다.

2. 문제 해결 전략

Mayer(1983)는 전략을 '문제 공간에서 해에 이르는 길을 찾는 기술'로서 정의하고, 전략은 문제의 해를 보증해주지는 않지만 문제의 해에 이르는 길을 안내한다고하여 전략의 중요성을 강조하고 있다. 문제해결은 곤란의 해소이며, 그것을 위한 활동은 문제의 분석·이해를 위한 활동이므로 문제 해결 활동과 관련지어 생각한다면 전략은 분석·이해의 활동과 관련이 된다고 보겠다.

石田淳一(1986)은 전략을 어떤 목적을 달성하기 위한 종합적인 준비 · 계획 · 수단 등의 조직적 운용 방법으로 책략, 방책(어떤 일을 처리하는 꾀와 방법) 등으로 말하고 있다. 이렇게 볼 때, 수학 교육에서의 전략이란 당면한 문제를 해결하려고 할 때, 그 해결의 전반적인 절차나 해결 방법을 발견하는 단서를 얻는 방법 또는 그 구체적인 수단을 흔히 문제 해결의 전략이라고 보겠다.

우리는 일상 생활에서 부딪치는 모든 문제 해결에 접근하는 적절한 방법은 유일한 것이 아니라 다양한 방법으로 해결할 수 있다. 따라서 학생들에게는 그들 스스로의 경험과 노력에 의해 문제 해결을 위한 일반적인 틀, 즉 전략을 갖도록 하는 것은 문제 해결에 있어서 매우 유용하다.

문제 해결 전략은 학자에 따라 여러 가지로 나누고 있으나 본 연구자는 일반적 전략과 특수 전략의 두 가지로 나누고 생각해 보고자 한다. 여기서 말하는 일반적 전략이란 대부분의 수학 문제 해결에 적용될 수 있는 Polya가 제시하는 문제 해결 4단계 전략 - ① 문제의 이해 → ② 계획 수립 → ③ 계획의 실행 → ④ 검토·반성 - 을 말하며, 특수 전략이란 문제의 해결 방법을 발견하는 데 도움이 되는 구체적인 수단으로 문제의 특성에 따라 해에 이르는 지름길을 안내하는 G. Lenchner(1983)의 12가지의 전략을 들고 있다. 특수 전략은 Lenchner처럼 일반 전략의 부분 집합으로써 일반적 전략인 G. Polya의 문제 해결 4단계 중 제 2단계인「계획 수립」단계에서 적용되는 전략으로 취급하는 것이 바람직하다고 보겠다.

가. 일반적 전략

일반적 전략의 각 단계에 따른 활동을 정리하면 다음과 같다.

(1) 문제를 이해하는 단계

학생들이 문제를 풀기 전에 주어진 문제에 대해서 생각해 보도록 권고해야 한다. 교사는 학생들에게 문제에 관련된 다음과 같은 질문 기회를 제공함으로써 학생들은 문제 해결 과정에 관련된 의문을 줄일 수 있을 것이다.

* 주어진 정보는 충분한가? 필요없는 정보 또는 부족한 정보는 없는가?
* 문제에서 구하려는 것은 무엇인가?
* 유사한 문제를 풀어 본 경험은 있는가?

문제를 이해하는 데 학생들이 겪는 어려움의 하나는 학생들의 경험과 문제 진술에 사용된 용어(언어)와의 관련성이다. 만일 학생들이 언어에서 어려움을 느낀다면 그들이 이해할 수 있는 언어 또는 그들의 경험과 관련시킬 수 있는 언어와의 연결이 필요하다.

(2) 해결 계획의 수립 단계

학생들은 그들이 직면한 문제에 대한 이해가 이루어지면, 문제 해결에 필요한 수행 계획을 결정해야 한다. 즉 문제 해결을 위한 합리적인 전략을 선택해야 한다.

우리는 동일한 문제에 대해서도 해결자에 따라 서로 다른 전략을 사용하는 것을 종종 목격할 수 있다. 따라서 교사는 학생들이 문제 해결에 있어서 그들에게 전혀 생소한 전략을 사용할 수 없다는 사실을 깨달아야 한다. 즉 교사의 관점에서는 아무리 간편하고 유용한 전략이라고 생각하더라도 학생들이 그 전략에 대한 이해 및 적용 경험이 없다면 그들이 주어진 문제 해결을 위해 그 전략을 사용할 수 있으리라는 기대는 할 수 없다.

다른 기능과 마찬가지로 문제 해결을 위한 기능도 학습을 통해 배워지는 것이다. 따라서 학생들의 문제 해결력을 기르기 위해서는 새로운 전략을 실제로 적용해 볼 수 있는 다양한 문제 장면이 제공되어야 하며, 또한 어떠한 문제를 해결하는 전략은 유일하지 않다는 사실을 인식할 수 있는 상황과 기회의 제공이 필요하다. 수학적 문제 해결에 따른 전략은 다양하지만 일반적으로 다음 항목에서 설명할 특수전략 중 몇 가지가 유용하다고 보겠다.

(3) 계획의 실행

문제 해결 계획을 수립하는 것과 그것을 수행하는 것을 명백히 구분하기란 어렵다. 계획의 실행이란 주어진 문제의 해에 도달하기 위하여 계획한 전략에 따라 실제로 활동해 보거나, 자료를 조작해 보거나, 연필을 들고 종이에 그림을 그려 보거나 쓰면서 해에 접근하는 과정이다. 실제 문제 해결을 수행하는 사람은 학생 자신이라 할지라도 문제 해결 과정에서 가장 중요한 역할을 하는 사람은 교사이다. 학생들은 문제 해결 계획을 수행하는데는 종종 산술적인 계산이 수행되는데 학생들이 산술적인 어려움을 겪을 경우 교사는 힌트나 질문을 통하여 학생들을 돕고 안내해야 하며, 수준 미도달자에게는 좀더 자세한 해결 방향을 암시해 주어야 한다.

만일 2~3단계의 과정을 거쳐 해결해야 할 문제일 경우 다음 단계를 수행하기 전에 매 단계별로 올바르게 수행하였는지를 점검해 보도록 권고해야 하며, 또 학생들은 그들이 문제 해결에 사용한 전략이 효과적이지 않을 경우 그들의 관점을 바꾸어 볼 것을 권고해야 한다.

일선 교사들은 일반적으로 문제 해결 과정에서 다른 세 단계--문제의 이해, 해결 계획의 수립, 결과의 반성--을 경시하고 계획을 수행하는 단계를 강조하는 경향이 있다. 그러나 문제 해결의 각 단계에서의 주의 깊은 고찰은 학생들의 지각력을 발달시킬 수 있고, 계산은 문제의 해에 이르게 하는 광범위하고 유용한 절차의 일부일뿐임을 인식시키는 데 도움을 준다.

(4) 결과를 반성하기

대부분의 학생들은 문제를 풀어서 답을 구했을 때, 그 답의 정당성에 대해서 검토해 보는 과정을 매우 소홀히 하거나 아예 검토할 필요성을 느끼지 않는 경향이 있다. 이는 문제 해결 과정에서 중요한 일부분을 생략하는 것과 마찬가지이다. 교사는 학생들에게 그들이 구한 답의 정당성을 뒷받침하기 위한 반성과 검토의 기회를 가질 것을 권고해야 한다. 또 답은 완전한 문장의 형태로 나타내도록 요구해야 한다.

이는 문제의 진술을 재확인하고 문제에서 요구하는 것이 무엇인지를 명확히 파악 할 수 있는 근거가 되며, 또한 해결 과정에서 발생할 수 있는 오류를 발견하는데 도움을 준다. 답이 문제의 뜻과 맥이 통할 경우 정확한 계산을 하였는지, 계산 과정에 대한 최종적인 검토의 기회도 제공해야 한다.

반성의 단계에서 중요한 것은 바른 답을 확인하는 것도 중요하지만 전략 지도의 측면에서 볼 때, 문제 해결 과정에서 작용한 사고를 확장시켜 주는 기회를 갖게 하는 것이 필요하다. 자신이 사용한 전략과 과거에 사용했던 전략을 비교해 보는 기회를 갖는 것, 자신의 문제 해결 전략을 다른 사람의 문제 해결 전략과 비교해 보는 활동은 아이디어를 공유할 수 있는 기회인 동시에 보다 간편하고 유용한 전략의 습득과 수학적인 사고력의 신장에 매우 유용하다.

특히 주어진 전략을 활용할 수 있는 새로운 문제를 고안한다든지, 주어진 문제 해결을 위해 새로운 전략을 고안하는 일은 학생들이 문제 해결력을 기르기 위한 필수적인 요소 가운데 하나이다.

나. 특수 전략

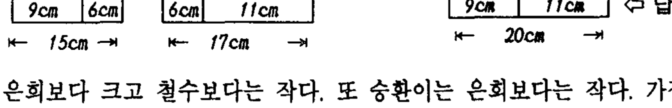
특수 전략에 따른 전략별 특성과 문제의 유형을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 그림 그리기

문제가 해석되지 않을 경우. 즉 문제를 읽은 후 주어진 조건이 명백하게 드러나지 않을 경우 그림이나 도해 등으로 시각화해 보는 것은 문제를 이해하고 해결 전략을 세우는 데 유용하다. 장면을 그림으로 나타내기 어려운 경우는 장면을 나타내는 기호를 사용하여 간단한 도식을 그려본다. 그림이나 도식은 특히 다단계 문제 해결에 있어서 여러 가지 전략을 이끄는데 유용하며, 저학년부터 계통적인 지도(그림이나 도식→선분도→면적도→벤도→…등)가 필요하다. 흔히 그림 그리기 전략은 사고 수준이 낮은 단계에서 적절한 전략을 생각하기 쉬우나 그림을 그려서 생각한다는 것은 다음 단계(예:연산의 결정, 변화의 규칙성 발견 등)로 나아가는 데 유용한 바탕이 된다.

[문1] 길이가 각각 6cm, 9cm, 11cm인 세 막대가 있다. 14cm의 길이를 측정하려면 이들 막대를 어떻게 이용하여야 할까?

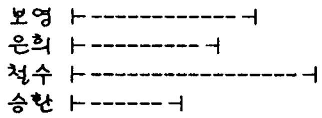
(풀이)



[문2] 보영이는 은희보다 크고 철수보다는 작다. 또 승환이는 은희보다는 작다. 가장 큰 사람의 순서대로 써라.

(풀이) (그림을 눕혀서 그리면 오른쪽과 같다.)

[답] 철수>보영>은희>승환



(2) 규칙성 찾기

문제 해결을 위하여 가장 많이 사용되는 전략 중의 하나는 규칙성을 인식하고 그것을 확장하는 일이다. 이 전략은 주어진 자료에서 규칙성을 인식하고 이를 문제 상황에 적용하므로서 문제를 해결 수 있게 한다. 또 이 전략은 다른 문제를 해결하는 전략들로부터 추론하여 본 문제를 해결 전략으로 사용하기도 한다. 어떠한 사실을 순서에 따라 시행한 결과나 변화의 모양을 표에 기록하고 거기에서 규칙성을 찾음으로써 주어진 자료로부터 새로운 정보를 예상하는 데 유용하다.

[문1] ◇(diamond)라고 부르는 연산 기호가 아래와 같은 규칙을 가질 때, [7◇3]의 값을 구하여라.

2◇4=8. 5◇3=13. 3◇5=11. 9◇7=25.

(풀이) 주어진 예들이 어떤 규칙을 갖는지 조사하여라. 2◇4에서는 (◇=×)이지만 5◇3≠3◇5이므로 (◇≠×)이다. 좀더 살펴보면 ◇는 앞의 수를 2배하여 뒤의 수를 더하는 규칙을 갖고 있다.

[답] 2×7+3=17

[문2] 오른쪽 표의 ○안에 들어갈 알맞은 기호를 써라.

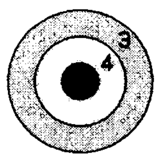
[답] 왼쪽 위에서부터 →, ↑, →, ↑, ←.

→	↑	←	↓
↑	←	↓	→
←	↓	○	○
↓	○	○	○

(3) 목록표 만들기

매우 많은 양의 자료를 처리하거나 또는 모든 가능성을 고려해야 할 문제인 경우 주어진 정보를 조직화하여 일목요연하게 표로 나타냄으로써 반복을 피하기 위해 사용하는 전략이다. 조건에 알맞은 많은 경우가 있을 때, 그것을 차례대로 구해 가는 방법이나 경우를 정리하여 간단 명료하게 나타내는 방법은 문제 해결의 좋은 전략으로서, 목록표, 분류표, 분포도, 수형도 등을 사용할 수 있다.

[문1] 3개의 화살을 쏘아 오른쪽 그림과 같은 과녁에 모두 맞혔다. 얻을 수 있는 서로 다른 점수는 모두 몇 가지인가?



(풀이)

9점짜리에 맞춘 화살의 수

3	2	1	0
9+9+9=27	9+9+4=22	9+4+4=17	4+4+4=12
	9+9+3=21	9+4+3=16	4+4+3=11
		9+3+3=15	4+3+3=10
			3+3+3=9

[답] 4+3+2+1=10(가지)

[문2] 윤희는 파란색과 빨간색 잠바와 노란색 초록색 바지가 있다. 서로 다른 차림으로 옷을 입는 방법은 몇 가지인가?

(풀이)

바지\잠바	파란색	빨강
노란색	노랑\파랑	노랑\빨강
초록색	초록\파랑	초록\빨강

(4) 표 만들기

문제가 한 가지 이상의 특성을 가진 자료를 포함하고 있을 때 주어진 정보를 하나의 표에 나타내어 자료를 조직화하고 표에 나타난 자료 사이의 관계에서 규칙성을 파악하여 이를 근거로 문제를 해결하는 전략이다. 표를 만들어 해결하는 전략은 자료를 표에 나타내면 빠진 자료를 쉽게 찾아낼 수 있을 뿐만

아니라 의미있는 규칙성을 발견하는 데 매우 유용한 가치가 있다. 또한 이 전략은 수량 사이의 관계를 파악하여 문제를 해결해 가는 것으로서 자료값의 분포 및 변화의 경향 등 두 사상(mapping)에 착안하여 문제 해결의 실마리를 찾을 수 있도록 한다.

[문1] 닭과 송아지를 합하여 18마리의 가축이 있다. 다리의 수가 모두 50개일 때, 닭과 송아지는 각각 몇 마리인가?

(풀이) 닭의 다리는 2개, 송아지의 다리는 4개이므로 오른쪽과 같이 표를 만들어 보자. 표의 왼쪽에서 오른쪽으로 1칸씩 갈 때마다 다리수가 2개씩 줄어들므로 다리 수가 50개려면 10칸을 가야 한다. 따라서 닭의 수는 1+10=11마리이고, 송아지의 수는 17−10=7마리이다.

닭 수	1	2	3	4	5	…	?
송아지 수	17	16	15	14	13		?
다리 수	70	68	66	64	62		50

[문2] 우리 반 학생 5명 중3명이 수학을 좋아한다. 전체 35명 중 몇 명이 수학을 좋아할까?

(풀이)

전체 :	5	10	15	20	25	30	35
수학 :	3	6	9	12	15	18	21

답 :21명

(5) 단순화 하기

어렵거나 복잡한 문제에 직면했을 때 단순하면서도 유사한 문제를 먼저 해결해 보는 경험은 어렵거나 복잡한 문제 해결에 도움을 준다. 일련의 단순한 문제 해결은 본 문제 해결을 위한 기초가 되는 규칙성을 찾도록 이끌 수 있다. 이 전략은 규칙성 찾기나 표 만들기 등과도 관련이 깊으며 다른 전략의 보조 역할의 의미에서도 중요하다.

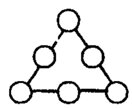
[문1] 1부터 150까지의 숫자가 쓰인 카드가 150장 있다. 숫자 '7'이 쓰인 카드는 모두 몇 장인가?

(풀이) 7, 17, 27, … 처럼 일의 자리에 7이 쓰인 카드가 15장, 70, 71, 72…처럼 십의 자리에 7이 쓰인 카드가 15장인데 77의 경우는 중복되므로 십의 자리에만 7이 쓰인 카드는 9장이다. [답] 24장

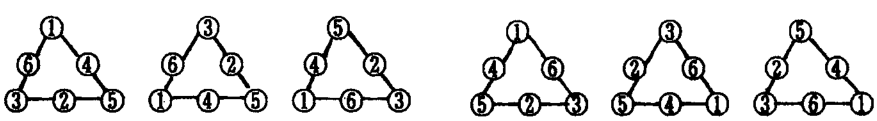
(6) 시행착오 겪기

문제 해결을 위한 효과적인 방법 중의 하나는 답에 대한 합리적인 추측을 해보고, 문제의 조건에 대해 역으로 추측하고 검토해 보는 일이다. 이것을 흔히 시도라고 한다. 때때로 처음 한 번의 시도로 옳은 답에 이르는 경우도 있으나 대부분 여러 번의 시도 끝에 올바른 답에 도달하는 경우가 많다. 가능성을 가졌던 답 중에서 오류가 있는 답을 하나씩 제거해 가면서 또다른 정보를 얻음으로써 올바른 답을 이끌어낼 수 있다. 사실 시행착오 전략은 여러 번 시행착오를 거치는 사고 조작이 반복됨으로 소박한 방법이라고 생각할 수도 있다.

[문1] 오른쪽의 ○안에 1~6까지의 수를 한 번씩만 넣어 삼각형의 각 변에 있는 수의 합이 10이 되도록 하여라.



(풀이) 세 수의 합이 10인 경우는 1+3+6, 1+4+5, 2+3+5의 세 가지인데 1, 3, 5는 2번씩 사용되었으므로 삼각형의 꼭지점에 위치한다.



[문2] 2, 3, 5, 6, 8, 9의 6장의 숫자를 한 번씩 이용하여 다음 식이 성립하도록 하여라.

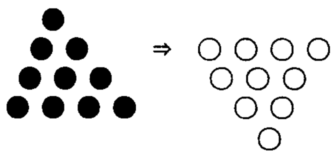
□□+□□=□□

[답] 68+25 = 93

(7) 실험해 보기

기하적인 형상이나 공간적 관련성이 있는 문제는 구체적인 자료, 즉 물리적인 모델을 이용하여 조작해 봄으로써 해결할 수 있다. 조작 전·후의 관계를 살펴보는 정신적 작용은 직관력 뿐만 아니라 논리적 사고력 신장에도 유용하다.

[문1] 오른쪽 그림의 왼쪽 삼각형에서 3점을 이동하여 오른쪽 삼각형을 만들어라.



(풀이) 동전이나 바둑돌등을 이용하여 실제로 만들어 본다.

(8) 실제로 행하여 보기

문제 해결에 따른 필요한 절차나 문제 장면을 시각화하기 어려운 경우 문제 장면을 실제로 실행해 보는 것은 문제 해결에 유용하다. 문제 장면의 대상들을 직접 사용하거나 대상들을 다른 것으로 바꾸어 실행해 봄으로써 직접 답을 얻거나 다른 전략의 발견을 유도할 수 있다. 이러한 방법은 특히 저학년에서 효과적이다.

[문1] 32명의 학생들이 한 줄로 서서 1번부터 차례로 번호를 붙이면서 짝수 번호는 앉힌다. 서 있는 학생들에게 다시 1번부터 번호를 붙여 짝수 번호인 학생을 앉혔을 때 서 있는 학생들은 몇 명인가?

(풀이) 실제로 번호를 붙이면서 앉힌 후, 남은 학생의 수를 세어본다. 또는 실행이 어려울 경우는 종이에 번호를 써서 연필로 지워보고 남은 학생수를 알아본다.

(9) 거꾸로 풀기

어떤 문제는 행동의 계열을 포함하고 있다. 즉 행동의 최종적인 결론은 주어져 있고, 문제의 처음 조건이 무엇인지를 묻는 문제인 데 이런 유형의 문제는 결론에서부터 처음 조건으로 역으로 생각하면 해결할 수 있다.

[문1] 다음과 같은 차례로 계산한 답이 32일 때, 처음 수(?)는 얼마인가?

$(\ ?\ ) \xrightarrow{\div 2} (\square) \xrightarrow{-5} (\square) \xrightarrow{\times 8} (32)$ (풀이) $(18) \xleftarrow{\times 2} (9) \xleftarrow{+5} (4) \xleftarrow{\div 8} (32)$ [답] 18

(10) 식을 세워 풀기

대수는 서로 다른 양이나 그 사이의 관계를 수식의 형태로 표현하고 있다. 문제의 조건들 사이의 관계를 등식이나 부등식으로 나타내고 이를 해결함으로써 답을 구할 수 있다.

[문1] 어떤 수를 3배한 수는 그 수보다 16이 크다면 어떤 수는 얼마인가?

(풀이) 어떤 수를 n이라고 하면, 어떤 수를 3배한 수: $3n$. 어떤 수보다 16이 큰 수: $n+16$.

$3n=n+16$. $3n-n=n+16-n$. $2n=16$. $n=8$.

(11) 연역적으로 추론하여 풀기

수학에서 사용되는 추론으로는 귀납 추론, 유비 추론, 연역 추론이 있다. 연역은 논리 또는 추론을 통하여 결론을 이끌어 내는 과정이다. 이 전략은 불가능한 해법을 제거해 가는 절차, 즉 가능성이 있는 모든 해법에 대해 점검해 보고 불가능한 해법을 제거해 가면서 가능한 하나의 해법에 이를 때까지 한

단계씩 차례로 고찰해 가는 전략이다.

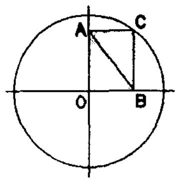
[문1] 배 3개와 사과 2개의 값은 780원이고, 같은 가격의 배 2개와 사과 3개의 값은 820원이다. 만일 배와 사과를 각각 한 개씩 사려면 얼마의 돈이 필요한가?

(풀이) 주어진 정보를 종합하여 분석해 보면 배와 사과를 각각 5개씩 살 경우 그 가격은 (780+820)=1600(원)이므로 각각 한 개씩 살 경우의 가격은 1600÷5=320(원)이다.

(12) 관점을 바꾸어 풀기

때에 따라서는 특수한 문제 해결을 위한 시도가 방해를 받든가 실패하는 경우가 있다. 이는 해에 접근하기 위한 유일한 방법만을 생각하거나 주어진 정보에 대해 부정확한 가정에 집착하는 '사고의 고착화(mind set)'때문에 발생하는 것인데 이 경우는 문제를 다시 읽은 후 기존의 관점을 바꾸어 해결하는 것이 필요하다.

[문1] 오른쪽 그림은 점 O를 중심으로 하고 반지름이 10cm인 원 안에 직사각형 AOBC를 그린 것이다. 선분 AB의 길이를 구하여라.



(풀이) 선분 OC를 그으면 직사각형 AOBC에서 (대각선 AB)=(대각선 OC)이고, 대각선 OC의 길이는 원의 반지름이므로 (선분 AB)=10cm.

III. 문제 해결 전략 지도의 실제

1. 전략지도의 계열

가. 학년 수준에 따른 전략지도 계열

학생들의 발달 단계나 학습 내용에 따라 거기에 맞게 어떤 전략을 어느 학년에서 지도하는 것이 적합한가는 전략 지도에서 검토되어야 할 중요한 과제 중의 하나이다.

[표 1] 학년별 문제 해결 전략

전 략 　　　　　　　학 년	저학년	중학년	고학년
• 실제로 해 보고 확인한다.	○	○	○
• 그림을 그린다.	○	○	○
• 표를 만든다.		○	○
• 규칙성을 찾는다.		○	○
• 식을 세운다.		○	○
• 연역적으로 생각한다.		○	○
• 관점을 변경한다.		○	○
• 거꾸로 생각해 본다.			○
• 문제를 단순화하여 풀어 본다.			○
• 정리된 세목을 만든다.			○

문제 해결 전략에 따라 어떤 특정 학년 수준에 국한시켜 지도하는 것은 바람직하지 않으며 또한 그렇게 지도되어서도 안될 것이다. 즉 문제의 장면에서 이용되는 연산자의 수나 해결에 따른 난이도를 조정

하여 모든 전략을 활용하여 문제를 해결해 보도록 하는 지도가 바람직한 것으로 생각된다. 다만 전략에 따른 몇 개의 실험 연구 결과를 참고로 하면 각 학년에서 다양한 전략을 학습할 기회를 제공하되 학생의 사고 수준을 고려할 때 저·중·고 학년별로 앞의 [표 1]과 같은 전략에 좀더 비중을 두고 지도하는 방법을 생각할 수 있을 것이다.

나. 난이도에 따른 지도 계열

전략 지도의 계열을 결정하는데 R. Charles와 F. Lester는 그 기준으로 다음 두 가지를 제시하였다. 첫째, 문제를 해결하는 사람이 사용하기가 쉬운 전략부터 어려운 전략의 차례로 지도한다. 둘째, 전략을 습득하는 소요되는 시간이 적은 것부터 많은 것의 차례로 지도해야 한다.

예를 들어 "예상하고 확인하기" 혹은 "시행착오를 겪기" → "표를 만들기" → "규칙성을 찾기" →"식을 세워서 해결하기"의 차례로 지도 계획을 세워서 지도하는 경우를 생각해 보자.

[예 2] 한 자루에 50원짜리 연필과 한 자루에 60원짜리 연필을 합하여 30자루를 사고 1620원을 지불했다. 60원짜리 연필은 몇 자루를 샀겠는가?

학생들은 이미 습득한 "예상하고 확인한다"는 전략이나 "표를 만든다"는 전략을 써서 해결할 수 있을 것으로 예상된다. 이들 전략에 의한 해결에는 답을 얻기까지 시간적·공간적으로 많은 노력이 필요하다. 따라서 이들 해법에 대한 실행 또는 논의가 이루어진 후에 교사가 "더 좋은 해결 방법은 없을까" 또는 "더 간단한 방법은 없을까"라고 발문하여 지금까지의 해결 과정을 다시 한 번 살펴본 후, 다음과 같이 표를 만들고 주어진 표에서 규칙성을 찾아서 이를 이용하여 해를 구할 수도 있다. 아래 표에서 연필의 전체 값은 60원짜리 연필이 1자루씩 늘 때마다 10원씩 늘므로 60원짜리 연필의 수를 □라면, □=(1620−1500)÷10=12(자루)를 얻을 수 있다.

50원인 연필(자루)	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	…	○
60원인 연필(자루)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	□
값의 합 (원)	1510	1520	1530	1540	1550	1560	1570	1580	1590	1600	…	1620
규 칙	+10	+10	+10	+10	+10	+10	+10					+10

이와 같이 문제 해결의 전략 지도는 그 계열에 따라 지도 계획을 세워 선수 전략에 의한 해법을 반성시킴으로써 새로운 전략의 지도를 자연스럽게 전개할 수 있을 것이다.

그러나 모든 전략의 지도를 직열적으로 계열화시키기는 어렵다. "그림을 그려서 해결하기", "예상해 보고 확인하기"와 같은 가장 기초적인 전략, 또는 기초적이기는 하나 주로 복잡한 문제 해결에 쓰이는 "목록표를 만들어 해결하기", "단순화하여 해결하기" 등의 전략, 또는 그림이나 표를 토대로 하여 "규칙성을 찾아서 해결하기", "식을 세워서 해결하기" 전략 등이 있으므로 전략 지도의 계열은 그 절대성의 추구보다는 선수 전략이 후속 전략으로 발전되게 하는 융통성이 요구된다고 하겠다.

2. 전략의 습득 지도

가. 전략 지도를 위한 문제 개발

문제 해결 전략의 지도를 위해서는 교과서나 익힘책의 문제 이외에 전략 그 자체의 지도에 중점을 둔 문제의 개발이 필요하다. 특정 전략의 지도를 위한 문제가 교과서에 제시되어 있지 않는 경우는 물론이고 제시되어 있는 경우라고 하더라도 장면이나 유형을 달리하는 문제와 보다 많은 예시의 개발이 요구

된다. 전략을 습득시키기 위한 문제의 개발에 있어서 개발되는 문제는 다음과 같은 관점을 고려해야 할 것이다.

① 학생들에게 그 전략의 이점(편리성과 우수성)을 분명하게 알게 할 수 있는 것

② 기존의 지식이나 기능으로 해결할 수 있는 것

③ 학생들이 흥미를 느끼기 쉬운 것. 등의 조건을 가지는 것을 생각할 수 있다.

다음 예는 "그림을 그려서 해결하기" 전략을 지도하기 위한 문제이다.

[예 3] 길이가 100cm의 굵기가 일정한 통나무가 있다. 이 통나무를 톱으로 잘라 4등분하는데 12분 걸린다고 한다. 이 통나무를 5등분한다면 몇 분이 걸리겠는가?

이 문제 해결을 위해서 우선 학생들에게 그들이 알고 있는 전략을 이용하여 해결할 수 있는 기회를 제공해 준다. 물론 '그림 그리기' 전략을 이용하여 이 문제나 이와 유사한 문제를 해결해 본 경험이 있는 학생은 쉽게 접근할 수 있을 것이다. 그러나 아직까지 많은 학생들은 '식 세우기' 전략에 의존하는 경향이 강하므로 이 문제의 해답을 구하는데 학생들은 흔히 12÷4=3(분)으로 생각해서 3×5=15(분)으로 잘 못 생각하기 쉽다. 이럴 경우 '그림 그리기' 전략을 이용함으로써 '그림 그리기' 전략의 편리함과 우수성을 효과적으로 지도할 수 있을 것이다.

전략의 습득을 위해서는 동일한 전략에 대해 다양한 문제 장면을 제시해 주는 것이 가장 바람직할 것이다. 그러나 현실의 근무 여건상 과중한 부담이 될 수도 있다. 이럴 경우 '문제 만들기'와도 관련성을 맺을 수 있는 데 다음 [예 4]처럼 [예 2]의 문제를 활용하여 ① 장면을 바꾸어 제시하기 → ② 수량을 바꾸어 제시하기 → ③ 장면과 수량 모두를 바꾸어 제시하기 등의 방법으로 반복 연습의 기회를 제공할 수 있을 것이다.

[예 4] 한 자루에 50원짜리 연필과 한 자루에 60원짜리 연필을 합하여 30자루를 사고 1620원을 지불했다 50원짜리 연필과 60원짜리 연필을 각각 몇 자루씩을 샀는가?

[예 4-1] (장면을 바꾸어 제시하기)

한 묶음에 50원짜리 색종이와 한 묶음에 60원짜리 색종이를 합하여 30묶음을 사고 1620원을 지불했다. 50원짜리 색종이와 60원짜리 색종이를 각각 몇 묶음씩을 샀는가?

[예 4-2] (수량을 바꾸어 제시하기)

한 묶음에 60원짜리 색종이와 한 묶음에 70원짜리 색종이를 합하여 30개를 1920원에 샀다. 60원짜리 색종이와 70원짜리 색종이를 각각 몇 묶음씩을 샀는가?

[예 4-3] (장면과 수량을 바꾸어 제시하기)

우리 반에서는 한 권에 600원짜리 만화책과 한 권에 700원짜리 동화책을 합하여 30권을 19200원에 사려고 한다. 만화책과 동화책을 각각 몇 권씩 살 수 있는가?

나. 전략의 습득 지도

전략을 습득시키는 지도에서는 전략을 가르쳐 그것이 문제 해결의 하나의 책략임을 알고 그것을 실제의 문제 해결에 사용할 수 있게 하는 것이 핵심이 된다. 따라서 개개의 전략의 특성과 유용성을 인식시키는데 적합한 문제를 제시하여 그 전략 자체와 그 기능을 점차 깨닫게 하는 것이 중요하다. 예를 들면, "그림을 그린다"는 전략의 습득이 지도의 목표라면 그림의 일부를 완성시키는 형태의 문제를 제시하거나 그림 자체를 그리게 하는 문제를 제시하여 그림을 그린다는 것이 어떻게 하는 것이며 그것이 어떤 기능을 하는가를 알게 한다

또, 문제 해결의 전략을 습득시키기 위해서는 [예 5]와 같이 제시된 문제에서 무엇을 어떻게 생각해서 어떻게 하는 것인가를 암시하여 사용할 수 있는 전략을 명시해 두는 것도 전략 습득의 한 가지 방법이 될 수 있다.

[예 5] 규칙성을 찾아서 해결하는 문제

다음 ( )속에 들어갈 적당한 수를 찾아라. 그리고 어떤 방법으로 그 규칙을 찾았는지를 [ ]속에 써 넣어라. 더하거나 뺐으면….㉮, 곱하거나 나누었으면….㉯, 몇 번째를 나타내는 수(대응의 규칙)를 썼으면 ….㉰

1) 2, 4, 6, 8, ( ), ( ) ……………………………………………[ ]
2) 4, 7, 10, 13, ( ), ( ) ……………………………………………[ ]
3) 100, 94, 88, 82, ( ), ( ) ……………………………………………[ ]

이 문제에는 규칙성을 찾기 위한 기본적인 기법 즉 나열된 수의 규칙성은 이웃되는 수 사이의 가감승제 등에 있어서의 규칙성을 찾는 일 및 나열된 수에 있어서의 각 수와 그 항수(몇 번째를 나타내는 차례 수)의 관계를 찾는 것을 명시하고 있다.

또는 다음 [예 6]과 같이 문제 해결을 위해 차례대로 물음을 제시하여 해결 과정에서 전략을 사용하도록 권고하고 반성 단계에서 그 전략의 특성 및 유용성을 발견하게 하든가 아니면 학생 스스로 해결 전략을 구상하여 문제를 해결하게 한 후, 이용한 전략에 대한 반성의 기회 제공은 전략의 유용성을 인식하게 하는 데 도움을 줄 것이다. 아울러 보충 문제를 제시하여 전략의 사용을 익숙하도록 하는 방법도 생각해 볼 수 있다.

[예 6] 그림을 그려서 해결하는 문제

두 마리의 모기가 한 줄로 서서 숲속을 지나가는 10명의 스카우트 대원을 발견했다. 첫 번째 모기가 말하길 "나는 제일 앞서가는 대원을 물겠어. 그리고 2명씩 뛰어 건너면서 물겠어"라고 말했다. 두 번째 모기가 "좋아 그러면 나는 두 번째 대원을 물겠어. 그리고 3명씩 뛰어 건너면서 물겠어"라고 말했다. 몇 분후 모기에 물린 대원들이 "아!"하고 소리를 쳤다. 두 번 소리 친 사람은 몇 명이며, 또 누구누구이며, 모기에게 물리지 않은 대원은 몇 명인가?

☞ 생각하기
- 무엇을 구하려는 문제입니까?

☞ 탐구하기
- 몇 명의 스카우트 대원이 숲속을 지나고 있는가?
- 첫 번째 모기는 어떻게 물려고 하는가?
- 두 번째 모기는 어떻게 물려고 하는가?
- 스카우트 대원을 그림으로 나타내어라.
- 첫 번째 모기가 문 대원을 표시하여라.
- 두 번째 모기가 문 대원을 표시하여라.

☞ 해결하기
- 두 번 "아!"하고 소리친 대원는 몇 명이며 누구입니까?
- 모기에 물리지 않은 대원은 몇 명인가?

☞ 반성하기
- 그림을 그려서 푸는 것이 어떤 도움이 된다고 생각합니까?
- 또다른 방법으로 해결할 수 있는지 생각해 봅시다.

☞ 다시 생각해 보기

· 대원이 15명이라면 어떻게 될까?

☞ [연습 문제]

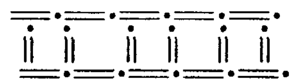
· 종수, 인호, 현숙, 희재, 경태가 극장표를 사기 위해 줄을 섰다. 인호가 제일 마지막에 섰고, 경태 앞에는 1명이 있다. 현숙이는 희재 앞에 섰고, 희재는 인호 바로 앞에 섰다. 줄 선 차례대로 이름을 말하여라.

문제 해결력은 학생 개개인의 경험과 수학적 지식의 양 및 문제 해결을 위한 정신적인 습관에 따라 차이가 있다. 또 개인적인 요인에 따라 다양한 전략을 선택하는 것은 기지의 사실이다. 문제 해결력 신장을 위해서는 한 두 가지의 편중된 전략이 아닌 '좋은 해에 이르는 길이 많다.'는 것을 학생들이 인식할 필요가 있다. 해결과정에서 논리적인 모순이 없다면 개개인의 해결 전략은 동등한 가치를 지니고 있다고 하겠다.

다음 [예 7]의 해결과 같이 학생 개인의 특성에 따라 몇 가지의 방법으로 해를 구하게 한 후, 서로의 해결 방법에 대한 토론의 기회 제공은 매우 유용한 것이라 생각된다.

예컨데, "규칙성을 찾는다"는 전략을 활용한 문제

[예 7] 성냥개비 한 개의 길이는 4cm이다. 이 성냥개비로 정사각형을 만들고 거기에 다시 정사각형을 이어 달아서 가로 20cm, 세로 4cm의 직사각형을 만들면 오른쪽 그림과 같이 16개의 성냥개비가 필요하다. 그림과 같이하여 가로 12cm, 세로 4cm의 직사각형을 만들려면 몇 개의 성냥개비가 있어야 하는가?



이 문제의 해결은 다음과 같이 세 가지 방법을 생각 할 수 있겠다.

① 가로에 놓인 성냥개비의 수 120÷4=30(개)에서 한 변이 4cm인 정사각형 30개를 이은 직사각형에서의 성냥개비의 수이다. 따라서 구하는 개수는 가로(상 하변)에 놓인 수 30×2(개), 세로로 놓인 수 31(개)의 합 60+31=91(개)이다.

② 직사각형의 구성 과정으로부터 필요한 성냥개비의 수의 규칙을 찾아보면 처음 정사각형 하나에 성냥개비 4개, 거기에 정사각형 하나씩을 더 이을 때마다 3개씩이 더 필요하므로 구하는 수는 4+3×29=91(개)이 됨을 알 수 있다.

③ 처음부터 'ㄷ'자모양(성냥개비 3개)를 30개 이어붙이고 마지막에 세로로 한 개를 더해서 'ㄷ'자의 열린 곳을 닫아 주면 된다고 생각하면 구하는 수는 3×30+1=91(개)이다.

이 규칙은 3×(이어 붙이는 정사각형의 수)+1=(직사각형을 만드는데 필요한 성냥개비의 수)로 일반화되어 어떤 경우에도 적용할 수 있어서 간단하고 편리하다는 사실로부터 "규칙성을 찾는다"는 전략의 이점을 깨닫게 할 수 있으며, 규칙성에는 여러 가지가 있음을 알고 보다 간단하고 편리한 것을 찾아보게 하는 것이 중요하다.

3. 전략의 응용 및 심화 발전 지도

가. 전략의 응용 지도

전략의 응용 지도에서는 습득된 여러 가지 전략 중에서 해결하려는 문제 해결에 적절한 전략을 선택해서 응용하게 하고 그 해결 방법을 논의하는 일이 중심이 된다. 전략에는 여러 가지가 있으나 전략마다 그 기능이 달라서 그것으로 해결하기에 적절한 문제가 각각 다르다는 것을 알고 주어진 문제 해결에

적절한 전략을 선택하는 능력이 요구된다. 따라서 여러 가지 전략의 세분과 그에 따른 문제를 동시에 제시하여 그 문제 해결에 적절한 전략을 선택하는 훈련이 필요하다. 물론 어떤 문제 해결의 전략이 한 가지로 한정하는 것은 아니므로 전략의 응용 지도에서는 여러 가지 전략으로 해결되는 문제를 제시하여 다양한 해결 방법을 생각해 보게 하는 것이 바람직하다.

학생들에게 제시되는 자습용의 문제 해법의 보기에도 풀이 방법만이 아닌 그 전략까지 명시 해 주면 해결 과정에서 그 전략의 사용 방법도 알게 될 것이다. 또 전략의 응용 지도에 서는해결 방법의 [보기]로써 다양한 전략을 제시해 주고 그 중에서 몇 가지 전략을 선택하여 해결해 보도록 하는 것이 좋을 것이다.

[예 8] 철수네 집에서 학교까지는 1500m이다. 철수는 매분 80m의 빠르기로 학교에서 집으로, 동생은 매분 70m의 빠르기로 집에서 학교로 향하여 출발하였다. 철수와 동생은 몇 분 뒤에 만나게 되겠는가?

① [해결 전략 1]: 표를 만들어서 해결하기

걸은 시간(분)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
철수가 걸은 거리(m)	0	80	160	240	320	400	480	460	640	720	800
동생이 걸은 거리(m)	0	70	140	210	280	350	420	490	560	630	700
두 사람 사이의 거리(m)	1500	1350	1200	1050	900	750	600	450	300	150	0

표에서 두 사람이 만나는 즉 두 사람 사이의 거리가 0m가 되는 것은 10분 후이다. 따라서 10분 후에 만나게 된다.

② [해결 전략 2]: 규칙성을 찾아서 해결하기

앞의 표에서 1분이 지날 때마다 두 사람 사이의 거리가 150m씩 가까워지는 것을 알 수 있다. 두 사람 사이의 거리 1500m가 몇 분 뒤에 0m가 되는가는 $1500 \div 150 = 10$(분)으로 구할 수 있다.

③ [해결 전략 3]: 식(공식)을 이용하여 해결하기

거리(S)=속력(V)×시간(T)를 이용하면, 두 사람이 걸은 시간(T)은 같고, 거리(S)는 일정하므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다. $(70+80) \times T = 1500$에서 $T=10$(분)을 구할 수있다.

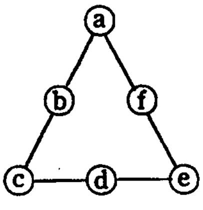
④ [해결 전략 4]: 시행착오를 겪으면서 해결하기

형은 매분 80m씩 걷고, 동생은 매분 70m씩 걸으므로 두 사람이 1분동안에 걷는 거리는 $(80+70)=150$(m)이다. 두 사람이 만나려면 두 사람이 걸은 거리의 합은 1500(m)가 되어야 한다. 두 사람이 8(분)을 걸었다면 $8 \times 150 = 1200$(m)로 조금 부족하다. 9(분)을 걸었다면 $9 \times 150 = 1350$(m)로 역시 조금 부족하다. 10(분)을 걸었다면 $10 \times 150 = 1500$(m)로 주어진 조건에 맞다. 따라서 10분 후에 만나게 된다.

나. 전략의 심화·발전적 지도

전략의 지도에 있어서도 교재 연구의 단계에서 학생들에게 제시하는 문제가 발전적으로 다루어 질 수 있는지, 즉 이 문제의 해법을 보다 일반화시킬 수 있는지, 보다 넓은 범위에 확대 적용할 수 있는지, 또는 보다 새로운 다른 방법은 없는지를 검토해 두는 것이 바람직하다.

[예 9] 오른쪽 그림과 같이 삼각형으로 늘어놓은 ○ 속에 1에서 6까지의 수를 하나씩 넣어서 각 변의 수들의 합이 같게 하여라.



이 문제는 "예상해 보고 확인한다"는 전략을 사용하는 문제이지만, 그 전략을 지도하는 것으로 끝내지 말고 시행착오적으로 구한 몇 가지의 결과를 재분류·정리해 봄으로써 문제의 배후에 있는 구조를 명확하게 할 수 있도록 발전적으로

생각해 보게 할 수도 있다.

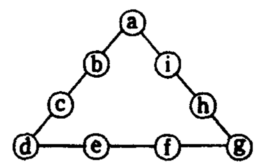
[예 9]에서는 한 변의 수의 합에 착안해서 그 결과를 분류해 보면

- 세 꼭지점에 있는 수들의 합은 언제나 3의 배수이다.
- 각 변의 수의 합들의 총합은 1에서 6까지의 합과 세 꼭지점의 수의 합이다.

한 변의 수의 합을 k, 세 꼭지점의 수를 차례로 a, b, c라 하면 $(1+2+3+4+5+6)+a+b+c=3k$. 따라서 $a+b+c=3(k-7)$임에서 확인할 수 있다.

이 문제를 심화·발전시킨 문제로 다음과 같은 문제를 생각할 수 있을 것이다.

[문제1] 한 변에 수가 4개가 되게 확장하면 오른쪽 그림과 같이 된다. 오른쪽 그림과 같이 삼각형으로 늘어 놓인 ○ 속에 1에서 9까지의 수를 넣어서 각 변의 수들의 합이 같게 하여라.



4. 전략 지도 전개 과정

가. 해결 과정에 중점을 두고 학생과 함께 전략을 만들어 내게 한다.

문제 해결 전략의 습득을 위한 지도에서는 교사가 처음부터 전략을 학생들에게 제시해 버리면 그 전략의 사용 방법은 물론 그 좋은 점도 충분히 알게 할 수 없다. 따라서 문제를 제시한 다음 먼저 학생들에게 각자가 문제를 나름대로 풀어 보게 한다. 다음으로 각자가 해결한 것을 바탕으로 집단 토의를 통해 그 해결의 과정을 비교·분석하는 과정에서 해결의 열쇠가 되는 아이디어나 생각을 정리해서 될 수 있는 대로 학생들과 함께 전략을 만들어 내는 것이 바람직하다. 그리고 전략의 지도는 그 과정에 초점을 맞추어야 한다.

그리고 전략이 만들어지면 그 때마다 학생들의 말로 적당한 이름을 붙여 주어서 판서하거나 학습한 전략의 이름을 써 붙여 두는 것도 좋을 것이다. 하나 하나의 전략에 이름을 붙여 주는 것은 그 전략을 의식화되게 하자는 의도이다. 이는 문제 해결 과정에서 쓰인 아이디어나 생각을 그 장면만의 것이 아닌 모든 문제 해결에서 유용한 방법으로 의식하도록 하기 위해서 중요하다.

나. 해결 방법에 대한 예상을 가지고 해결하게 한다.

문제에 따라 적절한 전략을 선택하게 하기 위해서는 문제의 특징을 파악해서 어떤 전략을 쓰면 해결의 실마리를 잡을 수 있겠는가를 검토하는 장면, 즉 "계획을 세운다" 단계를 학습 지도 과정에 마련하는 것이 필요하다. 이 때 어떤 전략을 쓰겠는가를 발표시킬 뿐만 아니라 그 전략이 왜 적절하다고 생각하는지, 문제의 어디에 착안한 것인지 등 학생에게 전략 선택의 근거를 분명하게 하는 것도 바람직하다.

학생 각자가 자발적으로 그 단계를 밟을 수 있을 때까지 개별 해결에 들어가기 전에 적용해 볼 만한 몇 가지의 전략을 발표하게 함으로써 학생들은 상호 의사소통의 기회를 통하여 자신의 아이디어를 검증해 볼 수 있는 기회를 가질 수 있을 뿐만 아니라 다른 학생이 제시하는 전략을 통해 서로의 아이디어를 공유할 수 있어서 자기가 깨닫지 못한 새로운 방법을 알 수 있을 것이다.

또 개별 해결의 경우 어떤 하나의 전략으로 해결한 어린이에게 발표되거나 제시되었던 또다른 전략을 써서 다시 해결해 보도록 권고할 수도 있다. 문제를 또다른 방법에 의한 풀이의 경험을 갖도록 함으로써 학생들은 자주적으로 여러 가지의 해결 방법을 생각해 보게 될 것이다. 이것은 각각의 전략을 평가하거나 그들 사이의 관계를 논의해서 보다 나은 해결 방법을 추구하는 활동을 용이하게 할 것이다.

다. 해답을 구한 다음의 학습이 중요함을 알게 한다.

전략 지도는 모든 어린이들에게 문제 해결의 도움이 되는 어떤 수단을 익히게 하여 자력으로 문제를 해결할 수 있게 하는 것을 목표로 삼고 있다. 그러나 그것만이 전략 지도의 목표는 아니다. 문제 해결의 과정을 중시하는 입장에서 해답을 구할 수 있게 되면 그 구하는 방법을 반성하거나 보다 나은 처리 방법을 추구하는 학습을 중시하게 해야 한다.

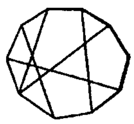
(1) 몇 개의 해결 방법을 비교해서 그 전략을 평가해 본다.

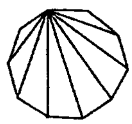
집단 토의의 장면에서는 여러 가지 해법을 발표시킨 다음 보다 나은 해법을 추구할 수 있게 하기 위하여 각각의 해법의 좋은 점이나 서툰 점을 밝혀서 전략을 평가해 보게 한다.

[예 8] 사각형에서는 대각선을 2개, 오각형에서는 대각선을 5개 그을 수 있다. 그렇다면 십각형에서는 몇 개의 대각선을 그을 수 있겠는가?

[예 8]의 문제에서 <방법> ㈎, ㈏는 "그림을 그려서 해결하기" 전략, <방법> ㈐는 "표를 만들어 해결하기" 전략, <방법> ㈑는 "규칙성을 이용하여 해결하기" 전략이다. 이와 같이 몇 가지의 전략이 발표되었다고 가정해 보자.

[풀이]

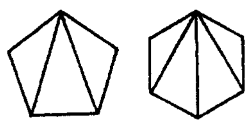
(가)  * 되는대로 대각선을 그려 그 수를 센다.

(나)  * 차례로 대각선을 그려 가면서 그 수를 센다

(다) 삼, 사, 오, 육각형인 각 경우의 대각선의 수를 조사해서 표를 만든다. 그 표를 이용하여 대각선의 수가 증가하는 규칙을 찾아본다.

변의 수	3	4	5	6	7	8	9	10
대각선의 수	0	2	5	9				
규 칙	+2	+3	+4	+5				

(라) 오각형, 육각형의 경우를 조사해서 규칙을 찾는다. 한 꼭지점에서 대각선을 각각 5−3개, 6−3개씩 그을 수 있다는 것을 토대로 해서 칠각형에서는 (7−3)×7÷2=14개의 대각선이 있음을 확인하고 그 규칙을 십각형에 적용한다.


2=5−3 3=6−3

즉 (10−3)×10÷2(=35)으로 구한다.

"그림을 그린다"는 전략에서 잘못 세는 일이 없도록 하기 위해서는 되는 대로 대각선을 그어서 세는 ㈎ 전략보다는 각 꼭지점에서 차례로 대각선을 그어서 세는 ㈏ 전략이 좋다는 것을 깨닫게 한다. 또 변의 수가 많아져서 "그림을 그린다"는 전략에 의한 해결이 곤란하게 될 때는 간단한 경우부터 조사해서 "표를 만든다"는 ㈐ 전략에 의해서 규칙성을 이용하여 해결하게 될 것이다.

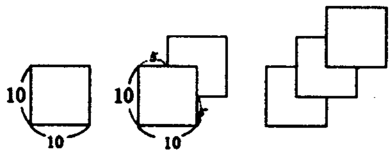
[예 8]의 문제에서는 삼각형, 사각형, 오각형으로 변의 수가 1개씩 늘어날 때마다 대각선의 수는 2, 3, 4, …으로 증가하는 규칙성을 발견할 수 있다. 또한 오각형과 같이 간단한 경우의 그림을 관찰해서 각 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 수에 착안해서 그 규칙성을 찾을 수 있으면 ㈑전략은 일반화할 수

있는 점에서 다른 해결 전략에 비해서 우수하다는 것도 깨닫도록 한다.

(2) 해결 방법 서로 사이의 관계를 고찰시켜 어린이들의 문제를 보는 관점이나 사고의 폭을 넓히고 또한 심화시킨다.

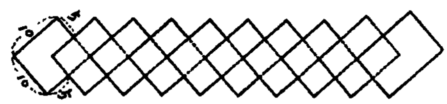
하나하나의 해법을 별개로 검토하지만 말고 각각의 해결 방법 사이의 관계를 전략이나 그 착안점의 차이라는 면에서 고찰시킴으로서 어린이들이 문제를 보는 관점이나 사고의 폭을 넓히고 또 깊게 할 수 있다. 이를테면 같은 전략에 의한 해법이라도 그 착안점에 따라서 서로 다른 해결 방법이 될 수 있다는 것을 알게 하거나 서로 다른 전략이라도 관점을 바꾸면 같은 것으로 볼 수 있다는 것 등을 지도하는 것이다. 다음 [예 11]와 같은 문제 해결에서 ㈎~㈓의 해결 방법이 발표되었다고 하자.

[예 11] 한 변이 10cm인 정사각형의 색종이를 오른쪽 그림과 같이 겹쳐지게 이어 붙였다. 색종이 10장을 이어 붙쳤을 때 그 둘레는 몇 cm가 되겠는가?



(풀이)

(가) $10 \times 4 + 5 \times 38 = 220$



(나)

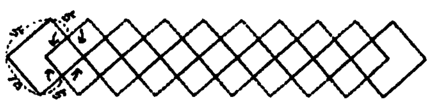
색종이의 수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
둘레의 길이	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220

(다) (나)의 표에서 규칙을 찾아서 식으로 정리한다.

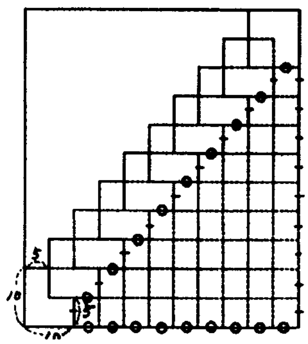
$10-1=9$, $20 \times 9 = 180$. $40+180=220$(cm)

(라) (가)의 그림에서 한 변이 10cm인 정사각형 10장의 둘레에서 겹쳐서 중복된 부분인 한 변이 5cm인 정사각형 9장의 둘레를 뺀다. $40 \times 10 - 20 \times 9 = 220$(cm)

(마) 그림을 변형하여 $(10+5 \times 9) \times 4 = 220$(cm)



(바) $10 \times 4 + (5 \times 4) \times 9 = 220$(cm)



(사)

색종이의 수	1	2	3	…	10
10cm인 변의 수	4	4	4	…	4
5cm인 변의 수	0	4	8	…	

색종이 10장일 때의 5cm인 변의 수는 $4 \times (10-1) = 36$ $\therefore$ $10 \times 4 + 5 \times 36 = 220$(cm)

이 때 방법 ㈎~㈒의 각각의 풀이 방법만을 논의하지 말고 각 풀이 방법 사이의 관계까지 고찰시켜서 각 전략의 특성 및 그에 따른 편리성과 적절성에 대하여 논의하도록 한다.

방법 (가)와 방법 (사)는 식만을 보면 똑같지만 방법 (가)는 붙여진 10장의 색종이 그림에서 10cm인 변과 5cm 변의 수를 세어 구한 것이고, 방법 (사)는 1장, 2장, 3장으로 간단한 경우로부터 10cm와 5cm인 변의 수의 변화에 착안해서 그 규칙성을 찾아 해결하는 것으로서 붙여진 색종이의 수가 많을 때는 방법(가)보다 훨씬 더 능률적이라는 것을 느끼게 하는 것이 바람직하다.

방법 (나)는 "표를 만든다"는 전략에 의해서 해결한 것이고, 방법 (다)는 표에서의 둘레의 길이 변화에 착안해서 색종이의 장수와 둘레의 길이 사이의 규칙성을 찾아서 식으로 나타낸 후 해결한 것이다.

방법 (다)의 식: 40+20×(10-1) 으로 정리해 보면, 일반화가 쉬워지므로 방법 (나)보다 우수하다고 하겠다. 또 표를 만들고, 규칙성을 찾아서 규칙으로부터 식을 유도하고 있다는 점에서는 방법 (다)와 방법 (사)가 닮았으나 해결에 있어서의 착안점이 다르다는 것을 밝혀 둘 필요가 있다. 이렇게 해 두면 어린이들에게 여러 가지 규칙성을 깨닫게 할 수 있을 것이다.

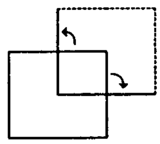
방법 (라)는 한 변이 10cm인 색종이 10장의 둘레의 길이에서 중복된 부분(한 변이 5cm인 정사각형 9개의 둘레)을 제거해서 구한 것이다.

방법 (마)는 중복된 부분으로 5cm인 변을 이동시키서 한 변이 5cm인 정사각형 9개를 만들어 중복된 부분을 없애서 한 변 10cm인 정사각형 1개와 한 변이 5cm인 정사각형 9개를 만들어 그 둘레를 구했다.

방법 (바)는 방법 (가)의 그림을 변형시켜서 중복된 부분을 없앨 궁리를 한 것이다. 그 구체적인 조작을 10×4+5×4×9 인 식에서 읽어 낼 수 있다면, 이 식을 (10+5×9)×4로 변형한 경우 이것이 그림에서 무엇을 의미하는가를 생각해 보게 할 수 있다. 그 결과 방법 (바)와 같이 한 변의 길이가 55cm인 정사각형 1개를 만들 수 있다는 것을 발견할 수 있을 것이다.

식의 구체적인 의미를 그림에서 읽어낼 수 있다면 방법 (다)도 단지 표에서 규칙성을 찾아 그 규칙의 식을 유도하는 것만 아니라 그 식이 그림에서 무엇을 의미하는가도 생각해 보게 해서, "그림을 그린다"는 것과 "표를 만든다"는 것의 상호관계를 고찰시키는 것이 좋다.

방법 (다)의 식에서 40은 처음 1장의 둘레의 길이이고 20×(10−1)은 증가한 길이로서 1장이 증가할 때마다 20cm씩 둘레가 늘어나는 것을 의미하는 것인데, 이 20cm는 오른쪽 그림에서 점선 부분으로 새로이 더해지는 색종이의 2변의 길이에 해당한다는 것을 쉽게 알 수 있을 것이다.



라. 해결 과정을 평가하게 한다.

문제 해결 전략의 사용 방법이나 그 좋은 점을 이해시키기 위해서는 자기의 해결 과정을 뒤돌아보게 하거나 다른 사람의 해결 방법과 비교시키거나 학습 시간에 공부한 것을 정리해 보게 하는 등 해결 방법에 대한 자기 평가를 해 보게 하는 기회를 마련하는 것이 효과적이다. 예컨데 문제 해결의 발표 등에서 자기의 풀이와 친구의 풀이 방법을 비교해 보거나 또는 토의를 통해서 자기 풀이의 좋은 점, 보완, 수정해야 할 곳을 찾는다든지 새로이 깨닫게 된 것을 말하거나 기록해 둔다거나 혹은 자타의 풀이를 수정 보완해서 다시 풀이를 정리해 본다.

VI. 결 론

1. 문제 해결의 성공률이 높은 문제들은 대부분 학교에서 평상시 학습된 경험과 관계가 높은 유형. 즉

학교 수학을 통하여 그와 비슷한 문제를 풀어 본 경험이 있는 문항은 성공률이 높은 것으로 나타났다. 따라서 학교 수학에서는 가급적 다양한 전략을 사용하여 해결하는 문제를 통해 다양한 전략을 사용하는 경험과 사고의 기회가 확대되어야 하겠다.

2. 전략 지도를 위해서 특정 학년에 특정한 전략을 국한시킬 필요는 없으나, 학년성을 고려하여 사용하기 쉬운 전략부터, 그리고 전략 습득에 소요되는 시간이 짧은 전략부터 지도하는 것이 바람직하다고 보겠다. 또 교과서나 교사에 의해 일방적으로 처음부터 전략을 제시하지 말고 어린이들이 주어진 문제를 해결하기 위한 토의 과정에서 해결의 열쇠가 될 수 있는 생각을 정리하여 전략을 삼도록 할 필요가 있다. 특히 의사소통의 기회를 확대하여 서로의 아이디어를 공유할 수 있도록 개별적인 문제뿐만 아니라 소집단 프로젝트(group project), 장기간에 걸쳐서 해결하는 문제 등의 제시도 고려해야 할 것이다.

3. 문제 해결 전략 지도를 강화하기 위해서는 교과서에 제시된 문제뿐만 아니라 교사가 스스로 문제를 만들고 그에 대한 다양한 전략을 적용하여 해결해 보는 경험을 거친 후 학생들에게 학습 자료로 제공할 필요가 있다. 지도 교사에 의해 창안된 문제 제공으로 학생들이 문제 해결에서 겪는 어려움이나 해결 과정에서 발생하는 오류의 경향을 쉽게 파악할 수 있을 것이며, 지면의 제한으로 인하여 다양한 문제를 수록하기가 어려운 교과서의 한계를 극복할 수 있을 것이다.

4. 학생들에게 '문제 만들기' 경험을 제공할 필요가 있다. Polya(재인용, 1994)의 말과 같이 "수학을 학습하는 학생은 응분의 자기 몫의 일을 스스로 하지 않으면 안된다."고 볼 때, 학생이 주체적으로 학습하도록 하기 위해서는 습득의 필요성이나 문제가 인식되게 해야 하고, 수학의 기초적인 지식이나 기능의 확실한 획득을 위해서는 다만 기억하는 정도가 아니고 그 의미나 적용 장면에 대한 이해와 그 이점이 감득되어 필요한 장면에 적용할 수 있어야 할 것이다. 이러한 학습 경험을 통해서 수학적 사고력 및 태도가 육성될 것이며, 학교 교육의 궁극적인 목적인 자주성과 창조적 사고력이 길러질 것이다.

5. 문제 해결은 일종의 인지 전략이므로 한 두 시간이나 몇 주의간의 학습으로 그 효과를 크게 기대하기란 어렵다. 따라서 문제 해결을 위한 사고 전략을 학습시키기 위해서는 오랜 시간동안 문제 해결을 위한 사고 훈련이 필요하다(한국교육개발원 1985, pp, 23-79)고 볼 때, 문제 해결 전략에 대한 학습을 별도의 단원으로 설정하여 집중 지도하도록 하는 것으로부터 탈피하여 매 단원의 학습 내용에 각 전략의 학습을 흡수시키는 방안과 매 단원 끝 부분에 각 전략에 따른 문제를 집중하여 제시할 필요가 있다.

참 고 문 헌

교육부 (1994). *초등학교 교육과정 해설서(I).* 교육부.

교육부 (1997). *초등학교 산수과 교과서 및 지도서, 수학익힘책 1~6학년.* 교육부.

구광조, 강완 (공역) (1996). *모두가 중요하다. 한국수학교육학회 연구 자료 96-I·II.* 한국수학교육학회.

구광조, 오병승, 류희찬(공역) (1994). *수학과 교육과정과 평가의 새로운 방향.* 서울:경문사.

전평국, 양인환, 류희찬 (1994). *국민학교 수학과 교수법 및 평가.* 한국교원대학교.

전평국 외 (1995). "아동의 문제 해결에 관한 연구", *전국 수학교육연구 발표회 프로시딩.* 한국수학교육학회.

한국교육개발원 (1985). *수학과 문제 해결력 신장을 위한 수업 방법,* 서울: 한국교육개발원.

石田淳一 外 (1986). *楽しく學べる算數の問題解決ストラテジ-.* 東京: 東洋館出版社.

Krulik. S., & Rudnick. J. A. (1989). *Problem solving.* Allyn and Bacon.

Lenchner. G. (1983). *Creative problem solving in school mathematics.* Boston: Houghton Mifflin.

Mayer, R. E. (1983). *Thinking, problem solving cognition.* New York: Freeman.

NCTM (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s.*

Fluck, S. E. (1993). *The effects of playing and analyzing computational-strategy games on the problem solving and computational ability of selected fifth grade students.* University Microfilms International. 300N. Zeeb Road, Ann Arbor, M148106.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1984). *A sourcebook for teaching problem solving.* Allyn and Bacon.

<Abstract>

Teaching Strategies for Developing Problem Solving Abilities

Nam, Seung In[2)]

The purposes of this paper are to show problem-solving strategies and their typical problems to suggest specific ways to teach strategies to promote problem-solving abilities. (1) Problem-solving strategies can be divided into general strategies and specific strategies. General strategies refer to procedural teaching-learning activities based on Polya's 4 step problem-solving. Specific strategies refer to Lenchner's 12 problem solving strategies and their characteristics which are helpful to the substantial solution of specific problems. (2) Concerning to problem-solving strategies teaching, the followings are suggested. First, the sequence of strategy teaching should be from easy to difficult ones, from short to long ones. Second problems for strategy training should be simple and good enough to serve as examples of the strategies. Repetition with similar problems are needed. Third, analysis and comparison of various strategies, and extension and adaptation of the strategies to complicate problems are needed. Fourth, procedures of strategies teaching are the follows: Have students make their own strategies focused on the solution process; Have students solve the problems with expectation of the solving methods; Have students compare and reflect on their solving methods; And assess problem-solving processes.

2) Taegu National University of Education (1797-6 Daemyung-2-dong, Nan-gu, Taegu 705-715, Korea.; Tel.: 053-620-1674; FAX: 053-651-5359)