한국초등수학교육학회지 1, 17-32. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 1, 17-32.

수학 교육에서 열린 교수 학습의 실천적 방법 연구

임 문 규[1)]

오늘날 우리 나라에서는 열린 교육이 이론과 실제의 양면에서 연구되고 실천되어 오고 있다. 본고에서는 초등학교 수학 교육에서 실용적으로 사용될 수 있는 열린 교육의 학습 지도 방법 세 가지를 소개하였는데, 이들은 '오픈 엔드 어프로치,' '문제에서 문제로,' 그리고 '문제 설정'이다. 이들 세 가지 학습 지도 방법 각각에 대하여 그 의미를 분석하고, 구체적인 지도 계획을 제시한 다음, 학생들의 실제 활동의 예를 보였다.

I. 序　言

「열린 교육」이란 용어가 최근 우리 교육계에 널리 사용되고 그에 대한 논의가 활발하게 진행되고 있다. 열린 교육을 「능력별 지도」로 받아들여 교실 내에서 그룹 학습이나, 우열반을 편성하여 지도하는 경우도 있으며, 구석 학습 또는 아예 교실의 벽을 헐어 자기가 좋아하는 과목 또는 내용을 학습하도록 하는 「열린 교실」로 받아들여지기도 한다.

필자는 전자는 학생들 간의 위화감이 조성될 수 있고 후자는 교수·학습의 혼란이 우려되므로, 특히 체계화된 학습 과정이 요구되는 수학의 교수·학습에서 현실적으로 실천이 어렵다고 생각된다.

이러한 관점에서 학교의 수학 교육에서 실천 가능한 열린 교수·학습에 대하여 생각하여 보면, 첫째는 1970년대에 일본에서 수학과의 수업 개선에 대한 실천적 연구인「오픈 엔드 어프로치」를 들 수 있을 것으로 생각한다. 둘째는 이 오픈 엔드 어프로치에서 상황 설정의 복잡함을 보완하고 문제 해결 교수·학습의 계속성과 발전성을 도모하여, 문제 해결과 문제 설정 양자에 대한 능력의 육성을 목적으로 하는, 「문제에서 문제로」라는 연구이다. 셋째는 수학 교육에서 논의되고 있는「문제 설정(problem posing)」의 교수·학습을 들 수 있을 것으로 생각한다.

여기에서는 위의 세 가지,「오픈 엔드 어프로치」에 의한 교수·학습과 「문제에서 문제로」및 「문제 설정」의 교수·학습에 대한 몇 가지 수업의 실제와 어린이들의 반응 예를 중심으로 논의하기로 한다.

II. 오픈 엔드 어프로치에 의한 교수 학습에 대하여

1. 오픈 엔드 어프로치에 관하여

보통의 수학 수업에서 취급되는 문제에 대한 해답은 정답이 하나밖에 없다는 공통점이 있다. 이와

1) 공주 교육 대학교 ([314-060] 충남 공주시 봉황동 376)

같은 문제를 완결된 문제, 닫혀진 문제로 부르고, 이에 대하여 정답이 몇 개라도 가능하도록 조건을 준 문제를 완결되지 않은 문제, 결과가 열린 문제, 오픈 엔드의 문제라 부르기로 한다.

오픈 엔드 문제의 예는 얼마든지 많다. 이제까지의 수업에서도 문제의 해답을 곧바로 찾아내는 과제로 하지 않고 해답을 얻기 위한 방법을 수업의 과제로 할 경우에는 어떤 의미에서 많은 경우에 열린 문제를 다룬다고 말 할 수 있다. 왜냐하면 과제가 구하고 있는 해답은 문제의 답이 아니라 그 답에 이르는 방법이며, 올바른 방법은 하나로 제한되지 않기 때문이다. 다만 이 경우에 교사가 생각하고 있는 어떤 하나의 방법만을 정답으로 간주하는 수업이라면 오픈성은 잃어버리겠지만.

오픈 엔드 어프로치라 부르는 지도 방법은 미완결된 문제를 과제로 하고, 그기에 어떤 정답의 다양성을 적극적으로 이용하며 수업을 전개하고, 이러한 과정에서 이미 배운 지식·기능·사고 방법을 여러 가지로 조합하여 새로운 것을 발견해 가는 경험을 주려고 하는 것을 의미한다.

일본에서 실시한 연구의 동기와 경과를 보면, 최초에 연구 대상으로 한 것은 수학과의 고차적인 목표에 대한 학생들의 도달도를 어떻게 평가하면 좋을까 하는 것이었다. 수학과에서는 수학에 관한 여러 가지 지식·기능, 또는 개념·원리·법칙 등을 계속하여 가르쳐 간다. 그것은 그것들 하나하나가 중요하기 때문이 아니라, 그것들이 학생들에게 잘 소화되고 학생들 안에서 지적으로 조직되어, 인간으로서의 능력과 태도의 한 측면이 될 것을 기대하기 때문이다. 개개의 지식과 기능은 인격의 중요한 성분이 되지만, 본래의 목표는 그것들이 하나의 인격에 통합되는 것에 있다.

그러므로 수학과의 교육이 원래의 목적에 어느 정도 도달해 있는가를 알기 위해서는 구체적인 상황에 대하여 학생이 이미 배운 지식과 기능을 어떻게 활용하며, 또한 배운 것만으로 되지 않을 경우에 그러한 곤난에 대하여 어떻게 대처하는가를 관찰하지 않으면 안된다.

실제로 행해지고 있는 평가 자료인 시험지 테스트에서는 완결된 형태의 문제를 사용하는 것이 보통이다. 이들 문제에서는 답을 구하기 위한 수학적인 조건을 완비하고 있으며, 해답을 위하여 이미 배운 지식과 기능을 주어진 조건을 열쇠로 검색하고, 적절한 것을 선택하여 적용하는 것으로 끝나므로, 기껏해야 지식과 기능의 유무 또는 개념, 원리, 법칙 등의 적용을 조사하는 정도이다.

이러한 이유로, 수학과의 고차적 목표란,'문제 상황에 직면하여 그 상황을 적절히 수학화하고 처리할 수 있는 것'이라는 말로 정리할 수 있을 것이다. 바꾸어 말하면, 문제 상황의 분석에서 이미 배운 수학의 지식과 기능 등을 활용하여 그 중에서 자신이 가장 잘하고 좋아하는 방법을 사용하여 수학적으로 처리한다고 하는 것이다.

이 연구는 1971년에 시작되었고, 6년여의 실천 연구를 거듭하여, 적절한 오픈 엔드 어프로치에 의한 교수·학습으로 수학의 고차적 목표에 접근될 수 있다는 것과 이를 수업에 도입하여 수학 교수·학습의 개선을 제안하고 있다.

2. 수업의 실제

가. 과제와 그의 설명

<마라톤의 등위 결정>

A, B, C 3반에서 마라톤 대회를 하였다. 각 반의 사람 수는 10명씩이다. 결과는 아래와 같이 되었다. 그런데 어느 반이 1위라고 말 할 수 있을까요? 여러 가지 결정 방법을 생각해 봅시다.

표 2. 2. 1

순위	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
반	A	B	A	C	B	B	C	A	C	C	C	B	A	A	B
순위	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
반	B	C	A	C	B	C	B	B	A	C	A	A	A	C	B

학급 대항의 경기에서 자주 문제가 되는 것이 등위 결정의 방법이다. 구기 대회와 같이 성패가 바로 판명되는 것은 문제가 안되지만, 마라톤이나 줄넘기와 같은 개인 경기로는 단체의 등위는 결정하기 힘들다. 어떤 사람은 상위 입상자의 수로 비교하고 다른 사람은 전체 순위의 평균으로 비교하는 등 여러 가지 구하는 방법이 있기 때문이다. 이 과제는 이 점에 착안하고, 어린이들이 흥미와 관심을 보이면서 등위 결정에 대하여 다양한 견해를 가질 수 있도록 하는 것이 목적이다.

오픈 엔드의 문제로서는, 수치화의 문제에 속한다. 즉 A, B, C 3반의 성적을 여러 가지 방법으로 수치화하고 등위를 결정한다. 그 수치화의 방법에 의하여 A는 1등으로도 2등으로도 된다고 하는 답이 몇 개라도 존재하기 때문이다.

내용의 본질로부터 보면, 이것은 집단의 경향을 수치화 해서 다루는 것이 중심이고, 5학년의 통계 학습의 하나로 다룰 수 있다고 생각된다. 과제에서 각 학급의 사람 수를 동일하게 한 것은 복잡한 조건으로 등위 결정에 대한 저항감을 줄이고, 사고 방법이 다양하게 나오지 않는 것을 염려했기 때문이다.

나. 예상되는 반응

등위를 결정하는 여러 가지 방법이 생각되지만, 그룹 일부의 사람을 대상으로 할 것인가 그룹 전체를 대상으로 할 것인가에 따라 대별하고, 예를 들어보자.

1) 일부 사람의 성적으로 등위 결정을 할 경우

(1) 베스트10까지 들어 간 사람이 많은 수.

A반 3명 → 2위

B반 3명 → 2위

C반 4명 → 1위

(2) 1위를 1점, 2위를 2점으로 베스트10까지 사람의 점수 합계가 적은 수.

A반 1+3+8=12 → 1위

B반 2+5+6=13 → 2위

C반 4+7+9+10=30 → 3위

(3) (2)를 사람 수로 나누고 한 사람당 평균점을 구한다. 등위는 (2)와 같다.

(4) 각 반의 1 등의 성적이 좋은 순으로 한다.

A반 1위 → 1위 B반 2위 → 2위 C반 4위 → 3위

(5) 각 반의 마지막 성적이 좋은 순으로 한다.

A반 28위 → 1위 B반 30위 → 3위 C반 29위 → 2위

(6) 각 반마다 상위 5 사람을 선출하고, 그 사람의 합한 점수 또는 평균점으로 결정한다.

A반 1+3+8+13+14=39 → 1위

B반 2+5+6+12+15=40 → 2위

C반 4+7+9+10+11=41 → 3위

2) 그룹 전원의 순위를 대상으로 할 경우.

(7) 1위에서 차례차례 1점, 2점, … 이라는 득점을 주고, 각 반마다 합계를 구하여, 득점이 적은 순으로 등위를 정한다.

A반 1+3+8+13+14+ … +28=162 → 3위

B반 2+5+6+12+15+ … +30=151 → 1위

C반 4+7+9+10+11+ … +29=152 → 2위

(8) 각 개인의 등위와 그 반의 등위의 평균과의 차를 산출하고 그 합계가 많고 적음으로 등위를 결정한다.

A반 (평균16) 15+13+ … +11+12=84 → 3위

B반 (평균15) 13+10+ … +8+15=71 → 2위

C반 (평균15) 11+8+ … +10+14=70 → 1위

위에 제시된 반응에는 한 마디로 어느 것이 좋고 나쁘다고는 결정하기 힘들다. 집단 경기이므로 참가자 전원의 성적이 반영되도록 하는 것이 좋다고 생각되지만, 일부분의 사람으로 전체를 대표해도 좋다고도 생각할 수 있기 때문이다. 이것은 바로 통계의 대표치이기도 하고 대표값으로서 가중 평균을 취할 것인지, 중앙값을 취할 것인지 등 그 경우나 목적에 따라 취하는 방법이 다를 것이다. 어느 것으로 하더라도 일장일단이 있지만, 지도를 할 때에는 단지 예를 드는 것만으로 끝나지 말고, 어린이 각자에게 장·단점을 알게 하는 것이 중요하다. 또 여기에 든 예가 모든 수업에서 그대로 나타나지는 않을 것이다. 어린이의 실태, 실시 학년, 시기에 따라 다르겠지만, 수업을 할 경우, 특히 오픈 엔드적인 상황의 문제에서는 가능한 한 사전에 반응을 예상해 둘 필요가 있다.

3. 수업의 실제

가. 수업의 의미와 지도에서 강조점

이 과제는 내용이 통계 영역에 속하므로, 5학년에서 자료에 대한 견해를 다루는 방법, 평균 등의 학습이 끝난 후 발전 교재로 사용할 수 있다. 그러나 5학년은 아직 학습 내용과 경험도 적기 때문에, 과제에 대한 관심이나 이해를 어떻게 깊게 하며 반응 예를 어떻게 처리해 갈 것인가 등이 문제이다.

실제의 수업은 5학년 2학기말에 실시한 것으로, 위에서 말한 문제점을 참고하여, 다음과 같은 점을 강조하여 지도에 임하면 좋을 것이다.

(1) 다양한 수치화의 방법을 생각해 낼 수 있도록, 그룹 내에 또는 그룹끼리 토의하는 활동을 많이 하도록 한다. 여기에서는 제재(題材)가 어린이들이 접하기 쉽고 흥미가 있는 것이므로 그룹마다 등위를 정하도록 하는 상황을 선정하고 서로 여러 가지 방법을 생각해 내도록 하는 것이 좋다.

(2) 각 수치화 방법의 특징을 명백히 하기 위하여 장점, 단점에 대하여 서로 토론하게 한다. 예를 들면, 상위 입상자로 결정한 것은 전체의 경향은 파악하지 못하므로, 평균으로 정한 것은 전체의 흩어진 정도가 불확실하다는 것 등이다.

(3) 다양한 사고 방법을 유형화할 수 있도록, 각각의 공통성에 착안하게 한다. 예를 들면 전원을 대상으로 할 것인가 일부를 대상으로 할 것인가 등이다.

(4) 어린이의 생각을 넓게 하고 싶을 때에는 교사는 좁히고, 반대로 좁히고 싶을 때에는 넓게 하도록

하는 자세로 지도한다. '이 방법밖에 없구나', '이것들은 모두 다른 생각 같네' 등의 발문이 유효하다.

나. 지도의 흐름

주 된 발 문	학 습 활 동
○ 학급 대항 시합에서는 어떤 것이 있으며, 어떻게 승부를 결정합니까?	○ 야구, 수영 등에 대하여 승부가 금방 판정되는 것과 그렇지 않은 것에 대하여 발표한다. (수영 등 개인 경기는 등위를 정하기 힘들다.)
○ 마라톤 대회를 하였다. 학급을 10명씩 나누어 달리게 하면 결과는 아래와 같다. 어느 반이 1등이 될까? 예상해 봅시다.	○ 문제를 읽고, 1등이 되는 반을 예상한다. · A반이 1등과 3등이 있으므로 1등이다. · B반일지도 모른다. · 잘 모르겠는데, 평균을 구해 보자.

순위	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
반	A	B	A	C	B	B	C	A	C	C	C	B	A	A	B
순위	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
반	B	C	A	C	B	C	B	B	A	C	A	A	A	C	B

○ 반의 등위는 어떻게 하면 좋을까요?	○ 표를 본 것만으로는 잘 모르니까 수로 나타내어서 등위를 정해 볼까? 하고 각자가 생각한다. · 등위의 합계가 좋다. · 합계의 평균을 낸다.
○ 이 학급을 3그룹으로 나눈다. 자기 반이 1등이 되도록 하는 방법을 생각해 봅시다. · 등위를 정하는 각 방법에 대한 좋은 점, 나쁜 점을 명확히 해 두자.	○ 3그룹으로 나누어, 자기의 생각을 발표하든지, 다시 의논해서 등위 정하는 방법을 생각해 낸다. (그룹마다 생각한 것을 용지에 정리한다.) · 베스트10에 들어온 수라면 C반이 1위다. 하위(9, 10위)에 모여 있어도 1위가 되는구나. · 종합적인 것으로도 생각할 수 있네. ○ 자기 그룹이 1위가 되는 방법부터 각자 발표한다.
○ 그룹마다 결과를 발표해 주세요. · 2, 3위로 된 방법도 함께 발표하자.	· 순위의 합계 · 베스트 10의 수 · 중간 사람의 순위 …
○ 각 방법의 특징(장, 단점)은 뭘까?	○ 평균점으로는 B반이 1위지만, 전체를 종합하여 말하자면 C반이라고 하는 것과 같은 특징을 생각한다.
○ 여러 가지 나왔지만 정리하면 어떻게 됩니까?	○ 전원을 생각해서 등위를 정할 경우와 일부분만을 생각하는 경우와 나누어 생각해 보자. 전체 ┌ 등위의 합계 　　　└ 등위의 평균 부분 ┌ 1위의 순위 　　　└ 베스트 10의 사람 수
○ 평상시의 공부와 어떤 점이 다릅니까?	· 해답(등위의 결정 방법)이 몇 개라도 있다.

다. 주된 반응의 정리

각각의 수치와 등위 결정의 방법에 반응한 사람 수를 나타내면 다음과 같이 된다. (그룹 토의에서 발견한 경우도 포함. ( )는 사람 수, 총수 40)

(1) 상위 10위(5위,3위)까지 들어 온 사람 수가 많은 수 (22)
(2) 상위 10위까지를 가중치한 득점(1위 10점, 2위 9점……)의 합계가 많은 수 (1)
(3) (2)의 평균점이 높은 수 (0)
(4) 각반의 1위끼리 비교해서 빠른 순 (3)
(5) 최하위끼리 비교해서 빠른 순 (2)
(6) 각반의 상위 5사람의 평균 등위가 높은 순 (3)
(7) 각반의 중간(5위) 등위 비교하고 등위가 높은 순 (0)
(8) 각반의 계급별 도수의 최빈도를 비교하여 등위가 높은 순 (1)
(9) 각반의 1등과 최하위의 차를 구해서 범위가 작은 수 (14)
(10) 1위에서 차례로 1점, 2점으로 득점을 주어, 합계가 적은 수 (32)
· 1위에서 차례로 60점, 59점으로 득점을 주고 합계가 많은 수 (11)
· 위의 득점을 사람 수로 나누어 평균을 낸다. (10)
(11) 그 반의 등위의 평균과 각 사람의 등위와의 차를 내서 차의 합계가 적은 순 (4)

(1)~(11) 이외에도 예상하지 못한 예로서 다음과 같은 것이 있었다.

(12) 1~10위에 3점, 11~20위에 2점, 21~30위에 1점으로 하여 합계가 적은 순 (2)
(13) 각 반마다 매긴 5위든지 10위인 사람끼리 비교하여 전체의 등위가 높은 순 (3)
(14) 각 반의 평균에서 편차를 모두 합해서 수가 적은 순 (1)

이상의 반응 결과를 보면, 예상한 대로 가장 많은 것이, 등위의 합계를 구한 것이고, 다음이 베스트 10에 들어온 수, 그 다음이 최고와 최저의 범위로 되어 있다. 흩어진 정도에 착안한 것이 있는 것은 놀라운 일이다. 그러나, 5학년이므로, 말의 사용법은 예시한 것과 같이 간명하게 쓰여져 있지는 않아서 판독하는 데 어려웠다고 한다. 전체적으로 생각한 것보다 다양한 사고 방법이 보여졌다고 말할 수 있다.

라. 지도 후의 고찰

과제를 그대로 준 것만으로 과연 이와 같이 많은 반응을 보일 것인가? 겨우 득점의 합계라든가 평균, 베스트 10의 사람 수 정도 일 것이다. 사실, 수업의 최초의 단계에서는 노트에 한 개, 많아야 두 개 기록되어 있는 정도였으나, 수업이 끝날 무렵에는 3~4개로 되었는데, 그 원인으로서 다음과 같은 점을 들고 있다.

(1) 그룹 활동을 도입하여 서로 의견을 교환했다는 것.
(2) 학급 전체를 마라톤 집단으로 가정하고, 그룹마다 경쟁 의식을 갖게 하여 등위를 정하는 방법을 여러 가지로 생각하게 한 것.
(3) 제재 자체가 아동의 관심을 끄는 것으로 즐겁게 학습할 수 있었다는 것.
(4) 생각하는 시간을 충분히 주었다는 것.

또, 수치화 방법의 특징을 서로 이야기하게 했다는 것은, 평균의 의미를 보다 깊게 하는 데 유효하게 하였다.

그러나, 반성해야 할 점으로는, 1시간(60분)이나 걸렸다는 점인데, 1시간이 아니라 2시간으로 하여 전반부를 방법의 발견, 후반부를 토론으로 하면 이상적일 것이다. 또, 수업의 처음에 어린이들의 고정관념(합계를 비교하는 것으로 되지 않을까)을 없앨 수 있고, 다양한 많은 생각이 빨리 나올 수 있는 자연스런 형태의 발문이 있었으면 하고 반성하고 있다.

III. 문제에서 문제로

1. 문제에서 문제로에 관하여

오픈 엔드 어프로치에서는 상황 설정과 문제를 발견하는 것에 중점을 둔 반면, 문제에서 문제로에서는 어떤 주어진 문제를 풀고, 여기서 발전시켜 문제를 풀어 가는 과정의 계속성을 부여하여 발전적인 문제 해결 및 문제 설정을 순환적으로 다룬다고 하는 점이다.

수학적 활동에는 특히 사고 활동이 요구되고, 문제가 없는 곳에서는 사고는 작용하지 않는다. 그러므로, 수학 학습이 성립하는 전제조건으로는 문제가 없으면 안된다. 수학 수업에서 우리들은 처음에 「도입 문제」를 제시한다. 이것이 이제부터 행하여지는 학습에의 동기 유발과 학습 의욕, 그리고 학습의 목표를 명시하는 것이 된다.

문제의 역할은 학습에 뿐만이 아니라, 과학에서 독창적인 연구자는 항상 문제를 계속 푼 사람이었다는 것을 과학사가 가르쳐 주고 있다. 새로운 문제의 발견과 그 해결이 새로운 발견으로 결실을 맺고, 새로운 지식을 생산하는 것이다. 과학 진보의 역사는 발견의 역사이고, 그것은 새로운 문제의 발견과 그 해결에 대한 노력의 역사였다.

문제는 인식 과정에서 이미 제기되어 있으며, 문제가 무언가의 의미로 제기되어 있다고 하는 것은 인식 작용이 살아 있다는 증거가 된다. 그리고 제기된 문제는 항상 해결이 요구되며, 해결된 문제 또한 해결되는 과정 전반에서 새로운 문제들을 낳을 수 있다. 그것들도 다음에 새로이 해결되지 않으면 안된다. 우리들의 인식 과정은 이와 같은 문제의 제기와 해결과의 끊임없는 연속이라고 생각된다.

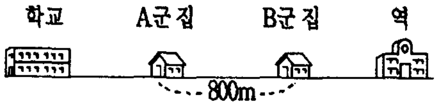
이와 같이 문제의 존재는 인식 활동을 야기시키며, 인식은 지식을 창출해 낸다. 인식·지식의 진보(증대)는 바로 「문제의 자기 증식」에 의하여, 바꾸어 말하면, 문제에서 문제로 이어진다.

2. 수업의 실제

가. 원문제(原問題) 설정의 이유와 목적 및 지도 계획

[실예] 내용: 속력(6학년)

A군이 분속 80m로 800m 떨어진 B군 집에 갑니다 몇 분 걸릴까요?



1) 원 문제의 설정 이유

(1) 원문제의 가정 부분이나 답을 구하는 사항을 바꾸어 다양하게 발전적인 문제가 만들어 질 수 있다는 것, 즉 A군이 B군을 앞지르거나, B군이 A군을 앞지르거나, 또한 A군과 B군이 만나는 문제를 만들 것으로 예상할 수 있다.

(2) 원문제나 자신들이 만든 문제를 해결함으로써 속력에 대한 이해가 깊게 되고, 발전적인 문제를 만들어 가는 학습 방법이 몸에 익혀질 수 있다.

2) 목적

(1) 속력의 개념이나 비교 방법, 구하는 방법을 알게 된다.

거리와, 시간, 속력의 관계를 (거리÷속력=시간)으로 알게 하여 거리, 시간, 속력을 구할 수 있게 한다.

(2) 원문제를 발전시키는 방법을 몸에 익힌다.

① 속력이나 거리의 수치를 바꿀 수 있다.

② 구하는 것(시간)을 바꿀 수 있다.

③ 문제의 구조를 바꿀 수 있다.

속력의 문제는 어린이에게는 저항감이 큰 교재 중의 하나이므로 원문제의 이미지화를 도모하여, 의욕적으로 해결할 수 있도록 한다.

3) 지도 계획

1교시: 속력의 비교 방법

2교시: 시속, 분속, 초속의 의미와 표현 방법

3교시: 문제의 해결(거리, 걸린 시간을 구하는 방법)과 문제 만들기

4교시: 만든 문제의 해결

3교시의 학습의 흐름은 (1) 문제 파악과 목표를 정하기 → (2) 원문제의 해결 → (3) 문제 만들기 → (4) 만든 문제의 정리와 전원이 함께 해결하는 문제 결정의 4단계로 한다.

나. 예상되는 반응과 그 취급

(거리÷속력=시간)의 관계를 가지고 원문제를 해결하고, 문제 만들기를 하게 하는 것인데, 의욕적으로 원문제를 해결하던가 문제를 만들 수 있도록 원문제의 제시 방법을 연구한다. 또 어린이는 다음 5개의 관점에서 문제를 만들 것이 예상된다.

(1) 수치를 바꾸는 문제

A군의 분속이나 거리를 바꾼 문제를 만든다.

(2) 구하는 것을 바꾸는 문제

(거리÷속력=시간)의 관계에서 구하는 사항을 바꾼다. 즉, 거리나 속력을 구하는 문제를 만든다.

(3) 상황을 바꾸는 문제

원문제의 그림에 B군의 집에서 역까지의 길이를 써넣던가 하여, 역이나 학교를 중심으로 한 문제를 만든다.

(4) (1)과 (2)를 결합하는 문제

(5) 문제의 구조를 바꾸는 문제

A군이 B군을 앞지르던가, 두 사람이 서로 만나던가 하는 문제를 만든다.

속력은 두 가지 량의 관계에서 생기고 이들 관계를 확실하게 파악시키는 것이 중요하므로, 학급 전원이 함께 해결하는 문제의 선택은 (2)나 (5)의 문제를 중심으로 다룬다.

3. 수업의 전개

(1) 원문제를 풀고 문제를 만든다(1시간)

주된 학습 활동	지도에서의 유의점
1. 학습의 목표를 파악한다. (1) 문제 상황의 이해 (2) 분속, 거리	1. 문제 상황을 파악하도록 문제의 그림을 제시하고 목표에 대하여 토론하게 한다. 2. 원문제의 요소를 확인할 뿐 아니라 문제 만들기를 파악해 둔다.
2. 원문제를 풀고 발표한다. (1) 수직선이나 식에 의하여 해결한다. (2) 자신의 말로 발표하고, 정리한다.	3. 전망을 가지고 의욕적으로 추구하게 한다. 4. 다양한 사고로 해결하게 하고 발표시킨다. 5. 충분한 이해를 위하여 수직선을 활용한다. 6. (거리÷속력=시간)을 파악한다.
3. 문제 만들기를 한다.	7. "문제를 여러 가지로 바꾸어 많은 문제를 만들자"하는 발문으로 문제를 만들게 한다. 8. 원문제의 어디를 바꾸고 어떤 문제를 만들었는지를 발표할 수 있도록 한다. 9. 문제를 만들지 못하는 어린이에게는 간단한 요소를 바꾸는 것을 지도한다.
4. 만든 문제를 발표하여 정리한다. (1) 속력과 거리등의 관계 (2) 문제를 만드는 방법 (3) 전원이 함께 해결할 문제의 선정	10. 어린이가 만든 문제(대표가 되는 문제)를 판서하여 모두 함께 토론한다. 11. 원문제에서 바뀌지 않은 곳, 바뀐 곳을 명확히 한다. 12. 속력, 거리, 시간의 관계를 정리한다.

원문제를 풀고, 토론하면서 해법을 확인한 후에 문제 설정을 하게 한 결과 어린이들이 만든 문제를 분류한 것이 <표 3-1>이다.

<표 3-1> 어린이가 만든 문제의 분류 (N: 40명)

분류의 관점		반응 수
① 수치를 바꾼다	o A군의 속력을 바꾼다	10
	o 거리를 바꾼다	23
	o 학교까지의 수치를 쓴다	32
② 구하는 것을 바꾼다	o 속력을 구한다	10
	o 거리를 구한다	26
	o 시간을 구한다	33
③ 사물을 바꾼다	o A군이 학교에	10
	o A군이 역으로	23
	o A군이 역에서 학교로	3
	o B군이 학교에	26
	o B군이 A군의 집에	13
④ 문제의 상황을 바꾼다	o 두 사람이 만난다	9
	o 두 사람이 같은 장소에서 출발한다	12
	o 두 사람이 헤어진다	3
	o 한 사람이 다른 사람을 따라 잡는다	5
	o 거리를 원둘레로 한다	3
⑤ 그 외	o 원문제와 관계없는 문제	6
합 계		247

③의 「사물을 바꾸어…」 문제를 만드는 어린이들이 많고, 반응 수는 70개를 넘고 있다. 수치를 바꾸던가 구하는 것을 바꾸던가 하여 많은 문제를 만든 것도 원문제를 그림으로 제시한 때문일 것으로 판정하고 있다.

(2) 공통 문제를 푼다(1시간)

주된 학습 활동	지도상의 유의점
1. 전 시간의 학습을 想起하고, 이 시간 학습의 목표에 대하여 토론한다.	1 시간을 구하는 문제나 두 사람이 만나는 문제에 대하여 충분히 상기하게 한다.
2. 두 사람이 만나는 문제를 푼다.	2. 학습 문제는 충분히 음미해서 제시한다.
A군은 분속 80m로, B군은 분속 70m로 걷는다. 두 사람이 상대방의 집으로 간다. 몇 분 후에 두 사람은 만날까요? 거리는 900m이다.	3. 이 시간의 문제는 시간을 정확하게 산출할 수 있도록, 거리를 800m에서 900m로 수정한 것을 확인한다. 4. 어린이들이 충분히 문제를 파악할 수 있도록 원문제와 같이 문제의 그림을 제시한다.
	5. 어린이 모두 각자의 해결 방법을 예측하게 한다.
3. 발표하고 토론한다.	6. 해결한 방법을 중심으로 토론하게 한다. 7. 원문제의 해결 방법과 비교하여 발표하게 한다.
4. 학습을 정리한다.	8. 문제 설정을 중심으로 학습을 정리하게 한다.

어린이들이 만든 문제는 그대로 학습 제재로서, 해결할 수 있는 것도 있지만, 해결 할 수 없는 것도 있다. 이들 문제를 보다 가치가 높은 문제로 하기 위해서는 교재를 보는 교사의 눈과 어린이에 대한 적절한 조력이 중요하다.

(3) 수업의 고찰

문제 만들기에서 어린이들은 어려움을 느끼면서 능력이나 개성에 따라 문제를 만든다. 학습 후의 감상문에서, "스스로 만든 문제를 푸는 것은 즐겁다.","친구들의 문제와 비교되므로 즐겁다.", "나도 문제를 만들 수 있었다." 등으로부터 어린이들의 즐거움이나 괴로움을 엿볼 수 있다.

지금까지는 어떤 문제들이 해결되면 그것으로 학습이 끝나고, 바로 다음 학습이 시작되는 것으로 생각하고 있던 어린이들도 원 문제를 해결한 후에 문제 설정의 기회를 주니까 의욕적이고 발전적으로 문제를 만들어 간다.

어린이들이 재미있게 생각하는 학습 조건의 하나로, 가끔 자기 스스로 문제를 만들던가 교사가 만든 문제 중에서 골라서 해결하는 것을 들 수 있다. 그러므로 원문제의 어디를 어떻게 바꾸면 문제를 만들 수 있는지, 또 보다 가치 있는 문제로 되는지 하는 것을 문제 설정의 학습 방법으로서 의식하게 하는 것이 중요할 것이다. 문제 설정의 학습으로 다음의 사실이 밝혀졌다.

① 어린이들은 가끔 문제를 만들고 싶어한다.

② 수학을 싫어하는 어린이도 문제 만들기에는 대단한 흥미를 보인다.

③ 주어진 문제보다 자기 스스로 만든 문제에 흥미를 보인다.

④ 원문제와 만든 문제를 비교함으로써 문제의 구조가 명백하게 된다.

⑤ 만든 문제를 살려서 수학과 커리큘럼의 구성이 가능하게 된다.

이 단원에서 어린이들의 학습은 속력의 학습으로, 문제 만들기는 셋째 시간이었다. 시속, 분속, 초속의 의미와 그 표현 방법을 알고, 더욱이 거리와 걸린 시간을 구하는 방법을 배우는 학습이지만, 역시, 눈에 보이는 거리와 눈에 보이지 않는 시간이 결합되어 있으므로, 상당한 저항감도 있었다.

그래서 원문제를 이해시키는데 충분히 유의하고, 어린이 각자에게 속력의 개념을 이해시키기 위하여 조작 학습을 도입하여, 보이지 않는 시간을 보이는 것으로 바꾸던가 개별 학습을 도입하여 지도하고 문제 설정으로 발전시켜 갔다. 이것은 원문제를 보다 잘 이해하고 문제 설정을 용이하게 했다.

4교시의 발전 문제의 해결은 <속력>에 대한 종합 연습으로 하였다. 이 발전 문제의 해결은 원문제의 상황과 다른 것이므로, 이 문제를 해결함으로써 속력의 개념이 한층 더 잘 이해되었다고 생각한다. 또, 속력의 문제는 바꿀 수 있는 문제의 구성 요소가 많으므로, 발전적 문제를 만드는 좋은 교재의 하나라고 생각한다.

IV. 문제 설정의 교수 학습

1. 문제 설정에 관하여

수학 교육에서 문제 설정의 교수 학습은 일본에서는 島田民治(1910)에서 그 원류를 찾을 수 있으며, 또 清水甚吾(1924)는 이 이론을 다년간 실천에 옮기고 발전시켜 확립하였다. 그 후에도 수학 교육에서 문제 설정의 교수·학습은 이론 및 실천적인 연구가 계속되어 왔다.

앞에서 다룬 오픈 엔드 어프로치와 문제에서 문제로의 교수 학습 이론도 문제 설정 교수·학습에 기초한 것으로 볼 수 있다. 미국에서는 M. I. Walter & S. I. Brown (1969)등이 문제 설정에 대한 연구를 발표한 후, problem posing라는 용어로 학교 수학 교육에서 문제 해결에 대한 지나친 강조에 대하여 문제 설정의 교수·학습 또한 그 이상으로 의의가 있음을 강조하고 있다.

1980년 NCTM의 연보에서 문제 설정의 교수, 학습의 중요성이 인정되고, 1983년 S. I. Brown & M. I. Walter는 공저로 *The Art of Problem Posing*에 문제 설정의 교수 학습 이론을 정리하기에 이르렀다. (문제 설정의 역사적 고찰은 임문규(1992)를 참조.)

문제 설정의 교수, 학습은 오늘날 문제 해결의 발전적 교수 학습 이론으로 평가되고 있는 경향도 있으나, 수학 교육의 목적이 자연 환경이나 인간 사회의 모든 분야로부터 수학을 발견하고 수학화하는 고차적이고 총체적인 수학적 능력 및 창의력 육성에 중점을 둔다면 가장 이상적인 수학과의 교수 학습 형태라고 필자는 생각한다.

문제 설정의 교수, 학습에 대한 자세한 목적 및 의의, 유형, 책략 및 수업 전개의 방법에 대한 개략은 임문규(1992)를 참조하기 바란다.

여기서는 실제적인 문제 설정의 수업 전개 및 어린이들이 만든 문제의 실예를 소개하기로 한다.

2. 문제 설정 교수·학습의 실제

가. 지도안의 예

구분	학습 내용 및 활동	교사의 지도 및 유의점

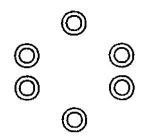
도 입	어린이들은 자신의 의견 및 생각을 발표한다.	o 여러분은 수학 교과서나 참고서는 누가 쓴다고 생각합니까? o 책 속의 문제는 누가 만듭니까? o 사람들이 쓰고 사람들이 만들지요.!? o 그렇다면 우리들도 문제를 스스로 만들어 볼까요? o 재미있을까? 어려울까? 일단 해 봅시다.할 수 있을지 없을지는 해 보지 않고는 모르겠지요.
전 개	<예>「가족」을 생각하고, 여러 가지 문제를 만들어 봅시다. o 여러 가지로 많이 생각하고, 연구하여 문제를 만든다. o 질문을 하든가 서로 의논하여 문제를 만든다.	o 우선 연습을 해 봅시다. o 그러면, 어떤 것으로 연습을 해 볼까요? o 음 그렇다, 가족에 관하여 생각해 볼까요? o 문제를 만들 수 있을까? 생각나는 문제가 있으면 발표해 주세요. (반응을 기다린다: 3분 정도) o 만약 반응이 없으면 다음과 같은 힌트를 준다. o 당신의 가족은 몇 사람입니까?(이것도 문제가 될까요?) o 이 외에는 없을까요? 생각해 보세요.(몇 분간 기다린다.) o 만약 반응이 없으면, 다음과 같이 발문한다. o 수학 문제가 될 수 있는 것이 없을까?(반응을 기다린다.) o (반응이 없으면)가족의 나이에 대하여 생각해 볼까요? (반응을 기다린다.) o 여러 가지 다양한 문제를 많이 만들어 보세요.
정 리	o 문제 만들기의 소감을 발표한다.	o 수학 문제 만들기에 대한 소감을 발표하게 한다. o 수학 문제 만들기의 자세 및 방법에 대하여 생각하고 발표하게 한다.(발표한 것을 정리한다.) o 수학 문제 만들기의 자세 및 방법을 정리한다. ① 여러 가지로 자유롭고 다양하게 생각할 것. ② 자신감을 가지고 많은 시도를 해 볼 것. ③ 지금까지의 경험과 학습에서 유사한 문제와 연결해 볼 것. ④ 상황이나 속성을 바꾸어서 만들어 볼 것. ⑤ 숫자를 바꾸어서 만들어 볼 것. ⑥ 주위의 가까운 사물들과 관련시켜 만들어 볼 것. ⑦ 도중에 포기하지말고 생각나는 것을 빠짐없이 적어 볼 것.

나. 문제 설정의 실예에 대하여

아래와 같은 상황으로 일본의 초등학교 5학년과 중학교 2학년, 고등학교 1학년을 대상으로 문제 설정을 조사하였다 (1990. 12.).

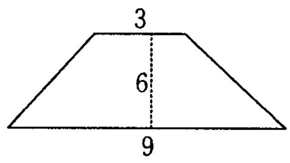
(1) 실세계적인 임의 상황으로부터의 문제 설정

<상황> 오른쪽과 같이 유리구슬이 6개 있다고 하자. 이것을 보고 스스로 여러 가지 수학의 문제를 많이 만들어 봅시다. (15분간)



초등학교 5학년생이 만든 문제를 예를 들면 다음과 같다.

1) 상자에 귤이 50개 들어 있다. 전부 2500원이다. 6상자는 몇 원이 될까요?
2) 연필이 12자루에 150원이다. 6자루는 얼마가 될까요?
3) $(2\times3+3\times9)\times2\div11=$
4) 유리구슬이 있다. 6사람이 2개씩 나누면 6개 부족하다. 유리구슬은 몇 개일까요?
5) 36페이지의 책이 있습니다. 6일간 읽으려고 하면 하루에 몇 페이지 읽으면 될까요?
6) 유리구슬을 선으로 연결하면 몇 각형이 될까요?
7) 버스가 6분마다 발차하고, 전차가 8분마다 출발한다. 버스와 전차가 8:00시에 같이 출발하면, 다음에 같이 출발하는 것은 몇 시 몇 분이 될까요?
8) 영희는 아버지와 함께 조개를 주우러 갔습니다. 아버지는154개, 영희는 24개 주웠습니다. 아버지는 영희의 몇 배일까요?
9) 다음 사다리꼴의 넓이를 구하시오.



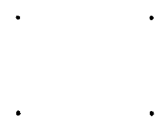
10) 6의 약수를 구하시오.
11) 세로가 6cm, 가로가 7cm인 직사각형의 꽃밭의 넓이는 얼마일까요?
12) 6개의 유리구슬에 번호를 붙여서, 그것을 나열하면 몇 가지 나열 방법이 있을까요?
13) 6개의 유리구슬에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 번호를 붙여, 3자리의 수를 만드세요. 몇 가지 있을까요?
14) 12와 6의 최소 공배수는 무엇일까요?

이상에서 어린이들이 만든 몇 가지 문제의 실예를 들었다. 위의 상황에서 초등학교 5학년과 중학교 2학년, 고등학교 1학년 학생이 만든 평균 문제 수는 각각 4.93개, 4.79개, 5.31개 정도였다.

(2) 수학적인 임의의 상황으로부터의 문제 설정

아래와 같은 상황으로 일본의 초등학교 4학년과 중학교 2학년을 대상으로 문제 설정의 조사하였다 (1988. 5.).

<상황> 오른쪽과 같이 점이 있다고 하자. 여기에서 여러 가지 수학의 문제를 만들어 봅시다. (20분간)



1) 우리 가족은 4사람이다. 레스토랑에 가서 아버지가 200원짜리를 15개, 어머니가 2개, 내가 20 개, 동생이 1개 샀습니다. 모두 몇 개입니까?
2) 공주 초등학교의 가로의 길이는 10km, 세로의 길이는 1112km이다. 차는 얼마일까요?
3) 이 점을 사탕이라고 하자. 1개 10원의 사탕을 10개 샀습니다. 전부 몇 개일까요?
4) 우리 아버지는 몸무게가 54kg, 어머니는 56kg, 형은 32kg, 나는 34kg이다. 합해서 몇 kg일까요?
5) 봉황동 마을 회관에 책이 489권 있습니다. 중학동 마을 회관에는 책이 185권 있습니다. 봉황동 마을 회관의 책은 중학동 마을 회관에 있는 책의 몇 배입니까?
6) 영수네 집에서 철수네 집까지는 32분 걸립니다. 1시 25분부터 영수네 집까지 가면 몇 시 몇 분에

도착할까요?

7) 50m 경주에서 상희는 8초 6이다. 영희는 10초 8이다. 차이는 몇 초일까요?

8) 붕어 낚시에서 상호는 20마리, 동수는 3마리, 철호는 4마리 낚고, 명수로부터 5마리 얻으면 몇 마리가 됩니까?

9) 500kg까지 실을 수 있는 트럭이 있습니다. 50kg의 철을 20개 운반하려고 한다. 트럭이 몇 대 필요합니까?

10) 아버지와 어머니, 나와 동생이 낚시를 가서, 모두 합해서 65마리 낚았습니다. 어머니는 12마리, 나는 8마리, 아버지는 동생의 8배 가지고 있습니다. 동생과 아버지는 각각 몇 마리 낚았습니까?

이상에서 아동들이 만든 문제의 실예를 몇 가지 들었다. 위의 상황에서 초등학교 4학년과 중학교 2학년 학생이 만든 평균 문제 수는 각각 4개, 3.55개 정도였다.

다. 수업 전개의 방법

필자는 문제 설정을 1) 실세계(未 수학)적인 상황으로부터의 문제 설정과 2) 수학적인 상황으로부터의 문제 설정의 두 가지로 크게 분류하였다. 이에 따른 각각의 수업 전개는 다음과 같이 생각할 수 있다. (자세한 것은 임문규(1992)를 참조)

(1) 실세계(未 수학)적인 상황으로부터의 문제 설정

1) 상황의 설정 및 제시
2) 어린이 각자의 문제 만들기
3) 어린이들이 만든 문제의 발표
4) 학급 문제의 구성 및 결정
5) 학급 문제의 해결
6) 학급 문제 해결의 검토
7) 발전적인 문제 만들기

(2) 수학적인 상황(수학 문제)으로부터의 문제 설정

1) 원문제의 설정
2) 원문제의 해결
3) 발전적 문제 만들기
4) 발전적으로 만든 문제의 발표, 분류 및 정리(학급 문제 결정)
5) 학급 문제의 해결
6) 보다 발전적 문제 만들기 및 해결

V. 결언과 시사

이제까지 수학 교육에서 열린 교수·학습으로 실천 가능하다고 생각되는 3가지 교수·학습 방법에 대하여 간단하게 그 예를 중심으로 소개하였다. 물론 이 이외에도 수학의 교수·학습에서 이해나 기능, 지식의 획득 등 중점을 어디에 두느냐에 따라 그 나름대로의 열린 교수·학습이 고려될 수 있을 것이다.

현재 학교 현장에서 이루어지고 있는 교수·학습에 위에서 소개한 3가지 교수·학습을 도입함으로써 좀

더 활기 있고 다이내믹한 열린 교수·학습이 가능하게 될 것으로 생각한다. 특히 문제 해결의 교수·학습이 강조되고 있는 학교 현장에서 문제 설정의 교수·학습을 병행하여 연쇄적, 발전적으로 도입함으로써, 보다 다양하며 활기 찬 교수·학습이 전개될 수 있을 것이다. 이것은 문제 설정 및 문제 해결 능력의 함양과 함께 유연하며 확산적인 사고력을 육성함과 동시에 어린이들의 흥미 및 관심을 환기시켜 주체적인 자주 학습이 가능하게 될 것으로 생각한다.

또한 수학 교사는 과다한 교수 의욕과 권위감을 자제하고, 어린이들과 수학의 개념을 함께 형성해 가며, 문제도 함께 만들어 가면서 해결해 간다는 열린 자세를 가질 필요가 있다. 어린이들도 선생님은 다 알고 있으며 모든 것을 다 해결하여 준다는 해결사로 생각하지 말고, 어린이 자신의 수학을 만들어 간다는 자세를 가지게 하는 것이 바람직하다고 생각된다.

참 고 문 헌

임문규 (1989). *수학 교육에서 문제 설정과 문제 해결의 관련에 관한 연구*, 일본 廣島대학 교육학 석사 학위 논문.

임문규 (1992). *수학 교육에서 문제 설정과 문제 해결의 관련에 관한 연구*, 일본 廣島대학 교육학 박사 학위 논문.

정지호, 임문규 (1992). 문제 설정의 교수=학습에 관하여(1), *數學敎育, 한국수학교육학회지, 제31권* 제3호, pp. 55-62.

島田 茂 (1977). *算數 數學の オ-プンエンド アプロ-チ*, 圖書出版.

竹內芳男, 澤田利夫 編著 (1984). *問題から問題へ*. 東洋館出版社.

島田民治 (1910). *新國定敎科書 算術科敎授要義*. 廣文館書店.

淸水甚吾 (1924). *實驗實測作問中心 算術の 自發學習指導法*. 東京目黑書店.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1983). *The Art of Problem Posing*. The Franklin Institute Press.

NCTM (1980). *Problem Solving in School Mathematics: 1980 yearbook*. NCTM.

Walter, M. I. (1987). Generating problems from almost anything: Part 1. *Mathematics Teaching 120*, pp. 3-7.

Walter, M. I. (1987). Generating problems from almost anything: Part 2. *Mathematics Teaching 121*, pp. 2-6.

Walter, M. I., & Brown, S. I. (1969). What-If-Not? *Mathematics Teaching 46*, pp. 38-45.

<Abstract>

A Study on the Practical Methods of Open Teaching and Learning in Mathematics Education

Lim, Mun Kyu[2)]

Open education is carried out and studied in both phases of theory and practice in Korean elementary schools in these days. I introduced three open teaching and learning methods which we can use practically in elementary school mathematics education. They are the teaching and learning by open-end-approach, From problems to problems and Problem posing. First, I illustrate each meaning of three teaching and learning methods. Next, I presented the concrete plans of each teaching and learning method, and exhibited some examples of students' own works.

2) Kongju National University of Education (376 Bonghwang-dong, Kongju, Chungnam 314-060, Korea; Tel: 0416-50-1650; FAX: 0416-54-1578)