

내/외재적 유한요소법을 이용한 최대추력노즐의 설계해석

윤 응 섭^{*1}, 고 현^{*2}

Implicit/Explicit Finite Element Method for Euler Flows Inside the Optimum Nozzle

W. S. Yoon and H. Kho

Optimum nozzle design exploiting the method of characteristic(M.O.C) has been in application as an efficient design methodology targeting a less weighted and short expansion nozzle. This paper treats the optimum nozzle design and the analysis of the inviscid compressible flow inside. Based on traditional Rao's method, the optimum nozzle design is coded with minor modifications for the identification of the control surface across which the mass flux should be conserved. Internal flow field is simulated numerically by M.O.C and implicit/explicit Taylor-Galerkin finite element method(F.E.M) with the aid of adaptive remeshing to capture the shock wave, hence improve the accuracy. Designed and calculated flow fields due to the separate analyses show that the mass flux predicted by optimum nozzle design with M.O.C is not conserved across the control surface and the sonic line should be located upstream of the nozzle throat. Rao's optimum nozzle design methodology exaggerates the momentum thrust and tends to overemphasize the engine performance loss.

Key Words : 최적노즐 설계(Optimum Nozzle Design), 비점성 압축성유동(Inviscid Compressible Flow), 내/외재적 유한요소법(Implicit/Explicit Finite Element Method), 적응격자(Adaptive Mesh)

1. 서 론

추진기관의 팽창노즐에서 최대추력은 노즐에서 외부로 방출되는 연소가스가 반경방향으로 균일하게 그리고 최대한 축방향의 속도벡터를 유지함으로써 이루어진다[1]. 그러나 팽창각이 작고 길이가 긴 노즐은 무게가 증가되며 질량에 대한 추력의 비가 감소하므로 노즐은 정하여진

공간조건하에서 추력손실을 최소화 할 수 있도록 설계되어야 한다.[2]

추진기관용 노즐은 형태 및 용도에 따라 원추형, 벨(Bell)형 등으로 구분되며[2] 벨형 노즐은 parabola 혹은 최대추력노즐[3]로 설계된다. 출구면적비가 큰 노즐의 최대추력노즐의 설계에는 일반적으로 M.O.C를 이용한 Rao[4]의 방법이 사용되고 있으며 확정되지 않은 노즐목부근에서의 등음속선(sonic line)의 초기화곡선 설정에는 Sauer[5], Kliegel[6]의 방법 등이 사용된다.

최대추력노즐의 설계에는 M.O.C가 사용되므

^{*1} 정회원, 한국항공우주연구소

^{*2} 학생회원, 전북대학교 대학원 항공우주공학과

로 경계면이 부여되지 않는 압축성유동 및 노즐 형상의 결정에는 효과적이거나 노즐내부에서 발생하는 충격파, 난류 및 경계층 등에 대한 고려가 배제되어 있어 이로 인한 오차의 요인을 내포하고 있다[7].

노즐내부유동과 같은 복잡한 유동장의 해석을 위하여는 광범위한 시간 및 길이 scale들이 동시에 모사되어야 하며 이를 위하여 유한차분법 (finite difference method), 유한요소법 (finite element method), 유한체적법 (finite volume method), spectral method 등이 적용되어 왔고, 난류는 closure 모델, probability density function (P.D.F), large eddy simulation (LES), direct numerical simulation (DNS) 등의 방법들이 다양하게 적용되어 왔다. 이 중 가장 효과적인 방법의 하나가 난류와 화학반응을 포함한 적응적 유한요소법이다.[8],[9]

본 연구에서는 Rao[4]와 Sauer[5]의 방법으로 최대추력노즐 설계프로그램을 작성하여 검증하였고 설계된 노즐내부에서의 비점성유동은 적응격자를 이용한 내/외재적 Taylor-Galerkin 유한요소법[10]을 사용하여 계산하였다. 최대추력노즐 설계에 의하여 형상화된 노즐내부에서의 유동을 계산, 노즐설계 시 M.O.C에 의하여 예측된 값들과 비교, 설정된 제한조건에 부합하는지의 여부를 검토하였으며 M.O.C의 수행 시 이론적으로 수행되는 초기변수선(initial value line) 설정의 타당성 및 유량보존제한조건에 의한 설계 성능과 충격파에 의한 성능변화 등을 고찰하였다.

2. 지배방정식과 수치해석 기법

2.1 지배방정식

노즐내의 압축성 난류유동계산을 위한 시간에 의해 평균된 보존형 지배방정식 시스템은 다음과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + \frac{\partial G_j}{\partial x_j} = B \quad (1)$$

시간에 의하여 평균된 유동변수들은

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_i \\ \rho E \\ \rho K \\ \rho \epsilon \end{pmatrix}, \quad F_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_i v_j \\ (\rho E + p)v_j \\ \rho K v_j \\ \rho \epsilon v_j \end{pmatrix}$$

$$G_j = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_{ij} \\ -(\tau_{ij} + q_j) \\ -\mu_K K_{,j} \\ -\mu_\epsilon \epsilon_{,j} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho F_{,j} \\ S_\epsilon + \rho F_{,j} v_j \\ S_K \\ S_\epsilon \end{pmatrix}$$

이며 여기서 τ_{ij} 는 난류를 포함한 전단응력, K 와 ϵ 는 각각 난류운동에너지 및 에너지소멸율이고 B 는 모든 source 항들을 포함한다.

2.2 내/외재적 유한요소법

식(1)은 2단계 Taylor-Galerkin 방법에 의한 유한요소법에 의하여 계산된다.[8] 일반적으로 외재적 방법은 경제적이거나 압력 혹은 속도의 구배가 큰 유동장의 계산에서는 내재적 방법에 비하여 정확도가 떨어지는 단점이 있다. 구배가 크고 작은 부분이 함께 존재하는 유동장의 계산에서 구배의 정도에 따라 내재 및 외재의 정도를 조절하여 사용하면 정확도를 유지함과 동시에 경제적인 면도 고려할 수 있는 효과적인 전산모사방법이 된다[10].

유동변수 U^{m+1} 을 U^m 에 대한 2차정도의 Taylor급수로 전개할 때 내재상수 s_1 및 s_2 를 포함하여 표현하면[10]

$$\Delta U^{m+1} = \Delta t \left(\frac{\partial U^m}{\partial t} + s_1 \frac{\partial \Delta U^{m+1}}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U^m}{\partial t^2} + s_2 \frac{\partial^2 U^{m+1}}{\partial t^2} \right) + O(\Delta t^3) \quad (2)$$

와 같이 되며 식 (2)에서의 1,2차 급수 항은 아래와 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial F_j}{\partial x_j} - \frac{\partial G_j}{\partial x_j} + B \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = & a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_i}{\partial x_i} - B \right) \\ & + b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_i}{\partial x_i} - B \right) \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서 a_j , b_j 는 각각 대류(convective), 소멸(dissipative) jacobian이며 다음과 같이 정의된다.

$$a_j = \frac{\partial F_j}{\partial U}, \quad b_j = \frac{\partial G_j}{\partial U}$$

이상의 관계들을 적용하여 정리하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.[10]

$$\begin{aligned} R = & \Delta U^{n+1} + s_1 \Delta t \left(a_j \frac{\partial \Delta U^{n+1}}{\partial x_j} - \Delta B^{n+1} \right) \\ & - s_2 \frac{\Delta t^2}{2} (a_j a_i + b_j a_i) \frac{\partial^2 \Delta U^{n+1}}{\partial x_j \partial x_i} \\ & + \Delta t \left(\frac{\partial F_j^n}{\partial x_j} + \frac{\partial G_j^n}{\partial x_j} - B^n \right) \\ & - \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ (a_j + b_j) \left[\left(\frac{\partial F_j^n}{\partial x_j} + \frac{\partial G_j^n}{\partial x_j} - B^n \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial B^n}{\partial t} \right\} + O(\Delta t^3) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)의 유도에서 모든 jacobian들은 n 과 $n+1$ 시간사이에서 공간적으로 일정한 것으로 가정되었고 시간이 충분됨에 따라 새로이 계산되게 된다.

식(5)에 Taylor-Galerkin 유한요소법을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\int_{\Omega} W_a R(U, F_j, G_j) d\Omega = 0$$

여기에서 W_a 는 시험함수(test function)이며 보존함수들은 시도함수(trial function) Φ_a 에 내접되어 식(6)과 같은 선형대수방정식을 구성하게 된다[10].

$$(A_{\alpha\beta} \delta_{rs} + B_{\alpha\beta rs}) \Delta U_{\beta s}^{n+1} = H_{\alpha r}^n + N_{\alpha r}^{n+1} + N_{\alpha r}^n \quad (6)$$

3. 최대추력노즐설계

최대추력노즐의 설계는 Fig. 1과 같이 M.O.C의 적용을 위한 영역들로 구분하여 수행한다. 여기서 선 TT 은 초기화곡선이며 $TTCB$ 는 kernel영역으로 이 영역은 하류의 노즐형상이나 유동장에 영향을 받지 않는다. 또한 R 은 turning contour영역으로 Kernel특성선 BC 와 이 특성선의 중심축과의 교차점 x_C 와 노즐 출구를 연결하는 조절면(control surface) CE , 그리고 미지의 벽면선 BE 로 구성된다. 최대추력노즐의 설계는 팽창하는 가스의 속도벡터들을 최대한 축방향으로 유도하는 이 미지의 벽면선 BE 를 결정하는 과정이며 이를 위하여 (1) 일정한 노즐길이 x_E 및 (2) 조절면을 통과하는 유량은 일정하다는 두개의 제한조건(constraints)를 적용하여 수학적으로 해를 구한다.[4] 이 제한조건들을 Fig. 1을 이용하면 다음과 같이 표현된다.[7]

$$\dot{m}_{CE} = \int_C^E \rho V \sin \left(\frac{\phi - \theta}{\sin \phi} \right) 2\pi y dy = const.$$

$$L = x_C + \int_C^E \cot \phi dy = const.$$

여기에 사용된 변수들은 ρ : 밀도, V : 속도, y : 반경방향 좌표, θ : 속도 방향각, ϕ : 특성선(characteristic line)의 경사각 등이다. 최대추력노즐형상의 계산은 Fig. 1의 turning contour(R영역)내에 무한히 존재하는 특성선들

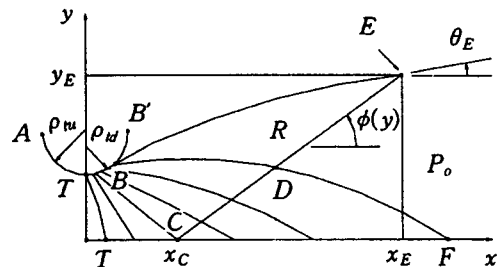


Fig. 1 General features of Rao's nozzle[7]

의 조합들 중에서 위의 두 제한조건들을 만족하는 변수들의 조합을 검색하고 구하여진 특성선 격자에서의 속도벡터들 중 주어진 팽창비에 의한 노즐출구를 통과하는 흐름선을 구하는 과정들로 이루어진다.

위의 내용을 바탕으로 한 최대추력노즐형상 계산은 노즐목부분의 초기변수선의 설정으로부터 노즐내벽면의 결정까지 다음과 같은 순서에 의하여 수행된다[4].

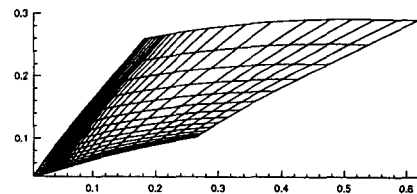
- (1) 노즐목부분의 형상을 정한다. 일반적으로 노즐목의 벽면형상은 원형을 사용하며 그 크기에 따라 전체길이 및 좌표에 따른 팽창률이 결정되므로 상황에 맞게 선택되어야 한다.
- (2) 계산의 초기조건 설정을 위하여 노즐 목부분에서의 sonic line의 위치와 그 위치에서의 마하수를 계산한다. 일반적인 Sauer의 방법 [5]을 사용할 경우 등음속선상에서의 마하수는 1 이상이 될 수도 있다.
- (3) 노즐목부분의 원형외곽선을 일정한 각도로 등분하며 그에 해당되는 특성곡선을 등음속선으로부터 시작하여 노즐하류쪽으로 진행하면서 계산한다.
- (4) 노즐출구에서의 형상 및 조건들을 계산한다. 이 단계는 위의 제한조건식들을 계산함으로써 이루어진다. 종래에는 이 출구를 지나서 특성선의 확정을 위하여 임의의 선을 작은 범위로 증분하여 근접한 값을 유도하였으나 본 연구에서는 노즐출구외부에 가상특성선을 설정, 마지막으로 결정된 특성선과의 영역에서 반복이분법을 이용하여 노즐출구를 지나는 특성선의 위치를 검색하였다.
- (5) 노즐출구형상이 정하여진 후에는 Fig. 1의 turning contour영역 경계면에서의 모든 변수들이 결정되게 된다. 경계면에서의 변수들을 바탕으로 M.O.C로 내부유동장을 계산하고 그에 따른 흐름선들 중 노즐출구를 지나는 흐름선이 최대추력을 발생하는 노즐의 내벽면형상이 된다.

구 분	조 건
연소실압력	104.4 psi
연소가스 온도	3195 °K
비열비	1.2
연소가스상수	318 J/kg-K
노즐목상류 반경	2.0 cm
노즐목하류 반경	1.0 cm
노즐목 반경	3.7 cm

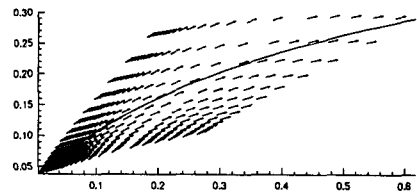
Table 1. Nozzle configuration and chamber condition

4. 계산결과 및 검토

본 연구에서는 2, 3장에 기술된 최대추력노즐 설계 및 전산모사에 의한 해석방법을 이용하여 우주용 추진기관에 주로 사용되는 최대추력노즐의 설계를 위한 프로그램을 작성, 실제의 추진기관노즐과 비교, 검증하고 확정된 노즐내부형상에 따른 유동장을 계산하였다. 최대추력 노즐설계의 검증에는 진공조건에서 작동하는 추력 9,800lbf, 팽창비 65의 TR-201[11]추진기관 노즐을 대상으로 하였으며 형상 및 유체는 표 1의 값들로 입력되었다.[11][12] 표 1에서 노즐목상류, 하류반경은 각각 Fig. 1의 ρ_{tu} , ρ_{td} 에 해당한다



(a) Characteristic lines



(b) Velocity vector

Fig. 2 Characteristic lines and velocity vector in turning contour region

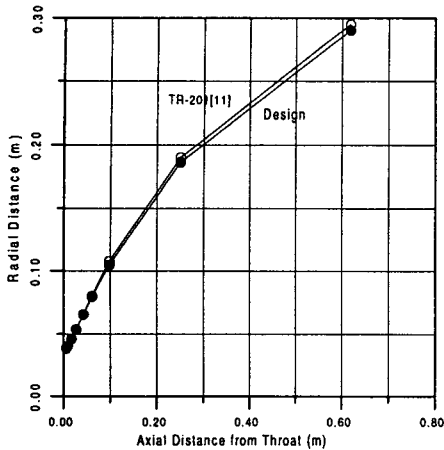


Fig. 3 Comparison of real and calculated nozzle contours

3절의 (1)-(4)의 과정을 통하여 Fig. 2(a),(b)와 같은 설계 유동장을 얻을 수 있다. Fig. 2(a)에는 위의 설계방법에 따라 노즐출구조건 및 제한조건들을 만족하는 특성선 격자들이 나타나 있으며 Fig. 2(b)에는 각 특성선격자점에서의 속도벡터와 흐름선들 중 노즐출구의곽을 통과하는 흐름선이 도시되어 있다. 이 흐름선이 곧 최대추력노즐의 내벽면이 된다. Fig. 3에서는 Fig. 2(b)에서의 최대추력노즐설계의 결과와 유사한 방법으로 계산되어 실제로 적용된 노즐형상[11]을 비교하고 있으며 잘 일치하고 있는 것을 볼 수 있다.

본 연구에서 설계된 최대추력노즐을 고체로켓 추진기관에 주로 사용되는 동일한 노즐팽창비의 15도 원추형 노즐과 형상을 비교하여 보면 최대추력노즐이 15도 원추형노즐보다 약 47% 가량 짧다.

Fig. 2와 같이 설계된 최대추력노즐의 성능 및 특성을 비교, 검토하기 위한 노즐내부유동장 계산을 수행하였고 그 결과가 Fig. 3(a)-(d)에 도시되어 있다. 최대추력노즐 설계에 사용된 M.O.C는 점성, 난류 및 연소를 포함하지 않으므로 해석에서의 일관성을 위하여 유동장의 해석은 Euler방정식계산에 국한하였다. 경계조건은 표 1의 값들을 사용하였으며 해의 정확도를 높이기 위하여 적응격자를 도입하였다. Fig. 3(a)에서 도시된 격자는 최초 1136요소, 647격자점으로부터 시작, 적응격자를 2회 반복하였으며 최종적으로 8904요소, 4755격자점으로 계산되었다. 주로 노즐목하류 근접한 부분에 격자점들이 집중하고 있으며 충격파가 발생하고 있는 지역을 따라서도 격자점들이 다수 생성되어 있다. Fig.3(b)에 나타난 등압력선의 분포를 보면 연소실내에서는 그 크기의 변화가 거의 없다가 노즐목부근으로부터 빠르게 떨어지기 시작하여 노즐하류 약 10cm정도에서 7.5psi가 되며 노즐출구에서는 3psi까지 압력이 저하되고 있는 것을 볼 수 있다. 이에 비하여 Fig.3(c)에서의 온도변화는 압력변화보다는 느리게 진행되는 것으로 나타났다.

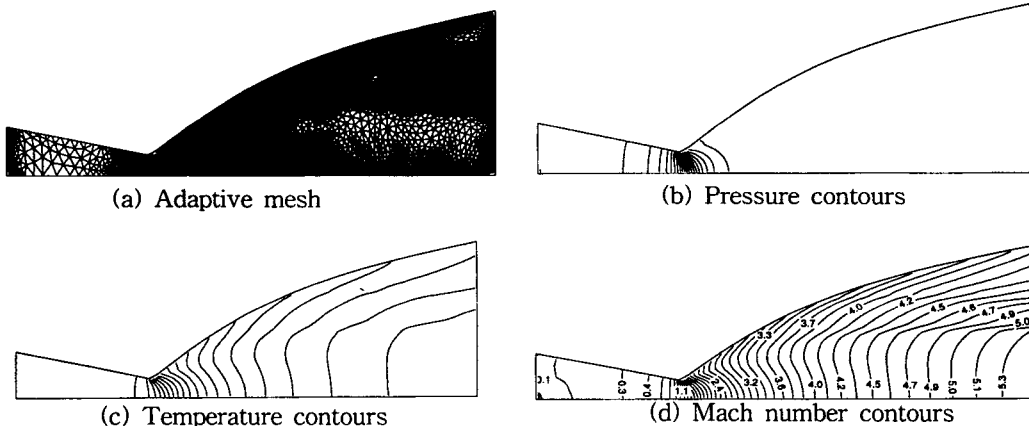


Fig. 4 Grid and flow variables inside the nozzle

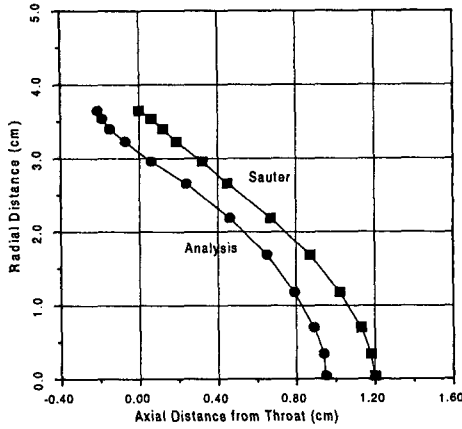


Fig. 5 Sauer's initial and calculated sonic lines

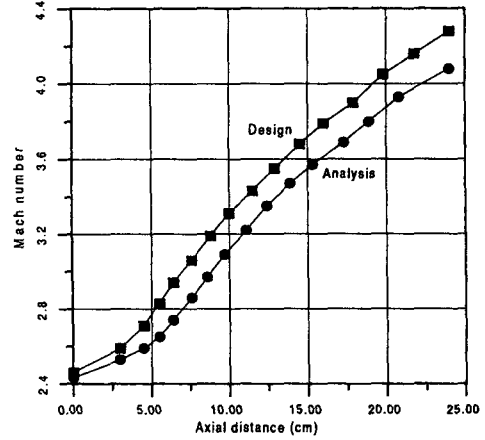


Fig. 6 Mach number variations inside the turning contour region

Fig. 3(d)에 나타나 있는 등마하선의 분포에서 보면 노즐출구 중심축에서의 마하수는 5.4이며 팽창-압축점으로부터 충격파가 형성되고 있으나 노즐 하류로 진행함에 따라 급격히 증가하는(출구팽창비 65) 노즐 단면적의 변화로 인하여 빠르게 팽창하므로 대기 중에서 사용되는 낮은 팽창비의 추력발생용 추진기관노즐보다는 충격파의 강도가 매우 약하며 압력파의 형태를 보이고 있다. 해석결과에 의한 추진기관의 추력은 9788.4lbf로서 실제 성능(9800lbf)에 근접한 수치를 보여주고 있으며 M.O.C에 의한 추력은 10441.7lbf로서 실제추력보다 높은 값을 나타내고 있어 M.O.C는 추력성능을 과대하게 예측하고 있는 것으로 나타났다.

Fig. 5에서는 설계와 계산에 의한 등음속선의 위치를 비교하고 있다. M.O.C는 초음속유동에만 적용이 가능하므로 노즐내부유동의 예측에서는 언제나 초기값의 설정이 요구되며 여기서는 Sauer의 방법으로 계산되었다. Sauer의 방법에 의한 초기변수선이 전산모사에 의하여 계산된 등음속선보다 노즐목 하류부분에 위치하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 6에서는 turning contour영역 중 선 BD (Fig. 1)에서의 M.O.C와 전산모사에 의한 마하수의 변화를 도시하고 있다. 점 D에서의 M.O.C에 의한 마하수는 4.2로 해석에 의한 결과

(4.03)보다 크게 나타나고 있는 것을 볼 수 있다. 노즐출구 이외에도 전 영역에 걸쳐 M.O.C가 더 큰 마하수를 예측하고 있으며 이는 M.O.C가 Fig. 4(d)에 보이고 있는 충격파를 적절히 모사하지 못하고 있기 때문이다. 즉, Fig. 2(b) 및 Fig. 4(d)에서의 유동형태를 비교하여 볼 때 M.O.C계산에 의한 토출부분의 속도가 충격파의 영향이 포함된 속도보다 크게 나타나고 있어 궁극적으로 M.O.C는 동일한 유량의 경우, 운동량 추력을 과대하게 계산하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 4(d)로부터 turning contour영역을 통과하는 유량을 비교하여 본 결과 인입유량은 초당 4.9kg였고 토출유량은 3.6kg으로 상당한 차이를 나타내고 있다. 즉, 유량보존이 지켜져야 할 영역의 위치가 제대로 설정되지 못하여 설계시 이론적으로 제시된 유량보존조건이 제대로 지켜지지 않고 있는 것을 볼 수 있다. 이는 제한조건을 충족시키는 turning contour영역이 정확히 계산되고 예측되지 못한데 그 원인이 있으며 제시된 유량보존의 제한조건을 만족시키기 위하여는 초기변수선의 설정으로부터 kernel영역, turning contour영역에서의 특성선계산이 정확히 이루어져야 하나 적용격자와는 달리 M.O.C에서는 임의의 영역을 강조하여 모사하기가 어려운 단점이 있다. 특히 빠르게 팽창하는 큰 직경비의 노즐의 계산에서는 상당한 오차를 발생시킬 것

로 예측된다.

결과적으로 M.O.C에 바탕한 최적노즐설계는 노즐목부분에서는 실제보다 낮은 마하수를, 노즐하류에서는 충격파 또는 압력파에 의한 속도의 저하를 포함하지 못하므로 높은 마하수를 나타내고 있는 것을 알 수 있다.

5. 결 론

로켓추진기관에 주로 사용되는 최대추력노즐 설계 및 해석을 위한 연구를 수행하였다. 노즐 설계에는 최대추력발생을 위한 Rao의 노즐설계 방법을 적용하였고 초음속유동의 해석을 위하여는 내/외재적 방법의 유한요소체적법과 적응격자를 이용한 수치모사의 방법을 적용하였다. 최대추력노즐의 설계프로그램을 작성, 검증하기 위하여 유사한 방법을 사용한 실제의 최대추력노즐에 적용하였고 설계된 노즐 내에서의 비점성 압축성유동을 해석, 최대추력노즐설계의 정확성 및 문제점들을 검토하였다.

최대추력노즐 설계방법에 의한 초기등음속선은 실제보다 하류부분에 위치하게되어 노즐목부분에서 낮은 마하수를 보이고 있고, 충격파에 의한 마하수의 감소를 모사하지 못하여 노즐출구에서는 마하수가 더 높아지는 것으로 나타나고 있다. 이론적으로 설정된 길이 및 유량보존 제한조건들도 해석결과와는 차이를 나타내고 있으며 이는 M.O.C에 의한 노즐 내부유동장 예측이 부정확 한데 그 원인이 있다.

일반적인 최대추력노즐의 설계에서 적용되고 있는 M.O.C 및 Rao의 방법은 그 편리성에 반하여 노즐내부에서 발생하는 아음속으로부터 초음속에 이르는 모든 속도영역 및 충격파, 난류, 경계층 등의 계산이 불가능하므로 결과적으로 이와 같은 모든 손실요인들을 배제한 과대한 성능 및 성능손실을 예측하고 있다.

참고문헌

1. Sutton, G.P., Rocket propulsion elements, Wiley Interscience, N.Y., 1992.
2. Huzel, D.K. and Huang, D.H., "Modern

engineering for designing of liquid-propellant rocket engines," Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 147, Rockwell International, 1973.

3. Ahlberg, J.H., Hamilton, S., Migdal, D., and Nilson, E.N., "Truncated perfect nozzles in optimum nozzle design," *Journal of the American Rocket Society*, Vol. 31, No. 5, May 1961, pp. 614-620.
4. Rao, G.V.R., "Exhaust nozzle contour for optimum thrust," *Jet Propulsion*, Vol. 28, No. 6, June 1958, pp.377-382.
5. Sauer, R., "General characteristics of the flow through nozzles at near critical speeds," Vol. 12, No 1, Jan. 1975, pp. 39-43.
6. Kliegel, J.R. and Levine, J.N., "Transonic flow in small throat radius of curvature nozzles," *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 7, July 1969, pp. 1375-1378.
7. M.J. Zucrow and J.D. Hoffman, *Gas Dynamic (Vol. II)*, Wiley and Sons, N.Y., 1977.
8. Chung, T.J. and Yoon, W.S., "Effects of reacting flows with turbulence and shock waves on efficiency of scramjet combustors," 28th JANNAP Combustion Meeting, 1991.
9. T.J. Chung and W.S. Yoon, "Numerical studies of supersonic / hypersonic combustion," AIAA-92-0094, 1992.
10. Yoon, W.S. and Chung, T.J. Chung, "Hypersonic combustion with shock waves in turbulent reacting flows," AIAA-92-3426, 1992.
11. Korea sat preliminary design review, Mcdonell Douglas, June 1993.
12. Gordon S. and McBride, B.J., "Computer program for calculation of complex chemical equilibrium compositions, rocket performance, incident and reflected shocks and Chapman-Jouguet detonations", NASA SP-273, 1971.