

Multi-Domain 과 행렬 보간법을 이용한 강 하구와 연안의 2 차원 수치해석

채 현 식*

Numerical Simulation of 2-D Estuaries and Coast by Multi-Domain and the Interpolating Matrix Method

H. S. Chae

This paper presents a two-dimensional horizontal implicit model to general circulation in estuaries and coastal seas. The model is developed in non-orthogonal curvilinear coordinates system, using the Interpolating Matrix Method (IMM), in combination with a technique of multi-domain. In the propose model, the Saint-Venant equations are solved by a splitting-up technique, in the successive steps; convection, diffusion and wave propagation. The ability of the proposed model to deal with full scale nature is illustrated by the interpretation of a dye-tracing experiment in the Gironde estuary.

Key Words: 다중영역(Multi-domain), 유한차분법(FDM), 행렬 보간법(Interpolating Matrix Method), 비직교 곡선좌표계(non-orthogonal curvilinear coordinates system)

1. 서론

본 연구는 강하구나 해안의 복잡한 지형 (complex geometry)의 물리적 현상을 Modellin 하여 정보를 얻으므로서 해안환경의 미래에 대한 유동변화를 예측, 분석 한다. 지배방정식 Saint-Venant을 행렬보간법 IMM (Interpolat Matrix Method)을 이용하여 비직교 곡선 좌표 계(non-orthogonal curvilinear coordinate sys 유한차분법 FDM(Finite Difference Method)으로 수치모델을 하였다.

현재까지의 유한 차분법 으로는 직각격자를 사용하여 프로그램이 쉽고 계산이 단순하나 많은 단점이 있고 특히 지형이 복잡할 경우 경계 조건에서 어려운 점이 있다.

한편 유한요소법 으로는 잘 알려진 바와 같이 복잡한 지형일 경우 비선형 곡선좌표계를 사용할 수 있어 좋은 장점이 있는 반면 프로그램의 복잡함과 저장 및 계산속도 등의 단점이있다 그러므로 본 연구는 유한요소법과 유한차분

법의 장점을 이용하여 비선형 곡선좌표계와 직 선좌표계를 행렬보간법으로 상호 변환하여 유한 차분법을 유한요소법 처럼 새로운 방법으로 하였다. 이 방법의 장점은 다른 유한차분법과 유한요소법을 비교할 때 formulation을 간략하게 할 수 있고 프로그램을 쉽게 할 수 있다.

또한 복잡한 지형들을 유연하고 적합한 비 직교 곡선 격자를 형성하기 위하여 여러 영역 (multi-domain)으로 나눠서 적용하였고, 이러 Grid를 계산하기 위하여 Cristove[3] 방법 Thompson[6] 방법을 이용하였으며 또한, 행렬 보 간법(IMM)을 사용 함으로써 영역과 영역 사이의 내부 경계조건과 외부 경계조건 문제도 쉽게 해결 할 수 있었다 [1,5].

한편 지배 방정식의 대류항(convection ter 과 확산항(diffusion term)을 time spli separation 방법을 이용하였으며, 파고항 (wa propagation term)은 SOR(Successive Ov Relaxation) 계산 방법으로 하였다.

이 수치 모델의 응용으로써 France 남서쪽에 있는 Gironde 강의 속도분포, 속도장, 파고분포 유량 등을 계산하였다.

* 서강대학교 산업기술연구소

그리고 Eulerian residual velocity를 계산하여 침전현상에 대하여 알수있다.[4]

이러한 수치모델의 수치해와 측정치를 비교한 결과 매우 좋은 결과를 보여주었다.

2. 지배 방정식 및 수치해석 방법

Navier-Stokes 방정식을 수심에 대하여 적분하면 지배 방정식인 Saint-Venant 방정식은 다음과 같다.

Continuity

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Hu)}{\partial t} + u \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + v \frac{\partial(Hu)}{\partial y} &= f(Hv) \\ -gH \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{H}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial(Hu)}{\partial x} \right) & \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial(Hu)}{\partial y} \right) - \frac{\tau_{bx}}{\rho} + \frac{\tau_{wx}}{\rho} & \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Hv)}{\partial t} + u \frac{\partial(Hv)}{\partial x} + v \frac{\partial(Hv)}{\partial y} &= f(Hu) \\ -gH \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{H}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_H \frac{\partial(Hv)}{\partial x} \right) & \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_H \frac{\partial(Hv)}{\partial y} \right) - \frac{\tau_{by}}{\rho} + \frac{\tau_{wy}}{\rho} & \end{aligned} \tag{3}$$

- * $f = 2\Omega \sin \Psi$; Coriolis
- * τ_{wx}, τ_{wy} ; 바람에 의한 표면 전단응력
- * η ; 파고의 높이
- * h ; 물의 깊이
- * $H = h + \eta$
- * ρ ; 물의 밀도
- * A_H ; 확산 항 점성 계수
- * g ; 중력 가속도
- * u, v ; x, y 방향의 속도
- * C_h ; Chezy 계수
- * A_H ; 확산 항 점성 계수 [6]

$$A_H = \frac{k}{6} H u^* = \frac{k}{6} \frac{H}{C_h} \sqrt{g} \parallel \vec{U} \parallel$$

- * τ_b ; 전단 응력 마찰계수

$$\tau_b(x,y) = \rho g \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{C_h^2}(u,v)$$

3. 수치해석 방법

(1)-(3)의 방정식을 다음과 같이 time splitting fractional step 방법으로 이산화 하였고, $U=Hu, V=Hv$ 이며, $(n+1/3, n+2/3)$ 은 순수한 symbol 이다.

3-1) Convection step

$$\frac{\partial U^{n+1/3}}{\partial t} + u \frac{\partial U^{n+1/3}}{\partial x} + v \frac{\partial U^{n+1/3}}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial V^{n+1/3}}{\partial t} + u \frac{\partial V^{n+1/3}}{\partial x} + v \frac{\partial V^{n+1/3}}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

3-2) Diffusion step

$$\frac{U^{n+2/3} - U^{n+1/3}}{dt} = A_H \left(\frac{\partial^2 U^{n+1/3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^{n+1/3}}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{V^{n+2/3} - V^{n+1/3}}{dt} = A_H \left(\frac{\partial^2 V^{n+1/3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V^{n+1/3}}{\partial y^2} \right) \tag{5}$$

3-3) Wave propagation step

$0 \leq \gamma \leq 1$; 음해법의 가중치를 적용하면

$$\begin{aligned} \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{dt} + \gamma \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} + (1-\gamma) \frac{\partial U^n}{\partial x} & \\ + \gamma \frac{\partial V^{n+1}}{\partial y} + (1-\gamma) \frac{\partial V^n}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

위와 같은방법으로 파고 항을 구하기 위하여 연속 방정식과 운동량 방정식을 대입하여 소거하면 다음과 같다

$$(AA - \gamma^2 dt^2 gH\Delta)\delta\eta = BB$$

$$AA = 1 + \gamma F_b dt$$

$$BB = \gamma gH dt^2 \Delta \eta^n - \gamma dt \left(\frac{\partial U^{n+2/3}}{\partial x} + \frac{\partial V^{n+2/3}}{\partial y} \right)$$

$$- (1-\gamma) dt \left(\frac{\partial U^n}{\partial x} + \frac{\partial V^n}{\partial y} \right) - \gamma \left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \right)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \delta\eta = \eta^{n+1} - \eta^n, F_b = g \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{C_h^2 H^2} \tag{7}$$

$$T_x = f.v - \frac{gH^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\tau_{xy}}{\rho}$$

$$T_y = -f.u - \frac{gH^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\tau_{xy}}{\rho}$$

$$u^{n+1} = u^{n+2/3} - (\gamma g H \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial x} + (1-\gamma) g H \frac{\partial \eta^n}{\partial x} + (1-\gamma) F_x \cdot u^n - T_x) dt (1 + \gamma F_x dt)^{-1}$$

$$v^{n+1} = v^{n+2/3} - (\gamma g H \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial y} + (1-\gamma) g H \frac{\partial \eta^n}{\partial y} + (1-\gamma) F_y \cdot v^n - T_y) dt (1 + \gamma F_y dt)^{-1} \quad (8)$$

4. 행렬 보간법 (Interpolating Matrix Method)

물리적인 좌표(x, y)는 Fig.1과 같이 변환 좌표(ξ, η)로 변환되며 임의함수 ϕ(ξ, η)는 2차 Polynomial 방정식으로 나타내면 다음과 같다[5].

$$\Phi(\xi, \eta) - \Phi_0 = c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \xi^2 + c_4 \eta^2 + c_5 \xi \eta + c_6 \xi^2 \eta + c_7 \xi \eta^2 + c_8 \xi^2 \eta^2 \quad (9)$$

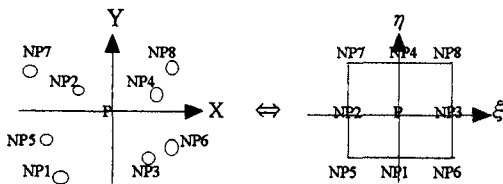


Fig.1 Coordinate transformation

Φ는 P에 대한 값이고, 격자점 Npi들에 대한 값들은 위에서 Ci (i = 1, 2, ..., 8)을 구하고 2차 방정식을 전개하여 ϕ(ξ, η)에 대한 행렬을 구한다. 이와 같은 방법으로 두 좌표(x, y)와 (ξ, η)의 관계를 이용하여 ϕ(x, y)에 대한 행렬을 구할 수 있다.[1,5]

$$\begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_{xx} \\ \Phi_{yy} \\ \Phi_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 - \Phi_0 \\ \Phi_2 - \Phi_0 \\ \Phi_3 - \Phi_0 \\ \Phi_4 - \Phi_0 \\ \Phi_M \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\Phi_M = \Phi_5 - \Phi_6 - \Phi_7 + \Phi_8$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_{xx} \\ \Phi_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & 0 & 0 & 0 \\ \xi_y & \eta_y & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{xx} & \eta_{xx} & \xi_x^2 & \eta_x^2 & 2\xi_x \eta_x \\ \xi_{yy} & \eta_{yy} & \xi_y^2 & \eta_y^2 & 2\xi_y \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_\xi \\ \Phi_\eta \\ \Phi_{\xi\xi} \\ \Phi_{\eta\eta} \\ \Phi_{\xi\eta} \end{pmatrix} \quad (11)$$

이와같이 Jacobian Matrix 방법으로 구하여 행렬(11)에 행렬(10)을 대입하여 Interpolating Matrix를 구하고, ϕ(x, y)와 ϕ(ξ, η)는 좌표변환에 이용한다.

5. 격자 생성 기법

1) 복잡한 지형에 알맞은 격자를 생성하기 위하여 Cristove[3]가 제안한 내부 격자 생성 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} f \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} f \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0, \quad f \approx f(x, y, t) \quad (12)$$

f(x, y, t) 함수를 이용하여 원하는 지점에서의 격자를 조밀하게 또는 비틀림 등을 주어 격자 구성을 원만하게 할 수 있다

$$f(x, y, t) = 1 + \gamma \left[1 + \alpha \left(\frac{x-x_c}{x_2-x_1} \right)^2 + \alpha \left(\frac{y-y_c}{y_2-y_1} \right)^2 \right]^{-1} \quad (13)$$

위 식에서 Xc와 Yc는 어떤 지점에서의 중앙부분이고 α는 반경, γ는 격자선의 조밀도이다.

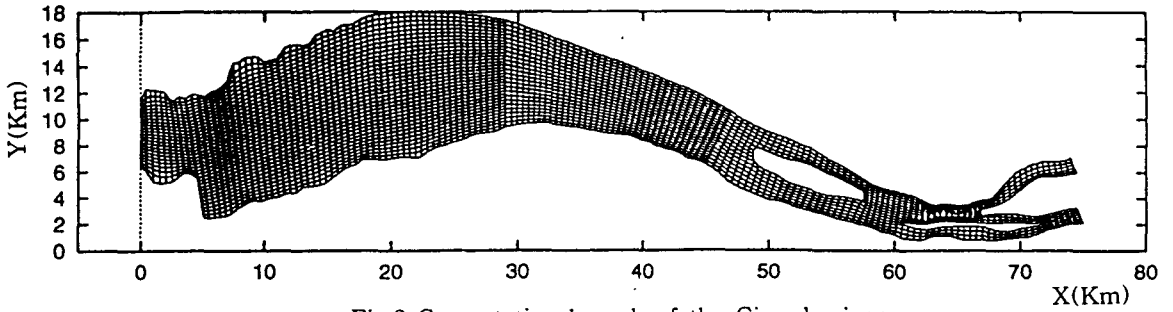


Fig.2 Computational mesh of the Gironde river

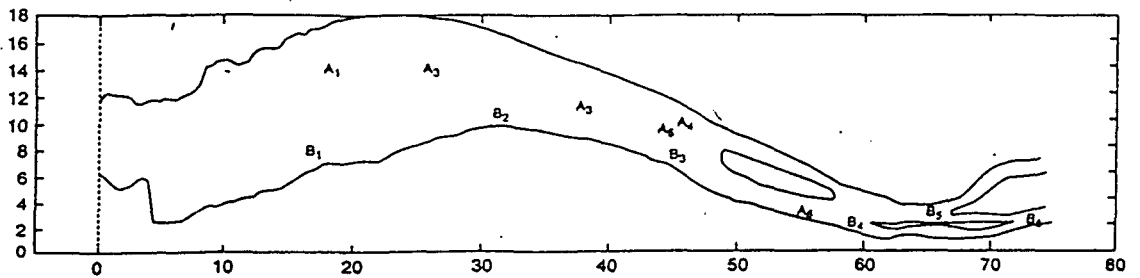


Fig.3 Geometry of the Gironde river

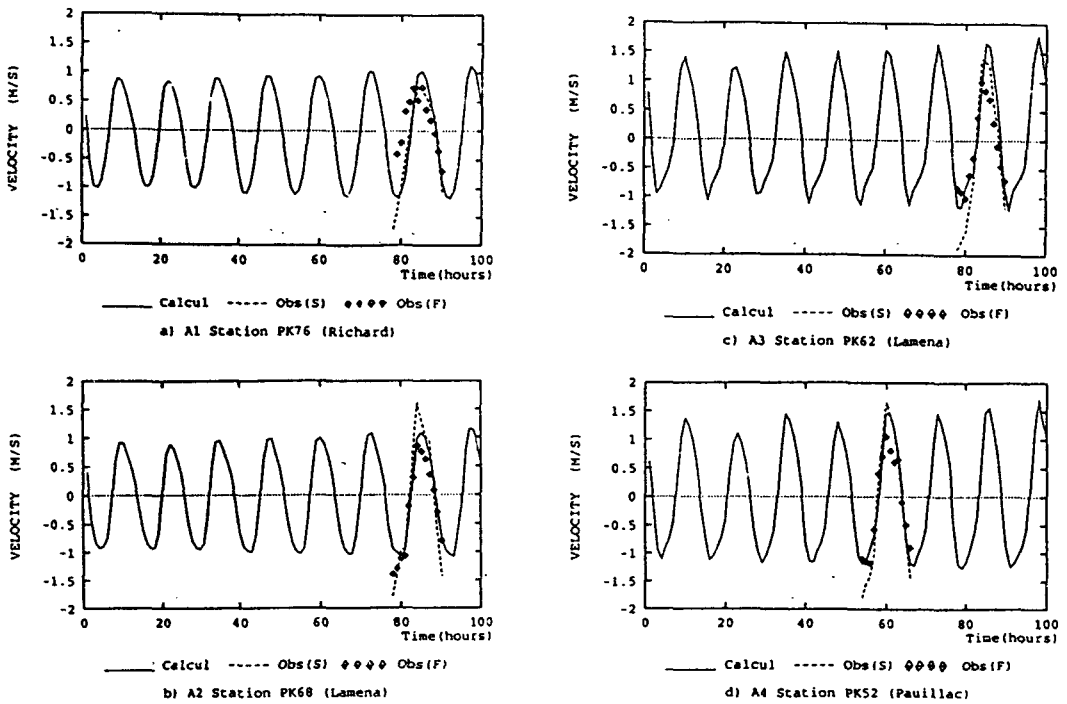


Fig.4 Comparison with observation and computational profiles of velocity

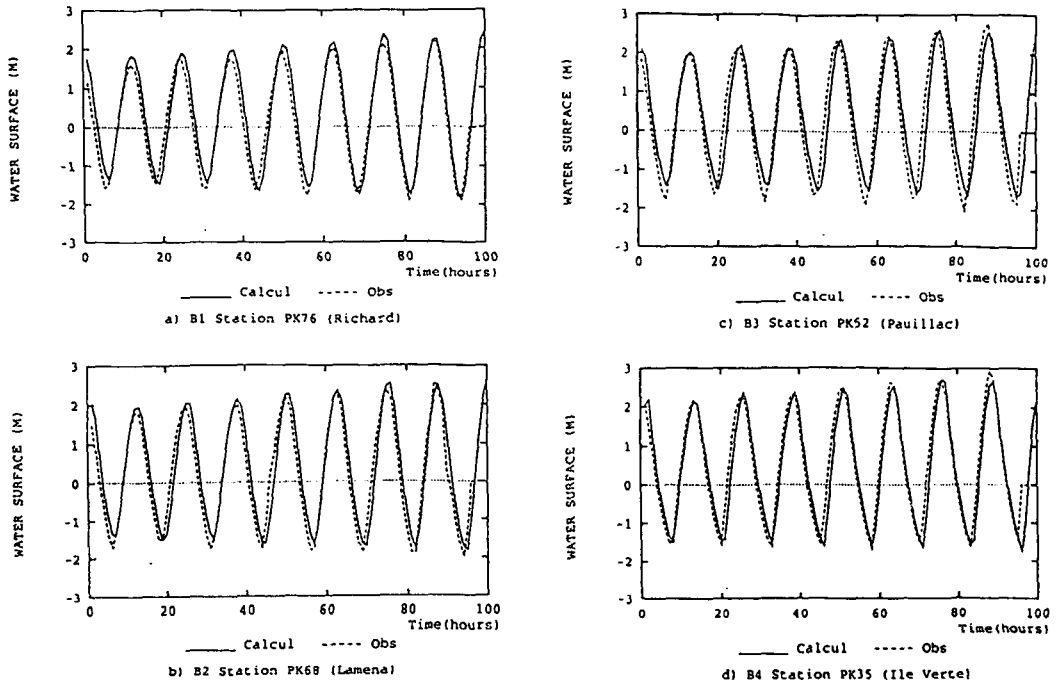


Fig.5 Comparison with observation and computational profiles of wave propagation

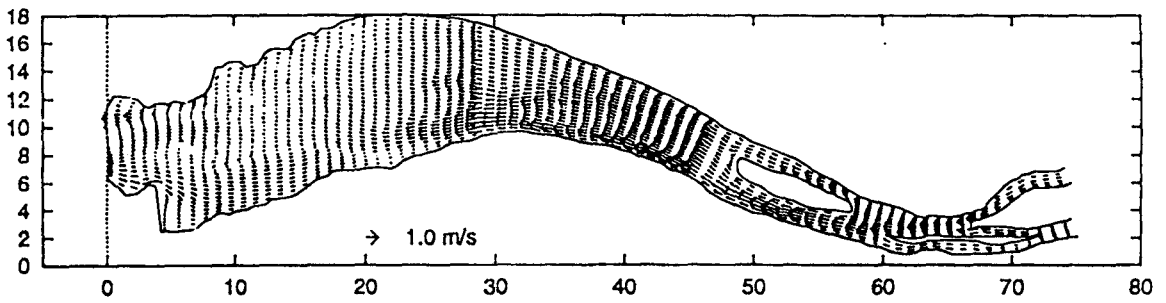


Fig.6 Fileds of velocity (at low tide)

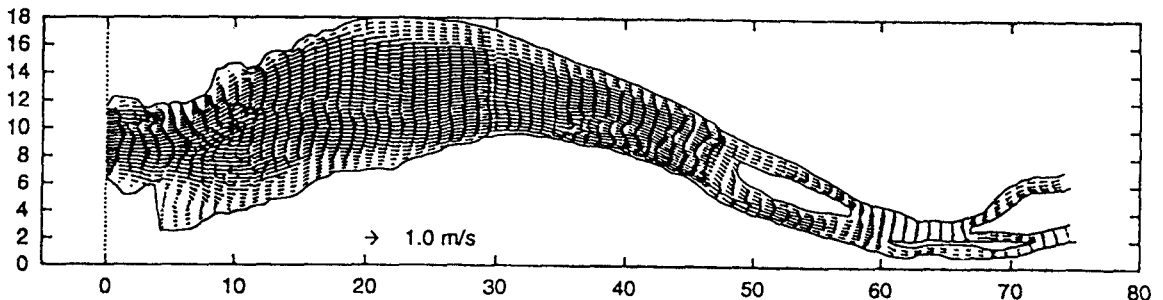


Fig.7 Fileds of velocity (at low tide after 3 hours)

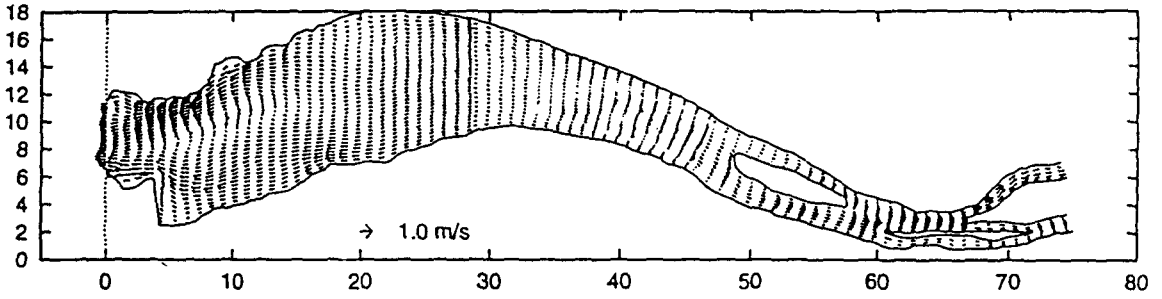


Fig.8 Fileds of velocity (at high tide)

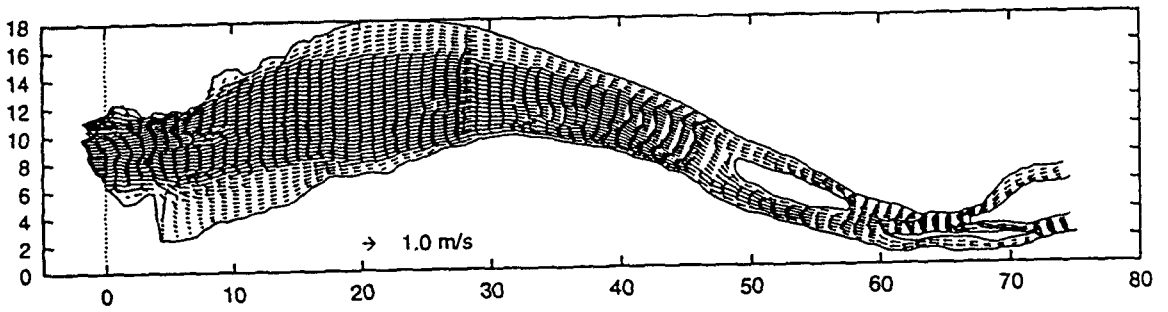


Fig.9 Fileds of velocity (at high tide after 3 hours)

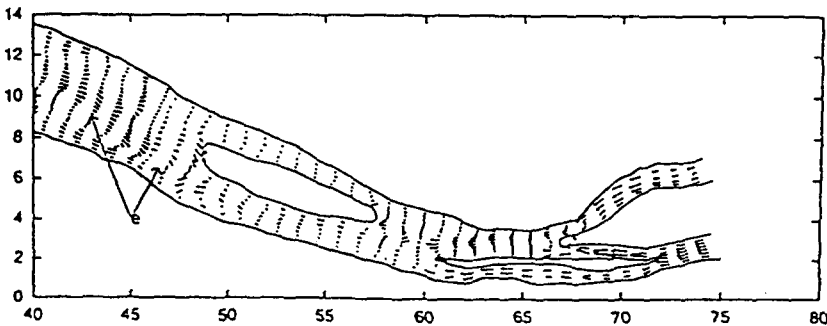
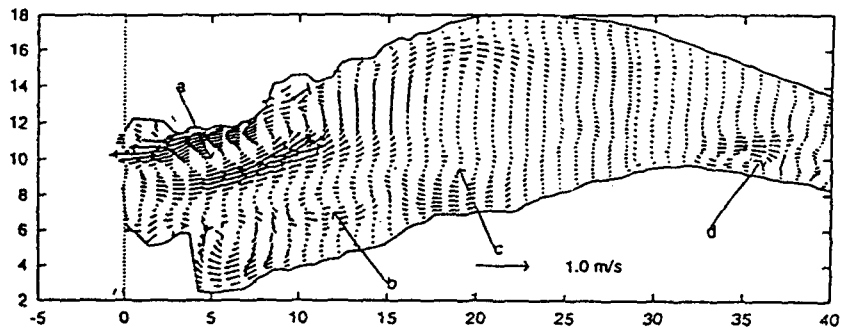


Fig.10 Eulerian residual Velocity(with sand bank)

- a)Marguerites b)Talais c)Richad d)St-Estephe
- e)Trompeloup

2) 외부 격자 점을 형성하기 위하여 Poisson 방정식을 이용한 Thompson[7] 방법의 격자 형성 방정식을 이용하였다,

그러므로 1)의 방법은 grid의 내부격자를 자유롭게 할 수 있고, 일반적으로 잘알려진 2)의 방법은 grid의 경계부근에서 격자를 쉽게 control 할 수 있기 때문에 이러한 방법을 이용하였다. Gironde강의 면적을 3개의 영역으로 나누었으며 첫 번째 영역은 2186 격자 점, 두 번째 영역은 925 격자 점, 세 번째 영역은 1037 격자 점이며 Fig.2와 같다

6. 응용

프랑스 남서쪽에 있는 Gironde강에 대한 수치 모사의 조건은,

- 1) 바람 과 온도의 영향은 무시 하였음
- 2) Chezy 상수 ; $C_h = 90, 60 \text{ m}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$
- 3) Coriolis (45°)
- 4) $\Delta t = 20 \text{ sec}$
- 5) Current Number = 2.4
- 6) 5일(120 시간) 동안의 유동에 대하여 계산

Gironde강의 수심 지도는 Bordeaux(SHPAB) 연구실에서 1984년도에 측정하여 제작 하였으며, 수심에 대한 측정치는 모든 격자점에 대하여 Interpolating 하였다. Fig.2는 2-D (x축 강의 길이 방향 약 80Km, Y축 강의 넓이 방향 약 6Km, Z축 방향으로는 수심)이다. 프랑스 전력 연구소(EDF)에서 1975년 5월 19일 부터 5월 24일까지 속도 와 파고를 측정하였으며, 측정 지점들은 Fig.3 에 나타내었다.

경계조건에 대하여, open boundary 는 transient 조건으로서 상류와 하류에서 파고 측정치를 1시간마다 주었고, 벽경계 부근에서는 Neumann 경계조건 을 사용 하였다.

또한,다중 영역 사이의 내부경계 조건은 Fig.1의 (x,y) 좌표처럼 다중 영역 사이의 엇갈린 좌표점을 이용하여 계산 하였다.

7. 결과 및 고찰

본 연구에서 개발하여 사용한 Source 코드는 참고문헌[1,2]에서 정확성, 엄격성, 계산의 효율성등을 증명하기 위하여 Benchmark Test (Cartesian geometry, Polar geometry, Surface waves propagation in a closed basin and Jet-forced flow in a circular reservoir) 등을 Test 하였으며 일반적으로 알려진 바와 같이 Residual 값은 10^{-7} 에

서 수렴됨을 보여주었다.

Fig.3의 A 군은 속도 측정 지점이고, B 군은 파고 측정 지점이다.

Model의 속도에 대한 측정치는 수심 밑바닥 1 m 와 표면 1 m 에서의 측정치이며 계산치와의 비교 결과는 Fig.4에 나타내었다.

파고의 측정치와 계산치의 결과는 10 % 이하의 진폭과 27분 이하의 위상의 차이를 보였으며, 파고에 관한 비교 결과는 Fig.5에 나타내었다

속도에서는 1 주기 당 12시간 25분 동안 밀물과 썰물이 이루어지고, Fig.6 과 Fig.7은 밀물의 시작과 3시간 이후의 상태이며, Fig.8는 썰물이 시작되는 상태이고 Fig.9는 썰물 3시간 이후의 상태이다.

또한 강하구 오른쪽에는 Saintonge라고 불리우는 운하와 왼쪽에는 Navigation 운하가 있고, 다른 곳 보다는 유동의 흐름이 항상 크다는 것을 알 수 있다.

Fig.6은 썰물이 시작되면서 속도장의 방향은 강하구에서 부터 20Km 정도까지 거슬러 올라가있으며, 강상류에서는 그와 반대 방향으로 유동이 내려오면서 물의순환이 불완전한 상태를 이루고 있다.

Fig.7은 Saintonge 에서 최대속도가 0.37 m/s 이고 Navigation 에서는 최대속도가 0.43 m/s 으로 나타났으며 그이후 3-4 시간에서 썰물의 최대 속도는 2.9 m/s로 나타났다.

Fig.8 밀물이 시작되는 상태이며 속도장은 바다쪽을 향하며 30-50 Km 사이에서는 물순환의 방향이 서로 반대가되어 불안정한 상태를 이루고 있다. 이때 강하구의 Saintonge 에서는 최대속도 -0.88m/s, Navigation 에서는 최대속도 0.69 m/s 나타났다.

Fig.9는 밀물 3시간 이후 강하구에서의 최대속도는 4.2m/s가 되었고, 전체적으로 속도장을 관찰하면 강밀의 지형에 따라서 속도장의 관계가 나타남을 알 수 있다.

그리고 Bordeaux(SHPAB) 연구실에서 측정된 강물의 순환속도는 밀물과 썰물이 시작된 이후 3-4 시간에 최대가되며 측정치와 계산치가 일치됨을 알수있다.

또한 Coriolis force 에 의한 강하구의 Saintonge 와 Navigation 운하에서 물 순환의 입출구의 교차가 잘 나타나 있다.

Fig.10의 Eulerian residual velocity는 5일 동안의 평균속도를 계산하였고, 그림과 같이 여러곳의 모래사장 주변에서 와류현상을 볼 수 있다 [4]. 그리고 모래사장 주변에서의 와류현상은 수심이 깊고 썰물일 경우 시계 반대방향으로 돌고, 수심이 얇을 경우 그와반대 방향이다. 밀물일때

는 썰물과 반대 방향으로 나타난다.

그러므로 강하구의 수심이 깊은 곳 Maguerites 와 Talais는 시계반대 방향으로 순환되고 나머지는 그반대 방향으로 나타났다.

그리고 강 상류에서의 1년간 평균유량 측정치는 $700 \text{ m}^3/\text{sec}$ 에서 $1000 \text{ m}^3/\text{sec}$ 이고, open boundary 조건에서 1시간마다 파고 측정값을 주므로써 속도를 알수있고, 강하류에서의 평균유량 계산치는 $813 \text{ m}^3/\text{sec}$ 임을 알수 있었다

8. 결 론

본 연구는 해안환경의 물리적인 현상을 Modelling하기 위하여 IMM 방법을 기본적인 알고리즘으로 이용한 비직교 곡선 좌표계를 사용하였고, FEM과 같은 방법으로 좌표계를 일반화하고, grid의 유연성을 위하여 Multi-Domain을 사용하였다.

이러한 방법을 사용한 결과, 직교 좌표계와 비교하여 확실하게 향상 되었음을 보여주었다. 특히 속도장에서 강물흐름의 과정을 정확하게 재구성 하였다.

참고문헌

- [1] Chae, H.S., [Modelisation numerique de la circulation en milieux cotiers et estuariens par la methode des matrices d'interpolation en coordonnees generalisees, These Dortora Unive. Caen. (1996), p.155.
- [2] Chae, H.S., *Numerical simulation estuaries and coastal by the interpolating matrix method.* The first Asian computational fluid dynamics conference Hong Kong (1995)
- [3] Cristove, C.I., *Numerical generation of adaptive canonical grids* The 2nd U.S.A. Congress on Computational Mechanics. Washington D.C. (1993)
- [4] Falconer R.A. and Owens P.H., *Numerical modelling of suspended sediment fluxes in estuarine waters.* Estuarine, coastal and shelf science Vol. 31. (1990) p.745-762.
- [5] Koshizuka, S. et al. *A finite difference method for arbitrary arrangement of mesh point* J. Comp. Phys. Vol. 75 (1988) p.444-468.
- [6] Kuipers J. and Vreugdenhil C.B., *Calculations of two dimensional horizontal flow.*, Rapport technique, Delft hydraulics laboratory(1973) J. res., rep. 5163, part I.
- [7] Thompson, J.F. and Zahir U.A. Warsi,

Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equation A review, J. of Comp. Phys. Vol. 47. (1982) P.1-108.