

복합재료 샌드위치 판의 고유 진동수에 대한 탄성보의 영향

이 봉 학* · 원 치 문** · 이 정 호*** 김 성 환****

The Influence on Elastic Beam for Natural Frequency of Composite Sandwich Plate

Lee, Bong-hak* · Won, Chi-moon** · Lee, Jung-ho*** · Kim, Seong-whan****

ABSTRACT

For each construction material used, there is certain theoretical limit in sizes. For tall building construction, the reduction in slab weight is the first step to take in order to break such size limits. In this paper, the feasibility of such objective is proven and given by numerical analysis result. For a typical building slab, both concrete and advanced composite sandwich panels are considered. The concrete slab is treated as a special orthotropic plate to obtain more accurate result. Any method may be used to obtain the deflection influence surfaces needed for this vibration analysis. Finite difference method is used for this purpose, in this paper. The influence of the modulus of the foundation on the natural frequency is thoroughly studied.

1. 서 론

모든 대형 구조물의 설계 및 건설에서 자중의 증가로 인하여 건설 비용은 많이 증가하게 된다. 또 모든 건설재료에는 이론적인 치수의 한계가 있다. 예를 들어 현수교나 사장교의 경우 강재를 사용할 때 이론적으로 가능한 최대 지간은 5000m~7000m이다. 이 수치는 강재를 사용하였을 때의 경우이다^[8]. 반면, 유리섬유 복합재료를 사용하면 이의 2배가 가능하고, 탄소 섬유 복합재료를 사용하면 이의 3배가 가능하다.

고층건물 설계·시공도 예외는 아니어서, 경량화를 하지 않는 한 층고의 한계에 부딪치거나 막대한 건설비의 증가를 초래하게 된다^[8].

이 문제의 해결을 위해 높은 비강성을 갖는 첨단 복합 재료가 사용되어야 함은 설명이 필요 없

다고 본다. 이럴 경우 치수효과를 고려한 강도 이론, 최적화 설계 및 제작 공정 등 연구되어야 할 과제가 많다. 또한 일반적으로 빌딩 슬래브는 그의 단부에서 보에 의해 지지되고 있으며 이와 같이 탄성보로 지지된 슬래브는 그 역학적 거동이 복잡하기 때문에 그의 해석에는 많은 어려움이 따른다. 지금까지의 해석 및 설계 방법은 지지보가 무한한 강성을 갖는다는 가정하에 단부에서의 지지조건을 고정·단순으로 하는 것이 일반적이었다. 그러나 실제적으로는 지지보와 판의 강성에 따라서 크게 달라지게 된다. 이 논문에서는 같은 활하중을 받고 있는 콘크리트 슬래브와 복합재료상판에 대하여 몇가지 형태의 무게비와 처짐비를 검토하고 강성과 지반 반력계수의 비의 변화에 따른 슬래브의 역학적 거동과 진동해석을 하고자 하였다. 정확한 해석을 위하여 탄성지지된 단부조건을 고려하고 진동해석시의 처짐은 오차 추정이 가능한 유한 차분법^[3,4,5,7]을 사용 하였다.

* 강원대학교 토목공학과 교수
** 한라공과대학 토목공학과 교수
*** 강원대학교 토목공학과 박사과정
**** 강원대학교 토목공학과 석사과정

2. 이 논문에 사용된 이론

2.1 유한 차분법

경계 조건이 단순지지일 경우 Navier 해법을 사용할 수 있다. 그러나 단순지지라 아니거나 변 단면 동일 경우는 쉽게 해결되지 않는다. 따라서 이 논문에서는 탄성보로 지지된 경우 처짐 영향계수를 구하기 위해 공학적으로 충분히 정확한 값을 얻을 수 있는 유한 차분법의^[3,4,5,7] 중심 차분을 이용하였다.

2.2 사용된 진동이론

이 논문에서 사용된 진동 이론은 1974년 임의의 단면과 경계조건을 갖는 보와 타+위 구조에 대한 진동 해석을 위하여 김^[1]에 의해 개발되었으며, 1989년 2차원 문제로 확장되어졌다^[2].

고유진동수 ω 를 구하기 위하여 다음의 과정이 취해진다. 어떤 몇 개의 점에서 최대 진폭이 임의로 주어진다.

$$w(i,j)(1) = W(i,j)(1). \quad (1)$$

여기서 (i,j)는 고려되는 점을 나타낸다. 이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한 (최대) 진폭에 대응하는 동적힘은

$$F(i,j)(1) = -m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \quad (2)$$

이다. 이 힘에 의해 일어나는 “새로운” 변위는 F의 함수이고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} w(i,j)(2) &= f \{ m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \} \\ &= \Delta(i,j,k,l) \{ -m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \} \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 Δ 는 처짐에 대한 영향계수이다. 공명상태하에서 구조부재의 모든 점에서 고려한 $w(i,j)(1)$ 과 $w(i,j)(2)$ 는 동일해야 하고 다음조건을 만족해야 한다.

$$w(i,j)(1)/w(i,j)(2) = 1. \quad (4)$$

이 방정식으로부터 (i,j) 점에서의 $\omega(i,j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만, 대부분의 경우에 일치하지 않는다.

구조부재의 고유진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로 $\omega(i,j)$ 의 충분한 같은 값이 모든

(i,j)점에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫번째 cycle의 계산에 의해 얻어진 $\omega(i,j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시 될 수 있다. 정확도는 최대와 최소치의 평균을 취하거나 또한 처짐이 최대인 곳에서 $\omega(i,j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다. 2번째 cycle의

$$w(i,j)(3) = f \{ m(i,j)[\omega(i,j)(2)]^2 w(i,j)(2) \} \quad (5)$$

에서 $w(i,j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다. Composite 구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 간단하지 않은 지지조건을 가진 판의 경우, 경계조건에 관계없이, 이 판을 몇개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리하다. 결과의 정확성은 처짐계산의 정확도에 비례한다^[6].

3. 수치 해석

3.1 유한 차분식의 정확도 분석

임의의 경계조건을 갖는 판에 대한 해석해가 없기 때문에 부득이하게 네변이 모두 단순지지 되었을 경우에 비교적 정확해로 알려진 Navier해법과 비교하였다.

고려된 특별직교이방성 적층판의 형상은 Fig. 1과 같으며, 물성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_1 &= 67.36 \text{ GPa}, \quad E_2 = 8.12 \text{ GPa}, \quad G_{12} = 3.0217 \text{ GPa}, \\ \nu_{12} &= 0.272, \quad \nu_{21} = 0.0328, \quad r = 1. \end{aligned}$$

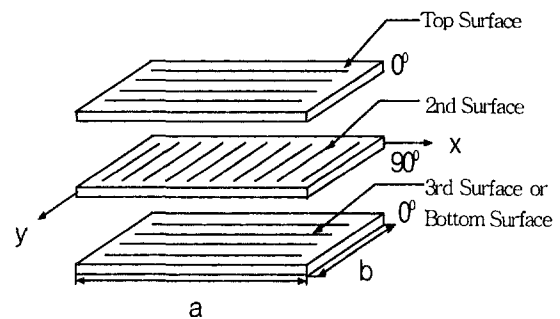


Fig. 1. $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ Special Orthotropic Laminated plate

여기에 등분포 활하중 1N/m^2 를 재하하여 각 점의 처짐값을 구하고 Navier 해와 비교하여 Table 1.에 나타내었다. 한 개의 ply두께는 0.000125m , 판의 형상은 $7.5\text{m} \times 6\text{m}$ 로 하였다. 요소를 10×10 으로 분할하여 계산한 후 (x,y)점의 처짐값을 비교하였다.

Table 1. Deflection Ratio of Navier to F.D.M
(10×10 mesh size)

		F. D. M/NAVIER				
X(m)	Y(m)	0.75	2.25	3.75	5.25	6.75
	0.6		1.005	1.003	1.003	1.003
1.8		1.001	0.9998	0.9994	0.9998	1.001
3.0		1.001	0.9993	0.9989	0.9993	1.001
4.2		1.001	0.9998	0.9994	0.9998	1.001
5.4		1.005	1.003	1.003	1.003	1.005

Table 1.에서 알 수 있듯이 최대 차이는 0.0011이다. 따라서 사용된 차분식은 최대 오차 $\Delta^2=(0.1)^2=0.01$ 보다 훨씬 작은 차이를 보인다. 오차의 허용 $\Delta^2=(0.1)^2 > 0.0011$ 이므로, 이 논문에 고려된 차분식은 매우 정확하다는 것을 확인할 수 있다.

3.2 구조해석 모형

수치해석에 이용된 대상 빌딩 슬래브는 특별직교 이방성 판으로 고려되었다(Fig. 2 참조). 철근 콘크리트 단면과 샌드위치 판의 형상은 각각 Fig. 3. 과 Fig. 4.와 같다.

복합재료의 인장 및 압축 강도는 콘크리트나 강재보다 훨씬 높으므로 비교대상은 처짐으로 하였다. 즉 철근 콘크리트와 동일하거나 작은 처짐을 일으키는 몇가지 샌드위치판을 선택하여 고려하였다.

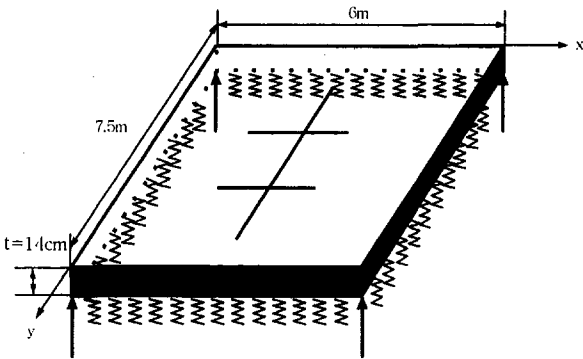


Fig 2. Configuration of Considered Plate.

길이는 7.5m이고 폭은 6m인 슬래브를 고려하였는데 각 모서리는 기둥에 지지되어 있고, 사변이 탄성지지 되었다고 가정하였다. 이때 지반 반력 계수 k는 슬래브 강성의 1배에서 99배 까지 변화

시켜 고려하였으며, 이때 하중은 일반 사무실 빌딩의 전형적인 점유하중인 2.4 kN/m²를 고려하였다.

철근 콘크리트 슬래브

$\sigma_{ck} = 210\text{kg/cm}^2 = 20.5942926\text{MPa}$, 콘크리트의 탄성계수 $E_c = 15000\sqrt{\sigma_{ck}} = 21.317118060\text{GPa}$, 프와송비는 $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.18$ 이고 콘크리트의 사하중은 $= 0.35\text{ t/m}^2 = 3430\text{Pa}$ 이다.

콘크리트 슬래브에서는 휨에 대한 인장 철근만 고려하였으며, 이때 시방서 규정에 근거한 종방향 철근과 횡방향 철근의 단위 폭당 철근의 배치를 Fig. 3.에 나타내었다.

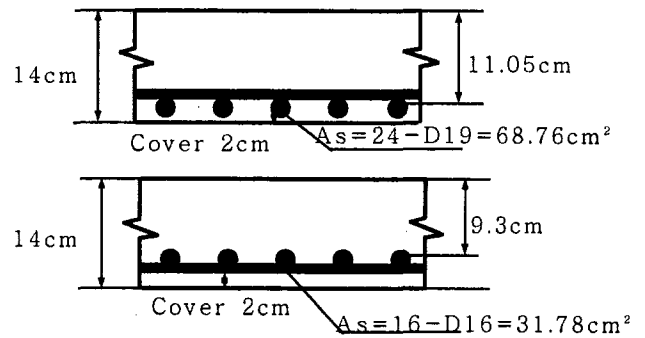


Fig 3. Cross Section of Concrete Slab with Unit Width

샌드위치 패널 슬래브

64kg/m³의 자중을 가지는 Form 코어를 사용하였으며, 상·하 [A, B, A]r 형태의 적층판을 사용하였다. 여기서 $A = 0^\circ$, 이고 $B = 90^\circ$ 이다. Fig. 4.는 샌드위치 패널의 형상을 나타낸다.

사용된 물성치는 프로그램 오차 계산시 사용된 물성과 같다. 샌드위치 판은 5가지 형태로 고려하였으며, 콘크리트 슬래브와 5개 형태의 샌드위치 패널 슬래브의 강성과 자중을 Table 2.에 나타내었다.

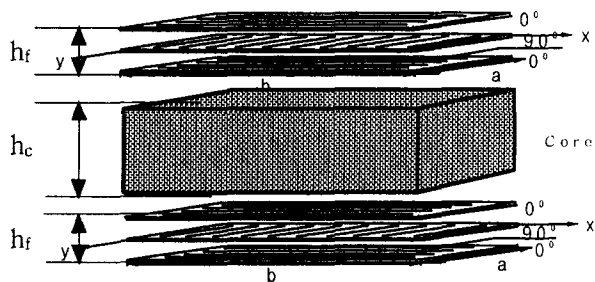


Fig.15 Configuration of Composite Sandwich Plate.

Table 2.에서 보여지는 계산된 휨강성 값들을 사용하여 사변 탄성 지지된 빌딩 슬래브의 처짐에 대한 영향면을 계산하고 김^[1,2)]의 방법으로 고유진동수를 계산하였다. 이때 하중은 자중과 일반 빌딩 사무실의 전형적인 점유하중인 2.4kN/m²을 고려하였으며, 기둥의 강성은 무한대로 하였다. 이 수치계산의 결과는 Table 3.~Table 5.에 나타내었다. k/D₁₁값은 1부터 99까지 변화 시켰으나, 이 논문에서는 경향을 파악할 수 있는 범위내에서 축소하여 나타내었다.

Table 2. Flexural Stiffness (Unit : N · m)

Type		Concrete	Sandwich panel				
Stiffness			Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5
Height (m)	h _c	0.14	0.4630	0.3550	0.2980	0.2620	0.2370
	h _f		0.0011	0.00185	0.00265	0.00335	0.00415
Weight (kg/m ²)	Core	350	29.632	22.72	19.072	16.768	15.168
	Face		4.29	7.215	10.335	13.065	16.185
D ₁₁		5381013.50	3502847.56	3451719.17	3429166.23	3435699.65	3466960.02
D ₂₂		2155713.75	2259821.97	2226836.81	2212286.77	2216501.47	2236668.48
D ₁₂		906163.38	264367.24	260508.46	258806.33	259299.41	261658.68
D ₆₆		2064038.75	501641.71	494319.60	491089.78	492025.41	496502.17

Table 3. Deflection at Center Slab

자중비	Concrete	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5
k/D ₁₁	1	10.29	11.65	11.94	11.69	11.20
1	0.2510E-01	0.1735E-01	0.1735E-01	0.1744E-01	0.1743E-01	0.1737E-01
5	0.1270E-01	0.1115E-01	0.1115E-01	0.1121E-01	0.1120E-01	0.1116E-01
11	0.1098E-01	0.1025E-01	0.1025E-01	0.1030E-01	0.1029E-01	0.1026E-01
21	0.1029E-01	0.9883E-02	0.9886E-02	0.9932E-02	0.9929E-02	0.9894E-02
51	0.9847E-02	0.9647E-02	0.9650E-02	0.9695E-02	0.9692E-02	0.9657E-02
99	0.9695E-02	0.9567E-02	0.9570E-02	0.9614E-02	0.9611E-02	0.9577E-02
4변 단순지지판	0.9545E-02	0.9493E-02	0.9478E-02	0.9540E-02	0.9537E-02	0.9503E-02

* 자중비=콘크리트 자중/샌드위치판 자중

Table 4. Deflection Ratio of Sandwich to Concrete. (sandwich/concrete)

자중비	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4	Type 5
k/D ₁₁	10.29	11.65	11.94	11.69	11.20
1	0.6889	0.6867	0.6884	0.6889	0.6873
5	0.7946	0.7932	0.7961	0.7961	0.7939
11	0.8457	0.8441	0.8473	0.8481	0.8449
21	0.8757	0.8749	0.8783	0.8792	0.8757
51	0.8968	0.8959	0.8995	0.8995	0.8959
99	0.9103	0.9099	0.9133	0.9133	0.9102

* 처짐비=샌드위치판 처짐/콘크리트판 처짐

* 자중비=콘크리트 자중/샌드위치판 자중

Table 3은 콘크리트 슬래브와 샌드위치 판의 중앙점에서 처짐값으로써 이해를 돕기 위해 그래프로 Fig.5~Fig.10에 나타내었다.

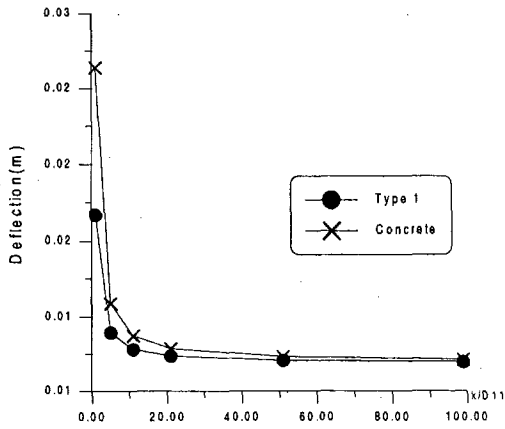


Fig. 5. Deflection at Center Slab(Type 1)

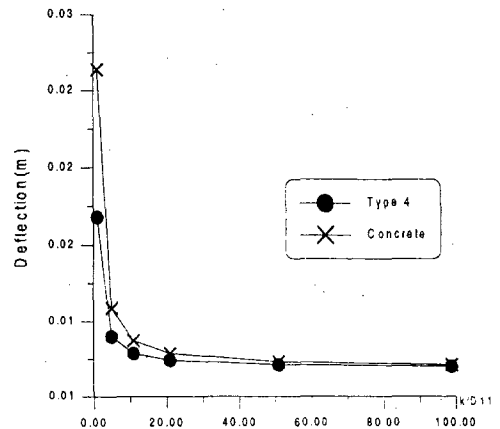


Fig. 8. Deflection at Center Slab(Type 4)

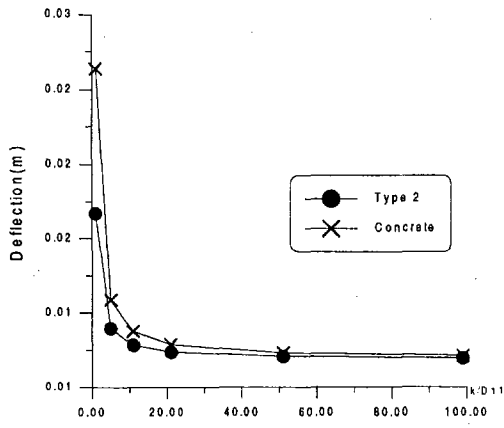


Fig. 6. Deflection at Center Slab(Type 2)

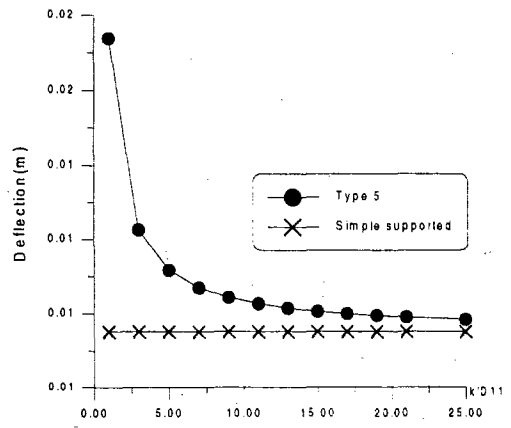


Fig. 9. Deflection at Center Slab(Type 5)

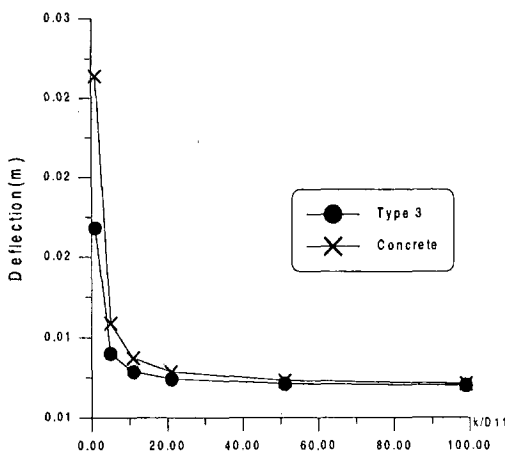


Fig. 7. Deflection at Center Slab(Type 3)

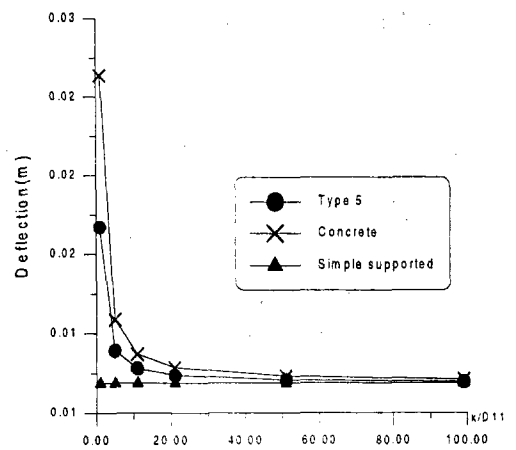


Fig. 10. Deflection at Center Slab(Type 5)

Table 5. Natural Frequency (Unit : rad/sec)

Type k/D ₁₁	Concrete	Type1	Type2	Type3	Type4	Type5
1	0.5661E+01	0.6107E+01	0.6122E+01	0.6108E+01	0.6109E+01	0.6120E+01
5	0.6573E+01	0.7835E+01	0.7868E+01	0.7850E+01	0.7851E+01	0.7865E+01
11	0.7023E+01	0.8200E+01	0.8238E+01	0.8219E+01	0.8220E+01	0.8235E+01
21	0.7112E+01	0.8358E+01	0.8398E+01	0.8378E+01	0.8380E+01	0.8395E+01
51	0.7171E+01	0.8464E+01	0.8505E+01	0.8486E+01	0.8487E+01	0.8502E+01
99	0.7191E+01	0.8500E+01	0.8542E+01	0.8523E+01	0.8524E+01	0.8539E+01

Table 6. Natural Frequency Ratio(concrete/sandwich)

Type k/D ₁₁	Type1	Type2	Type3	Type4	Type5
1	0.9270	0.9247	0.9268	0.9267	0.9250
5	0.8389	0.8354	0.8373	0.8372	0.8357
11	0.8565	0.8525	0.8545	0.8544	0.8510
21	0.8509	0.8469	0.8489	0.8487	0.8472
51	0.8472	0.8432	0.8450	0.8449	0.8434
99	0.8460	0.8418	0.8437	0.8436	0.8421

Table 5는 콘크리트 슬래브와 샌드위치 판의 고유 진동수 값이며 각각의 경향을 Fig. 11.~Fig. 14.에 표시하였다.

복합재료의 인장 및 압축 강도는 콘크리트에 비해서 월등히 강하므로, 상판의 재하능력 비교는 변위로 평가되었다. Table 3.은 단순지지된 즉, $k=\infty$ 인 경우에 대한 Navier해와 본 논문의 정확한 해를 비교하면 슬래브의 강성-지반강성계수의 상대적인 값(k/D_{11})에 대한 처짐 값은 1.0~10.0 사이에서 최소 45.3%에서 최대 61.9%의 큰 오차를 보인다. Table 4.를 보면 샌드위치 상판의 무게가 콘크리트 무게의 1/10 이하이지만 모든 형태의 것의 처짐은 모든 k/D_{11} 값의 경우에 콘크리트의 처짐보다 작거나 같다. Table 5.~ Table 6.과 Fig. 11.~ Fig. 14.를 보면, 모든 형태의 샌드위치 판의 고유 진동수가 모든 k/D_{11} 값의 경우에 콘크리트의 값 보다 크다. 이것은 고려된 모든 형태의 샌드위치 판이 콘크리트 판보다 높은 강성을 갖고 있음을 의미한다.

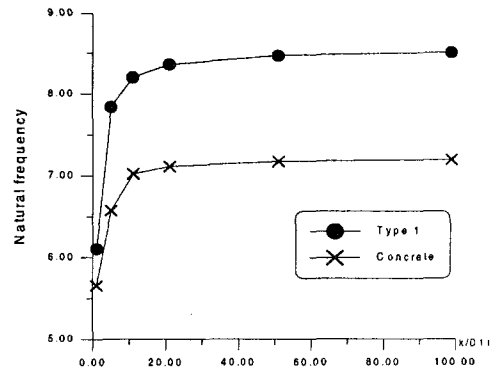


Fig. 11. Natural Frequency of Slab

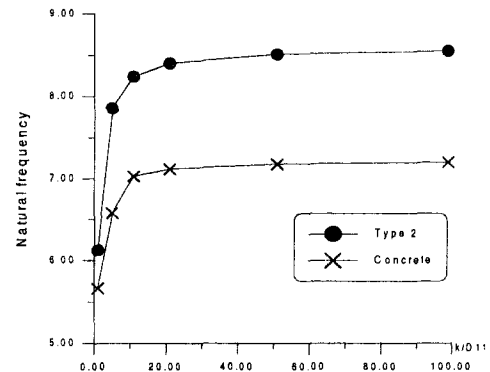


Fig. 12. Natural Frequency of Slab

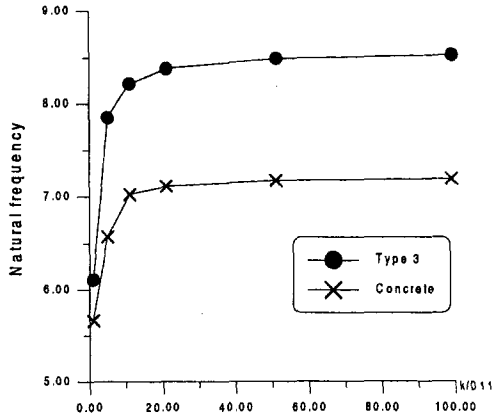


Fig. 13. Natural Frequency of Slab

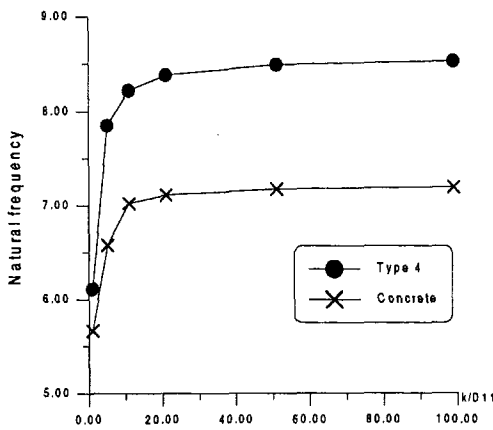


Fig. 14. Natural Frequency of Slab

5. 결 론

이 논문에서는 건물의 대표적 상판 크기를 고려하고, 다섯 가지 형태의 콘크리트 상판과 복합재료 샌드위치 판을 고려하여 슬래브의 강성-기초탄성 계수의 상대적인 값(k/D_{11})을 변화 시켜 슬래브에 미치는 영향을 알아 본 결과 다음과 같은 결론을 도출하였다.

슬래브의 거동에 대한, 슬래브의 강성-기초탄성 계수의 상대적인 값(k/D_{11})의 영향을 고려한 처짐값을, 사변단순지지, 즉 $w=0$ 인 경우와 비교해본 결과, k/D_{11} 의 크기에 따라 큰 오차가 있을 수 있으므로 허용 오차가 넘는 경우 판의 해석은 탄성 지지로 고려해야 한다고 판단 되었다.

시방서에 의한 활하중 $2.4kN/m^2$ 이 작용할 때, 샌드위치 판의 변위가 콘크리트 판의 변위 보다 작고, 고유 진동수는 콘크리트의 것보다 크다는 것을 알 수 있었다. 즉, 샌드위치 판이 콘크리트 보다 상대적으로 높은 비 강성을 가짐을 알 수 있었

다.

복합재료의 인장 및 압축 강도가 콘크리트와는 비교할 수 없게 높다는 것을 염두에 두면 적은 변위, 높은 진동수는 선택된 샌드위치판이 콘크리트 판보다 구조적으로 강함을 나타낸다. 즉 복합재료를 이용하면 콘크리트 무게보다 훨씬 가볍게 하면서도 강한 구조물 설계가 가능하다고 보여진다.

6. 참고 문헌

- [1] Kim Duk Hyun, "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Members", 제 1차 산업기지 건설을 위한 국제회의, 서울, 1974, 10.
- [2] Kim Duk Hyun. "A Simplified Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Elements," First Japan International Symposium of the Society for the Advancement of Materials and Process Engineering (JISSE I), Tokyo, December, 1989.
- [3] Kim, D. H., "Analysis of Triangularly Folded Plate Roofs of Umbrella Type," 16th, Congress of Applied Mechanics, Tokyo, Japan, 1966. 10. 19.
- [4] Kim D. H., "The Effect of Neglecting the Radial Moment Terms in Analyzing a Finite Sectorial Plate by Means of Finite Differences," International Symposium on Space Technology and Sciences, Tokyo, Japan, 1967. 5.
- [5] 김덕현, "電子計算器에 의한 超大型 Matrix의 解法," 大韓土木學會誌, 15卷 1號, 1967
- [6] Kim D. H., *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E&FN SPON, Chapman & Hall, London, 1995.
- [7] 沈度植, "特別直交 異邦性 複合板 理論에 의한 連續 콘크리트 슬래브橋의 自由振動 解析", 江原大學校 博士學位 論文, 1997. 8
- [8] 김덕현, 심도식, 김성환, "고층 건물 경량화를 위한 첨단 복합재료 상판", 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 제 10권 제 2집, 1997.