

## 잡음에 의해 손상된 유한 구간 정현파 추정치의 해상도 개선책

### Empoving the resolution of the finite-length sinusoids burried in noise

신 윤 기\*  
(Yoon-Ki Shin\*)

#### 요 약

신호 처리 분야에서 정현파는 단순한 하나의 파형이라는 점을 넘어서 그 속에는 여러 가지 정보를 내포하고 있는 경우가 많다. 그러나 신호를 수집하는 센서의 개수가 제한됨에 따라 얻을 수 있는 정현파 표본값이 유한하며, 또한 센서에 의해 검출된 잡음의 영향 등으로 인하여 정현파의 추정 주파수에 대한 해상도가 매우 열악하게 되는 경우가 많다. 본 연구에서는 이와 같이 잡음에 의해 손상되었을 뿐 아니라, 표본 개수가 적음으로써 매우 열악해진 주파수 추정 해상도를 크게 증가시킬 수 있는 방법을 제안하고자 한다.

#### ABSTRACT

In the signal processing fields, sinusoidal wave is of much meaning because it may carry other important informations. But in reality due to the finite number of sensors along with the noise detected by the sensors, the resolution of frequency detection is in general much degraded. In this paper, new method is proposed to emprove the frequency resolution of the finite-length sinusoids burried in noise.

#### I. 서 론

정현파가 단순한 파형의 의미를 넘어서 그 안에 매우 중요한 정보를 포함하고 있음을 다음의 그림 1과 같이 균일한 간격으로 배열된 센서 배열을 통하여 생각해보도록 한다. 그림 1의 공간을 통하여 전파되어온 신호  $s(t)$ 는 일정한 위상차를 가지고 각 센서에 의해 검파될 것이다. 즉 각 센서에 의해 검출된 신호를  $x_k=0, 1, \dots, N-1$ 이라 하고  $s(t)$ 의 중심 주파수를  $f_0$ 라 하면,  $x_k(t)$ 의 푸리에 변환  $X_k(f)$ 에서 주파수  $f_0$ 의 성분  $X_k(f_0)$ 는 다음과 같은 관계를 가지게 될 것이다.

$$X_k(f_0) = S(f_0) \exp(-j2\pi \frac{d \sin(\theta)}{C} f_0 \cdot k), k=0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

여기서  $S(f_0)$ 는  $s(t)$ 의 푸리에 변환을 의미하며,  $\theta$ 는 신호의 입사각을 나타내며  $d$ 는 센서간의 간격을,  $C$ 는 신호의 전파 속도를 각각 나타낸다. 식 (1)에서

$$\Omega_k = -2\pi \frac{d \sin(\theta)}{C} f_0 \quad (2)$$

와 같이 정의하면, 각 센서 신호의 동일한 주파수 성분은

공간 영역상에서 각주파수  $\Omega_k$ 를 갖는 복소 정현파를 형성함을 알 수 있다. 즉

$$X_k(f_0) = S(f_0) \exp(j\Omega_k \cdot k), k=0, 1, \dots, N-1 \quad (3)$$

와 같이 진폭 페이저(amplitude phasor)가  $S(f_0)$ 이며 주파수가  $\Omega_k$ 인  $N-1$ 개의 표본을 갖는 복소 정현파를 형성한다. 각주파수  $\Omega_k$ 는 센서 배열을 따라 공간상에서 형성되므로 공간 주파수(spatial frequency)라 하며, 식 (2)에서 나타난 바와 같이 입사 방향  $\theta$ 에 대한 정보를 가지고 있는 것이다. 센서에 유기되는 잡음을 고려하면 식 (3)은 다음과 같이 표현된다.

$$X_k(f_0) = S(f_0) \exp(j\Omega_k \cdot k) + n_k \exp(j\phi_k), k=0, 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

여기서  $n_k$ 는  $k$ 번째 센서에 유기된 잡음의 주파수  $f_0$  성분 크기를 나타내는 랜덤 변수이며,  $\phi_k$ 는 위상을 나타내는 랜덤 변수이다.

이와 같이 센서 배열에 의해 형성된 공간 주파수 스펙트럼을 분석하여 특정한 정보를 추출하는 방법은 여러 가지 중요한 분야에서 응용되고 있다. 즉 그림 1에서 예를 든 방위각 추정(Bearing estimation)[1, 2]이나 레이더나 능동 소나에서는 공중이나 수중이라는 매질을 통하여 특정 신호를 放射시킨 다음, 표적물에 반사되어 다시 회수

\*대전대학교 전자공학과  
접수일자: 1997년 6월 16일

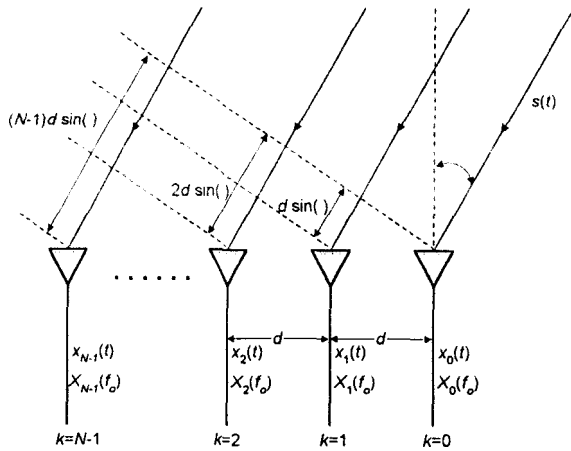


그림 1. 센서 배열  
Fig 1. Sensor array

된 각 센서 신호간의 시간 지연을 추정함으로써 표적의 방향과 거리를 측정할 수 있는 시간 지연 추정(time delay estimation)이 있으며[3], 최근 레이더에서는 안테나 자체를 기계적으로 전방위로 회전시키면서 표적을 탐지하고 추적하는 제레식 방법 대신에 배열 안테나를 이용하여 동시에 많은 수의 표적을 고속으로 탐지하고 추적할 수 있는 phased array radar에 대해 많은 연구가 진행되고 있는 등[4] 그 용도가 매우 중요하다.

그러나 레이더나 소나 등에서는 다경로(multipath) 현상으로 인하여 마치 여러 방향에서 표적이 있는 것처럼 유사 침투치(spurious peak)가 존재할 수 있으며, 거울 현상(mirror image)과 같이 엉뚱한 방향으로 빔이 형성될 수 있다. 이 외에도 수집되는 공간상 정현파의 표본 개수가 적거나 잡음의 영향등으로 해상도가 크게 감소할 수 있다. 이러한 여러 가지 환경적인 제약하에서 정확한 스펙트럼을 추정하는 고차원의 방법들이 많이 제시되고 있다[1, 5].

일반적으로 스펙트럼 분석의 평가 기준은 다음의 세가지로 분류된다. 첫째는 分解能(resolution)으로서 매우 인접한 두 주파수를 구별할 수 있는 능력을 나타내며, 둘째는 추정된 스펙트럼의 정확도를 판단하는 추정 오차(estimate bias)가 있다. 세 번째로는 변화성(variability) 또는 일관성(consistency)로서 추정된 스펙트럼의 침투치들이 데이터에 따라 변동하는 정도를 나타낸다.

본 연구의 주안점은, 센서 배열을 통하여 구한 공간상의 정현파를 특수한 방법을 통하여 사전 처리함으로써 유한 구간의 정현파 표본 개수를 크게 늘릴 수 있을 뿐만 아니라, 동시에 잡음의 영향을 크게 감소시킴으로써 위의 세가지 분석 평가 기준을 만족시킬 수 있는 매우 안정되고 정확한 스펙트럼 추정 방법을 소개하고자 하는데 있다.

## II. 外挿을 통한 유한 구간 정현파의 확장과 잡음 제거를 위한 사전 처리

공간 스펙트럼을 분석하기 위한 알고리즘들 중에서 periodogram등과 같은 고전적인 방법은 알고리즘이 비교적 간단한 반면에 주파수 해상도가 매우 낮다. 그러나 고해상도를 얻을 수 있는 알고리즘들에서도 MV(minimum variance) 방법은 수집된 데이터의 자기 상관 행렬에 대한 역행렬이 요구되며, LP(Linear Prediction) 방법은 해상도를 높이기 위해 예측 차수를 늘리게 되면 이에 비례하여 유사 침투치들이 형성되며, 고유치 분해(Eigenvalue decomposition) 방법에서는 해상도는 좋으나 고유치의 취사선택 과정에서 입사 신호의 개수에 대한 사전 지식이 필요하고 계산이 복잡하다는 단점이 있다. 이와 같이 기존의 알고리즘들은 이미 주어진 자료를 바탕으로 해서 해상도의 개선시키기 때문에 한계가 있는 것이다. 본 연구에서는 특수한 방법을 통하여 주어진 자료를 사전 처리함으로써 매우 개선된 자료를 얻을 수 있으며 이를 바탕으로 기존의 고해상도 알고리즘을 이용하면 대폭 개선된 스펙트럼 분석 능력을 얻을 수 있는 방법에 대해 설명한다.

$N$ 개 유한한 표본을 갖는 복소 정현파  $x_N(k) = A \exp(j\Omega_0 k + \phi)$ 는 무한한 길이의 동일 복소 정현파를 길이  $N$ 의 사각 창함수(rectangular window)로 곱한 것과 같으므로

$$x_N(k) = \{ A \exp(j\Omega_0 k + \phi) + n(k) \} \cdot w_N(k) \quad (5)$$

$$w_N(k) = 1, 0 \leq k \leq N-1 \\ = 0, \text{ otherwise} \quad (6)$$

로 표현할 수 있다. 식 (5)에서  $n(k)$ 는 잡음을 나타낸다. 시간 영역상의 곱셈은 주파수 영역상의 컨볼루션 효과와 같으므로  $x_N(k)$ 의 디지털 푸리에 변환(이하 푸리에 변환)  $X_N(\Omega)$ 는

$$X_N(\Omega) = F\{x_N(k)\} = F\{A \exp(j\Omega_0 k)\} * F\{w_N(k)\} + F\{n(k)\} \\ = A \delta(\Omega - \Omega_0) * W_N(\Omega) + \eta(\Omega) \quad (7) \\ = W_N(\Omega - \Omega_0) + \eta(\Omega)$$

으로 주어진다.  $W_N(\Omega)$ 는 길이  $N$ 의 사각 창함수의 디지털 푸리에 변환이므로

$$W_N(\Omega) = \frac{\sin \Omega (N/2)}{\sin (\Omega/2)} \exp \left( -j\Omega \frac{N-1}{2} \right) \quad (8)$$

이며,  $\eta(\Omega)$ 는 잡음  $n(k)$ 의 푸리에 변환이다.  $W_N(\Omega)$ 의 주엽(main lobe)폭은  $N$ 에 반비례하므로 데이터의 개수  $N$ 이 작을수록  $X_N(\Omega)$ 의 주엽의 폭은 증가하며 이로 인해 주파수의 해상도가 떨어지게 된다. 본 연구에서는 다음과 같은 단계를 거쳐 식 (5)에서 데이터 길이  $N$ 을 대폭 증가

시킨다.

차후에 그 필요성이 설명되지만, 식 (5)에서 먼저 위상  $\psi$ 의 효과를 없애기 위해  $x_N(k)$ 의 자기 상관 함수  $r_N(m)$ 을

$$r_N(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{k=0}^{N-1-m} x_N(k+n) \cdot x_N(k)^*, \text{ for } 0 \leq m \leq N-1$$

$$= \frac{1}{N-|m|} \sum_{k=0}^{N-1-|m|} x_N(k+m) \cdot x_N(k)^*, \text{ for } -N+1 \leq m \leq 0$$

(9)

와 같이 구한다. 여기서 잡음  $n(k)$ 가 백색 잡음이며, 복소 정현파와 상관도가 없다고 가정하면 식 (9)의  $r_N(m)$ 은

$$r_N(m) = A^2 \exp(j\Omega_0 m) + A_n \delta(m), \quad -N+1 \leq m \leq N-1 \quad (10)$$

로 표현되며  $r_N(m)$ 은 길이  $2N-1$ 의 길이를 갖는다. 식 (10)에서는 위상  $\psi$ 의 효과가 제거된다.

다음으로 기존의 Hanning, Hamming, Gaussian 등의 창함수들로부터 적절한 창함수를 선택하여 다음과 같이 수정하여 새로운 창함수  $h_N(m)$ 을 정의한다.

$$h_N(m) = w_N(m), \quad 1 \leq m \leq N-1$$

$$= 0, \quad -N+1 \leq m \leq 0$$

(11)

$w_N(m)$ 은 길이  $2N-1$ 을 갖는 기존의 창함수들 중의 하나이다. 본 논문에서는 여러 가지 조건상 Hanning 창함수를 이용하였다. 새로운 창  $h_N(m)$ 을 식 (10)의 자기 상관 함수와 곱한 다음 푸리에 변환을 하면

$$R_N(\Omega) = F\{r_N(m) \cdot h_N(m)\}$$

$$= F\{A^2 \exp(j\Omega_0 m) \cdot h_N(m)\} + F\{A_n \delta(m) \cdot h_N(m)\} \quad (12)$$

$$= A^2 H_N(\Omega - \Omega_0) + A_n h_N(0)$$

와 같이 표현된다. 여기서  $H_N(\Omega)$ 는  $h_N(m)$ 의 푸리에 변환을 의미하며,  $A_n h_N(0)$ 는 잡음  $n(k)$ 가  $R_N(\Omega)$ 의 주파수 성분에 미치는 영향을 나타낸다. 그러나 식 (11)에서 정한 바와 같이  $h_N(0)=0$ 이므로 백색 잡음에 의한 영향은  $A_n h_N(0)=0$ 이 된다. 주파수 영역상에서  $H_N(\Omega)$ 을  $\Omega_0$ 만큼 이동한  $H_N(\Omega - \Omega_0)$ 의 실수부와 허수부를 각각  $Q_r(\Omega)$ ,  $Q_i(\Omega)$ 로 정의하면

$$Q_r(\Omega) = A^2 \text{Real}\{H_N(\Omega - \Omega_0)\} \quad (13-a)$$

$$Q_i(\Omega) = A^2 \text{Imag}\{H_N(\Omega - \Omega_0)\} \quad (13-b)$$

와 같다. 이제 식 (13)의  $Q_r(\Omega)$ ,  $Q_i(\Omega)$ 의 유용성을 그림으로 도시하면 그림 2와 같다. 그림 2는  $N=5, \Omega_0=0$ 일 때를 예로 들어서  $Q_r(\Omega)$ ,  $Q_i(\Omega)$ 을 최대 크기 1로 정규화시킨 그림이다.

$Q_r(\Omega)$ 의 특징은 주파수 0를 중심으로 우함수 형태를 이룬다는 것이며,  $Q_i(\Omega)$ 의 특징은 주파수 0를 중심으로 기함수를 이루며 평균값이 0이라는 점이다. 여기서  $h_N(0)$

는 우함수인  $Q_r(\Omega)$ 의 평균값을 결정하지만 식 (11)에서  $h_N(0)=0$ 으로 하였으므로  $Q_r(\Omega)$ 의 주엽 부근을 제외한 나머지 부분의 값은 모두 0보다 작은 음의 값을 가짐을 알 수 있다. 따라서  $Q_r(\Omega)$ 가 음의 값을 갖는 주파수 성분은 일단 스펙트럼 추정에서 제외할 수 있는 하나의 판단이 된다. 이 점을 이용하기 위하여 식 (11)에서  $h_N(0)=0$ 으로 하였다. 이외에도 식 (12)가 나타내는 바와 같이  $h_N(0)=0$ 으로 함으로써 잡음이 미치는 영향을 크게 완화시킬 수 있다.

다음으로 그림 2에서 굵은선으로 표시된 창을 고려해 보자. 이 창에 포함되는 주파수 성분들은 모두  $|Q_i(\Omega)|/Q_r(\Omega) \leq 1$ 의 관계를 만족함을 알 수 있다. 만일  $|Q_i(\Omega)|/Q_r(\Omega) \leq \alpha, 0 < \alpha < 1$ 로 하면 이를 만족시키는 주파수 성분들은  $\alpha=1$ 인 경우에 비해 더욱 협소한 창을 형성할 것이다. 끝으로 한가지 더 이용할 수 있는 점은  $|Q_i(\Omega)|/Q_r(\Omega) \leq \alpha, 0 < \alpha < 1$ 을 만족하는 주파수 성분들의  $Q_i(\Omega)$ 는 모두 단조 감소함수라는 것이다.

잡음  $n(k)$ 가 이상적인 백색 잡음이라고 가정하면 잡음이  $R_N(\Omega)$ 의 주파수 성분에 미치는 영향인  $A_n h_N(0)$ 은 무시된다.  $Q_r(\Omega)$ ,  $Q_i(\Omega)$ 를 표본화한 함수를 각각

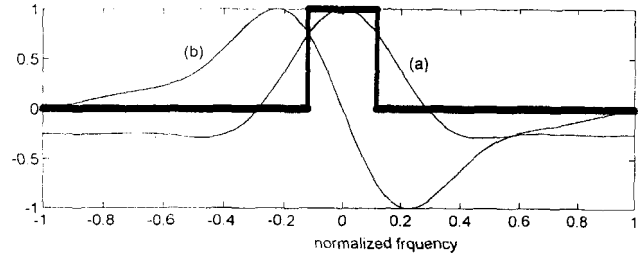


그림 2. 정규화한 (a)  $Q_r(\Omega)$  (b)  $Q_i(\Omega)$  ( $N=5, \Omega_0=0$ )  
Fig. 2. Normalized (a)  $Q_r(\Omega)$  (b)  $Q_i(\Omega)$  ( $N=5, \Omega_0=0$ )

$$Q_r(n) \equiv Q_r(n \Delta\Omega), \quad Q_i(n) \equiv Q_i(n \Delta\Omega) \quad (14)$$

와 같이 정의하며 여기서  $\Delta\Omega$ 는  $\Omega$ 의 표본화 간격을 의미한다. 또한  $Q_r(n)$ ,  $Q_i(n)$ 을 각각 최대치가 1이 되도록 정규화한 함수를  $\underline{Q}_r(n)$ ,  $\underline{Q}_i(n)$ 으로 한다. 추정하고자 하는 미지의 주파수  $\Omega_0$ 를 중심으로 하는 협대역의 창을 위의 세가지 원리를 이용하여  $\underline{Q}_r(n)$ ,  $\underline{Q}_i(n)$ 로부터 다음과 같은 방법으로 형성시킬 수 있다.

$$SW(n) = 1, \text{ if } \underline{Q}_r(n) > \beta \text{ and } |\underline{Q}_i(n)|/\underline{Q}_r(n) < \alpha$$

$$\text{and } \underline{Q}_i(n-1) > \underline{Q}_i(n+1)$$

$$= 0, \text{ otherwise} \quad (15)$$

여기서  $0 < \alpha < 1$ 의 값이며,  $\beta > 0$ 으로 한다. 위의 식 (15)를 이용하면 식 (5)의 푸리에 변환인 식 (7)에서 미지의

주파수  $\Omega_0$ 를 중심으로 협대역의 사각 창함수  $SW(n)$ 가 자동적으로 형성된다. 따라서 식 (7)에서  $X_N(\Omega)$ 의 표본 함수를  $X_N(n) \equiv X_N(n\Delta\Omega)$ 라 하면,  $X_N(n)$ 과  $SW(n)$ 를 곱하여 얻은 함수를 역푸리에 변환하여 새로운 데이터  $x_{new}(k)$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$x_{new}(k) = F^{-1} \{ SW(n) \cdot X_N(n) \} \quad (16)$$

본 연구의 핵심은, 유한한 길이의 데이터  $x_N(k)$ 로부터 식 (15)를 이용하여 새로이 형성된  $x_{new}$ 의 특성에 있다.

먼저 주파수 영역상에서 식 (15)에 의해 중심 주파수를 중심으로 자동 형성된 창  $SW(n)$ 의 기능에 대해 알아보자.  $SW(n)$ 는 그림 2에서 도시한 바와 같이, 추정하고자 하는 정현파의 주파수를 중심으로 하는 협대역의 이상적인 대역 통과 필터 기능을 갖고있음을 알 수 있다. 따라서 대역 밖의 주파수 성분들은 모두 완전히 여파됨으로써 잡음 제거 기능을 하게 된다. 그 다음으로 중요한 기능은, 유한한 구간  $N$ 의  $x_N(k)$ 를 外插(extrapolation)시킴으로써 데이터의 구간을 매우 넓게 확장시키는데 있다. 즉 식 (16)으로부터  $x_N(k)$ 와  $x_{new}(k)$ 의 관계는

$$\begin{aligned} x_{new}(k) &= F^{-1} \{ SW(n) \cdot X_N(n) \} \\ &= F^{-1} \{ SW(n) \} \cdot F^{-1} \{ X_N(n) \} \\ &= F^{-1} \{ SW(n) \} \cdot x_N(k) \end{aligned} \quad (17)$$

와 같으며,  $SW(n)$ 는 정현파 주파수  $\Omega_0$ 를 중심으로하는 이상적인 대역 통과 필터이므로 그 대역폭을  $B(\text{rad})$ 라 하면

$$F^{-1} \{ SW(n) \} = \left[ \frac{\sin\left(\frac{B}{2}t\right)}{\pi t} \right] \exp(j\Omega_0 k) \quad (18)$$

와 같이 Sinc 함수와 복소 정현파의 곱이 되며,  $SW(n)$ 의 대역폭  $B$ 가 좁을수록 Sinc 함수의 주엽의 폭이 반비례하여 증가한다. 따라서 이와 컨볼루션된  $x_N(k)$ 는 매우 확장된 길이를 갖게되는 것이다. 이상으로 식 (15)에 의해 정현파의 주파수를 중심으로 형성된 협대역의 이상적인 대역 통과 필터인  $SW(n)$ 은

첫째, 대역통과 필터로서  $x_N(k)$ 의 잡음을 대폭 제거하는 잡음제거 기능과 둘째,  $x_N(k)$ 을 Sinc 함수를 통해 외삽시킴으로써  $x_N(k)$ 의 유한한 길이를 대폭 확장시키는 외삽 기능을 갖는다. 따라서  $x_{new}(k)$ 는 잡음이 대폭 제거되고, 길이가 대폭 확장된 새로운 양질의 데이터가 되는 것이다. 이와 같은 성질의  $x_{Nnew}(k)$ 를 이용하여 여러 가지의 고해상도 알고리즘을 사용하면 스펙트럼 분해능이 매우 뛰어난 결과를 얻을 수 있는 것이다. 이와 같이  $SW(n)$ 을 형성함에 있어서 식 (10)의  $r_N(m)$  대신에 식 (5)의  $x_N(k)$ 를 사용하면

$$\begin{aligned} F\{x_N(k) \cdot h_N(k)\} &= F\{A \exp(j\Omega_0 k + j\psi) \cdot h_N(m)\} + F\{n(k) \cdot h_N(m)\} \\ &= A H_N(\Omega - \Omega_0) \cdot \exp(j\psi) + F\{n(k) \cdot h_N(m)\} \\ &= A \{Q_r(n) + jQ_i(n)\} \cdot \exp(j\psi) + F\{n(k) \cdot h_N(m)\} \end{aligned} \quad (19)$$

와 같이 되므로, 랜덤 위상  $\psi$ 의 영향으로 그림 1과 같은 실수부와 허수부 형태를 얻을 수 없을 뿐 아니라, 잡음(식 (19)의 밑줄 부분)의 영향도 제거되지 않는다. 따라서  $SW(n)$ 은 자기 상관 함수  $r_N(m)$ 을 이용하여 형성시켜야 함을 알 수 있다.

### III. 첫번째 제안 알고리즘

다음의 그림 3은, 식 (15)에 의해 창  $SW(n)$ 을 형성하고 이를 바탕으로  $x_{new}(k)$ 를 얻은 다음,  $x_{new}(k)$ 를 사용하여 LP 방법으로 스펙트럼을 추정하는 과정을 나타내는 흐름도이다. 모든 푸리에 및 역푸리에 변환은 1024-point FFT로서 수행하였으며, 고해상도 알고리즘으로는 LP 방법을 채택하였다. 그림 3에서 점선으로 표시된 흐름은 기존의 LP 방법이다.

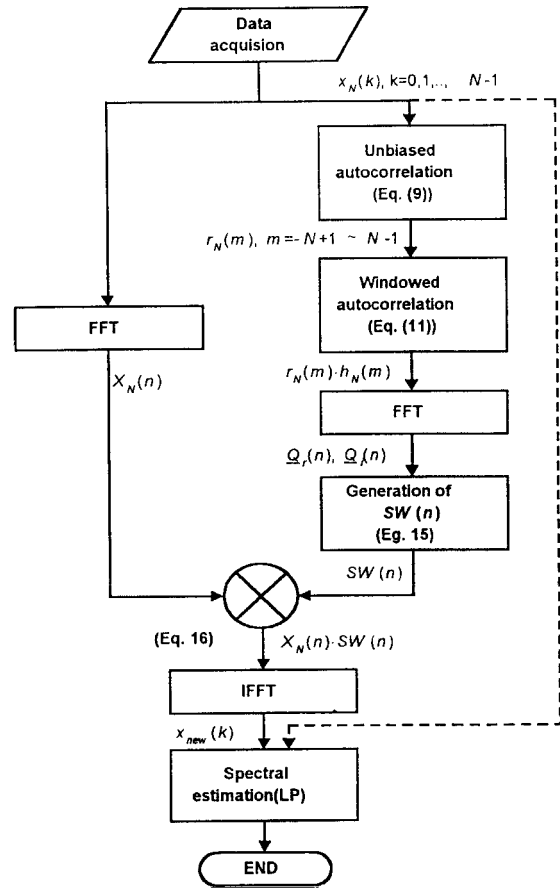


그림 3. 첫번째 제안 알고리즘의 흐름도.  
Fig. 3. Flowchart of the proposed algorithm 1.

IV. 두 번째 제안 알고리즘

식 (12)에서 알 수 있듯이 이상적인 백색 잡음의 영향은  $h_N(m)=0$ 으로 함으로써 제거할 수 있다. 그러나 실제 상황에서는 상관도가 완전히 없는 잡음이 아닐 경우가 많으며, 이러한 경우 그림 3에서 제안한 첫 번째 방법으로도 완전한 스펙트럼을 추정함에 있어서 부족한 점이 있을 수 있다. 따라서 두 번째 방법으로, 한번의  $Q_r(n)$ 과  $Q_i(n)$ 를 사용하는 대신에 몇 개의  $Q_r(n)$ 과  $Q_i(n)$ 의 앙상블 평균을 취하여 얻은  $\bar{Q}_r(n)$ 과  $\bar{Q}_i(n)$ 를 사용함으로써 잡음의 영향을 거의 없앨 수 있는 방법을 제안한다. 그림 4는 앙상블 평균을 취한  $Q_r(n)$ 과  $Q_i(n)$ 를 바탕으로  $SW(n)$ 을 구하여 스펙트럼을 추정하는 방법의 흐름도이다.

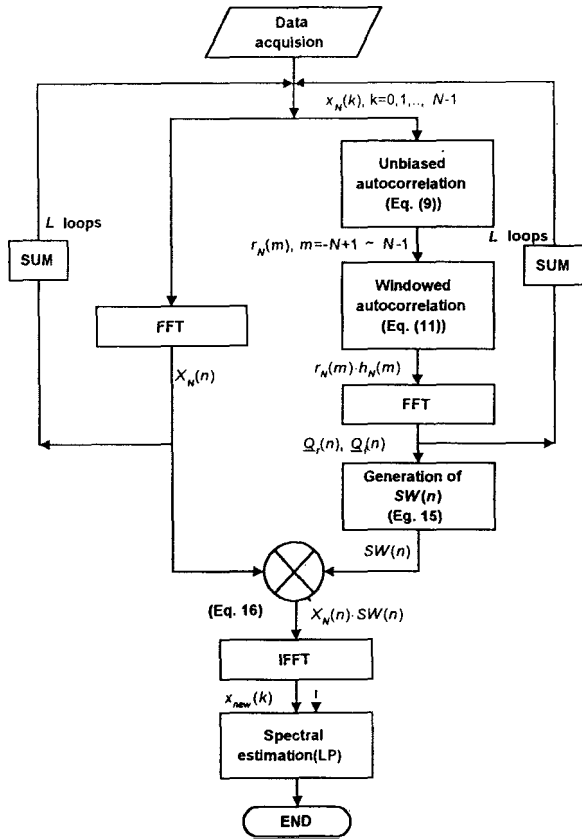


그림 4. 두 번째 제안 알고리즘의 흐름도.  
Fig. 4. Flowchart of the proposed algorithm 2.

V. 전산 시뮬레이션

모든 시뮬레이션에 있어서 고해상도 스펙트럼 추정 방법으로서 LP 방법을 이용하였으며, 각 시뮬레이션 결과는 20개의 snapshot를 사용하여 해상도를 관측하였다. 아울러 두 번째 제안 알고리즘에서는 모두 20개의 앙상블을 사용하여  $SW(n)$ 을 형성시켰다.

5.1 단일 정현파의 경우 1

식 (5)에서  $A=1, \Omega_0=\pi/2, N=5$ 로 하고 잡음은  $\pm 0.3$  사이에서 랜덤 값을 갖도록 하였다. 첫 번째와 두 번째 제안 알고리즘 모두  $\alpha=0.5, \beta=0.01$ 로 설정하였다. LP 차수는 모두 1차로 하였으며 그 결과는 그림 5와 같다. (a)는 기존의 LP 방법의 결과로서 첨두치의 변동이 비교적 심하여 스펙트럼 추정의 일관성이 낮음을 알 수 있다. 그림 (b)는 첫 번째 제안 알고리즘의 결과로서 (a)에 비해 해상도가 매우 높음을 알 수 있다. 그러나 첨두치의 변동은 (a)에 비해서는 낮으나 여전히 변화가 있음을 알 수 있다. 그림 (c)는 두 번째 제안 알고리즘의 결과로서 스펙트럼의 해상도, 편차적 오차 및 일관성에 있어서 매우 뛰어나음을 알 수 있다.

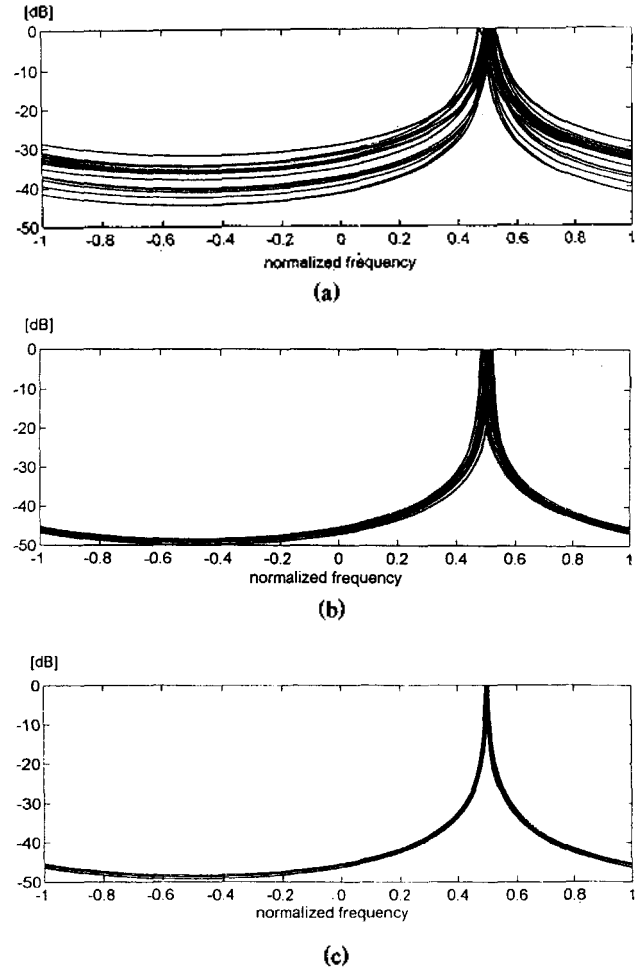


그림 5. 단일 복소 정현파의 경우( $A=1, \Omega_0=\pi/2, N=5$ , 잡음은  $\pm 0.3$ 사이의 랜덤 값)  
(a) 기존의 LP 방법. (b) 첫 번째 제안 알고리즘( $\alpha=0.5, \beta=0.01$ ). (c) 두 번째 제안 알고리즘( $\alpha=0.5, \beta=0.01$ ).  
Fig. 5. Case of single complex sinusoid( $A=1, \Omega_0=\pi/2, N=5$ , noise is random variable between  $+0.3$  and  $-0.3$ )  
(a) LP method. (b) Proposed algorithm 1( $\alpha=0.5, \beta=0.01$ ). (c) Proposed algorithm 2( $\alpha=0.5, \beta=0.01$ ).

5.2 단일 정현파의 경우 2

이번에는 1의 경우와 시뮬레이션 조건이 동일하되 다만 잡음만  $\pm 1$ 사이에서 랜덤 값을 갖도록 하였다. 즉 1의 경우에 비해 SN비가 약 10dB 낮은 경우이다. 이 경우 기존의 LP 방법은 잡음의 영향으로 그림 (a)와 같이 해상도, 편차적 오차 및 일관성이 매우 열악함을 알 수 있다. 이에 비해 첫 번째 제안 알고리즘은 그림 (b)와 같이 기존의 LP 방법에 비해 우수하지만 일관성은 여전히 만족할 만한 수준이 못됨을 알 수 있다. 이에 비해 두 번째 제안 알고리즘의 결과는 열악한 SN비하에서도 그림 (c)와 같이 스펙트럼의 해상도, 편차적 오차 및 일관성에 있어서 매우 뛰어난 것을 알 수 있다.

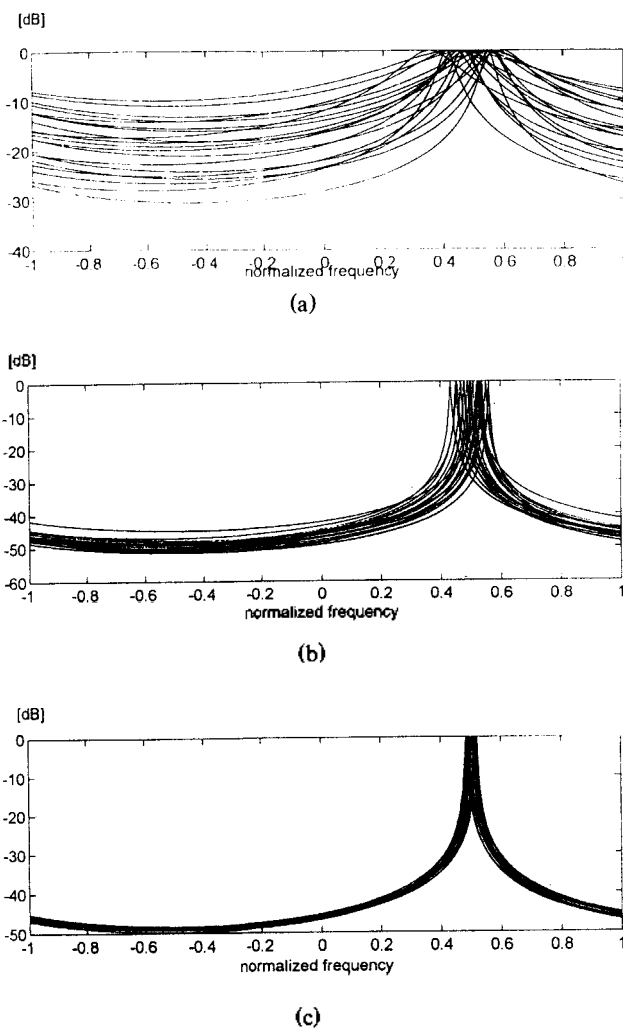


그림 6. 단일 복소 정현파의 경우( $A=1, \Omega_o=\pi/2, N=5$ , 잡음은  $\pm 1$ 사이의 랜덤 값)  
 (a) 기존의 LP 방법. (b) 첫 번째 제안 알고리즘( $\alpha=0.5, \beta=0.01$ ) (c) 두 번째 제안 알고리즘( $\alpha=0.5, \beta=0.01$ )  
 Fig. 6. Case of single complex sinusoid( $A=1, \Omega_o=\pi/2, N=5$ , noise is random variable between  $+1$  and  $-1$ )  
 (a) LP method. (b) Proposed algorithm 1( $\alpha=0.5, \beta=0.01$ ). (c) Proposed algorithm 2( $\alpha=0.5, \beta=0.01$ ).

5.3 두 개의 정현파 경우 1

식 (5)에서 복소 정현파가  $x_N(k) = A_1 \exp(j\Omega_1 k + \psi_1) + A_2 \exp(j\Omega_2 k + \psi_2) + n(k)$ 와 같이 두 개로 구성되며,  $A_1=1, A_2=1, \Omega_1=\pi/2, \Omega_2=\pi/2, \Omega_2=1.6\Omega_1, N=8$ 로 하고 위상  $\psi_1$ 과  $\psi_2$ 는 모두 랜덤 변수로 하였다. 잡음은  $\pm 0.5$ 사이에서 랜덤 값을 갖도록 하였다. 첫 번째와 두 번째 제안 알고리즘 모두  $\alpha=1, \beta=0.01$ 로 설정하였고 LP 차수는 모두 2차로 하였으며 그 결과는 그림 7과 같다. 기존의 LP 방법(그림 (a))에서 비해 그림 (b)의 첫 번째 제안 알고리즘은 매우 우수한 결과를 나타낸다. 두 번째 제안 알고리즘은 그림 (c)와 같이 스펙트럼의 해상도, 편차적 오차 및 일관성에 있어서 (a), (b)에 비해 거의 완전함을 알 수 있다.

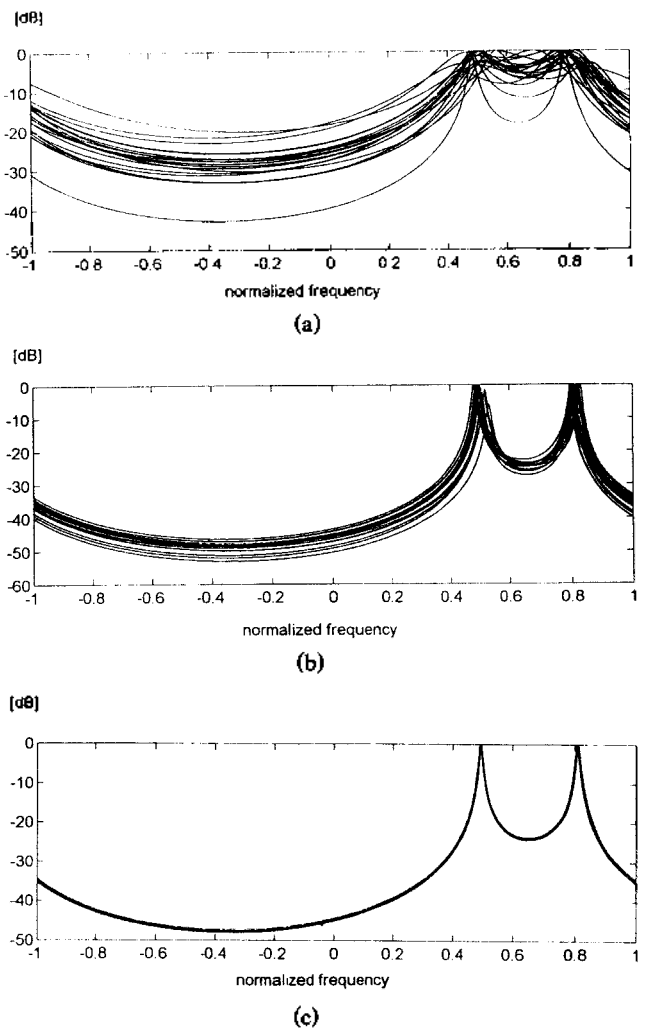
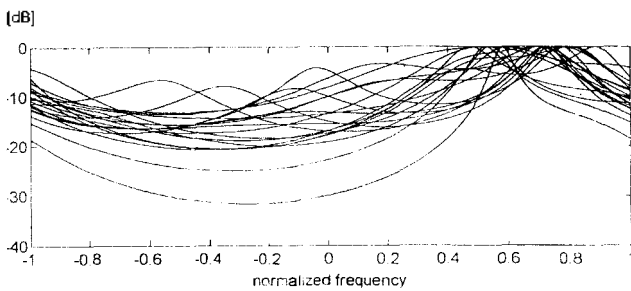


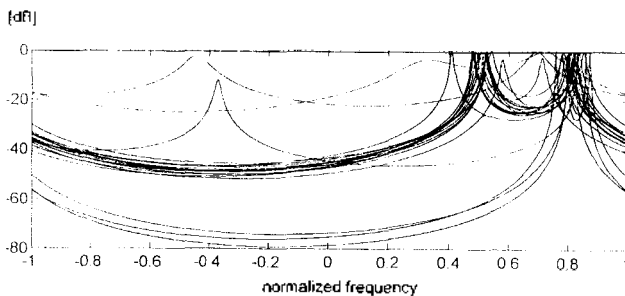
그림 7. 두 개 복소 정현파의 경우( $A_1=1, A_2=1, \Omega_1=\pi/2, \Omega_2=1.6\Omega_1, N=8$ , 잡음은  $\pm 0.5$ 사이의 랜덤 값)  
 (a) 기존의 LP 방법. (b) 첫 번째 제안 알고리즘( $\alpha=1, \beta=0.01$ ) (c) 두 번째 제안 알고리즘( $\alpha=1, \beta=0.01$ )  
 Fig. 7. Case of two complex sinusoids( $A_1=1, A_2=1, \Omega_1=\pi/2, \Omega_2=1.6\Omega_1, N=8$ , noise is random variable between  $+0.5$  and  $-0.5$ )  
 (a) LP method. (b) Proposed algorithm 1( $\alpha=1, \beta=0.01$ ). (c) Proposed algorithm 2( $\alpha=1, \beta=0.01$ ).

5.4 두 개의 정현파 경우 2

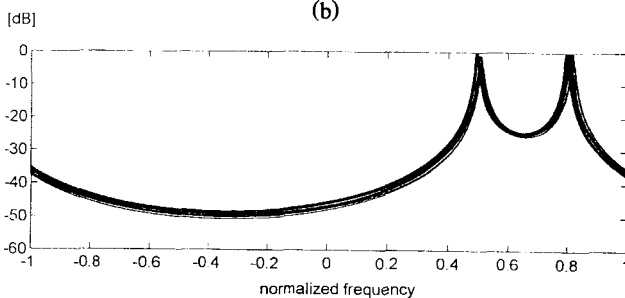
시뮬레이션 3과 동일하되 잡음을  $\pm 1.5$  사이에서 랜덤 값을 갖도록 하였다. 즉 3의 경우에 비해 약 10dB 정도 SN비가 낮은 경우다. 실험 결과는 그림 8과 같다. 기존의 LP방법은 그림 (a)가 나타내는 바와 같이 해상도, 편차적 오차 및 일관성에 있어서 매우 열악함을 알 수 있다. 이에 비해 그림 (b)의 첫 번째 알고리즘 결과는 해상도는 많이 향상되었으나, 아직도 편차적 오차 및 일관성에 있어서는 미흡함을 알 수 있다. 그러나 그림 (c)의 두 번째 알고리즘의 결과에서는 해상도, 편차적 오차 및 일관성에 있어서 매우 뛰어난 것을 알 수 있다.



(a)



(b)



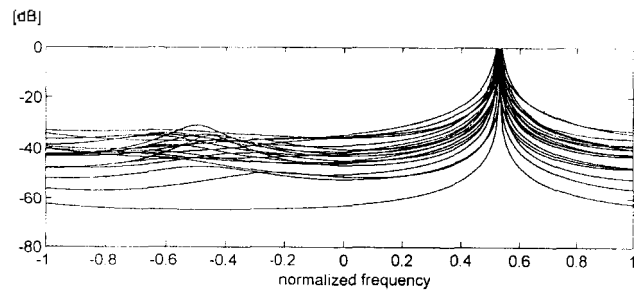
(c)

그림 8. 두개 복소 정현파의 경우( $A_1=1, A_2=1, \Omega_1=\pi/2, \Omega_2=1.6\Omega_1, N=8$ , 잡음은  $\pm 1.5$  사이의 랜덤 값)  
 (a) 기존의 LP 방법. (b) 첫 번째 제안 알고리즘( $\alpha=1, \beta=0.01$ ) (c) 두 번째 제안 알고리즘( $\alpha=1, \beta=0.01$ )

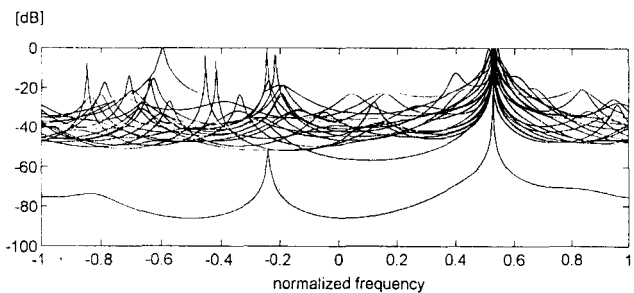
Fig. 8. Case of two complex sinusoids( $A_1=1, A_2=1, \Omega_1=\pi/2, \Omega_2=1.6\Omega_1, N=8$  noise is random variable between +1.5 and -1.5)  
 (a) LP method. (b) Proposed algorithm 1( $\alpha=1, \beta=0.01$ ). (c) Proposed algorithm 2( $\alpha=1, \beta=0.01$ ).

5.5 매우 인접한 두 개의 정현파 경우 3

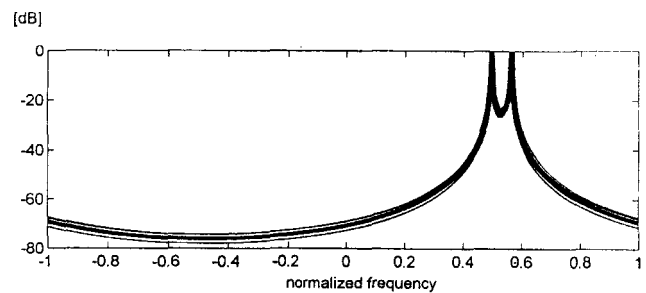
복소 정현파  $x_N(k) = A_1 \exp(j\Omega_1 k + \phi_1) + A_2 \exp(j\Omega_2 k + \phi_2) + n(k)$ 에서,  $A_1=1, A_2=1$ 로 하였으며, 주파수는  $\Omega_1=\pi/2, \Omega_2=1.1\Omega_1$ 와 같이 매우 인접한 두 주파수로 구성하였다.  $N=10$ 로 하고 위상  $\phi_1$ 과  $\phi_2$ 는 모두 랜덤 변수로 하였다. 잡음은  $\pm 0.5$ 사이에서 랜덤 값을 갖도록 하였고 두 번째 제안 알고리즘에서는 모두 20개의 앙상블을 취하여  $SW(x)$ 을 형성시켰으며, 첫 번째와 두 번째 제안 알고리즘 모두  $\alpha=1, \beta=0.01$ 로 설정하였다. 그림 (a)는 예측 차수를 2차로 한 기존의 LP 방법의 결과로서 인접한 두 개의 주파수를 분해할 능력이 없음을 알 수 있으며, 차수를 5차로 늘려 본 결과가 그림 (b)와 같다. 그러나 차수를 증가시켜도 유사 첨두치만 많이 발생할 뿐, 여전히 두 주파수에 대한 분해능은 향상되지 않음을 알 수 있다. 그림 (c)는 차수를 2차로 한 첫 번째 제안 알고리즘의 결과로서 인접한 두 주파수에 대한 분해능이 매우 뛰어나며, 편차적 오차도 작고 일관성도 뛰어난 것을 알 수 있다. 이에 비해 두 번째 제안 알고리즘은 그림 (d)가 도시하는 바와 같이 모든 면에서 거의 완전한 스펙트럼 추정을 이루고 있음을 알 수 있다.



(a)



(b)



(c)

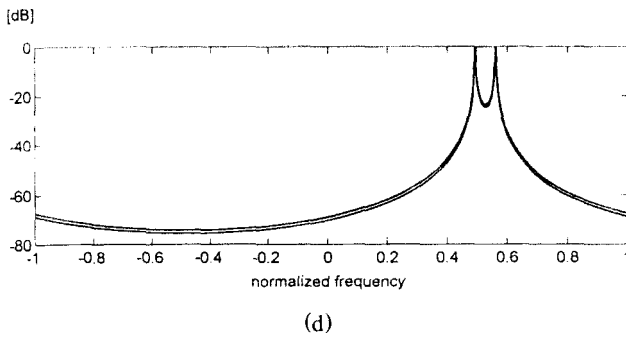


그림 9. 두 개의 매우 인접한 복소 정현파의 경우( $A_1 = 1, A_2 = 1, \Omega_1 = \pi/2, \Omega_2 = 1.1\Omega_1, N = 10$ , 잡음은  $\pm 0.5$  사이의 랜덤 값)  
 (a) 기존의 LP 방법(2차). (b) 기존의 LP 방법(5차).  
 (c) 첫 번째 제안 알고리즘( $\alpha = 1, \beta = 0.01$ ) (d) 두 번째 제안 알고리즘( $\alpha = 1, \beta = 0.01$ )

Fig. 9. Case of very close two complex sinusoids( $A_1 = 1, A_2 = 1, \Omega_1 = \pi/2, \Omega_2 = 1.1\Omega_1, N = 8$  noise is random variable between  $+0.5$  and  $-0.5$ )  
 (a) LP method(order 2). (b) LP method(order 5). (c) Proposed algorithm 1 ( $\alpha = 1, \beta = 0.01$ ). (d) Proposed algor.

VI. 결론 및 검토

고해상도이면서 편차적 오차가 매우 작은 일관성있는 스펙트럼 추정 방법을 두가지 제시하였다. 이 방법들의 성능을 알아보기 위해 기존의 LP 방법과 비교하여 시뮬레이션하였다. 특히 잡음에 대해 민감한 정도를 알아보기 위해 잡음이 매우 심한 경우에 대해서도 비교 분석하였다. 그 결과 제안한 두 알고리즘은 스펙트럼의 해상도, 편차적 오차 및 일관성에 있어서 기존의 고해상도 알고리즘에 비해 매우 탁월함을 입증할 수 있었다. 첫번째 제안한 알고리즘은 웬만한 잡음 환경하에서는 부족함이 없는 결과를 얻을 수 있을 것으로 판단할 수 있으며, 잡음이 매우 심한 경우에서도 두 번째 알고리즘은 매우 탁월한 성능을 발휘할 수 있음을 알 수 있다.

이와 같이 본 논문에서는, 추정하고자하는 미지의 주파수를 중심으로 하는 창함수를 주파수 영역상에서 자동으로 형성시킴으로써, 주어진 데이터의 SN비를 크게 증가시켜 잡음에 의한 유사 첨두치를 제거할 수 있으며, 또한 Sinc 함수와의 컨볼루션 결과로써 외삽의 효과에 의해 데이터의 길이를 확장시켜 스펙트럼의 해상도를 크게 증가시킬 수 있는 방법을 제시하였다. 특히 데이터에 대한 사전 처리 과정이 FFT로 이루어지므로 하드웨어 구현이 용이할 것으로 판단된다. 이 외에도 기타의 고해상도 알고리즘을 모두 채택할 수 있는 보편성도 가진다.

참 고 문 헌

1. D. H. Johnson, "The Application of Spectral Estimation Methods to Bearing Estimation Problems," *Proc. IEEE*, 70, pp.1018-1028, September 1982.
2. D.H. Johnson and S.R. DeGraff, "Improving the resolution of Bearing in Passive Sonar Arrays by Eigenvalue Analysis," *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*. vol. ASSP-30, pp. 638-647, August 1982.
3. Special Issue on Time Delay Estimation, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*. vol. ASSP-29, No.3, June 1981.
4. Eli Brrokner, "Phased array radars," *Scientific American*, vol. 252, pp. 94-102, February 1985.
5. S. Lawrence Marple, *Digital Spectral Analysis with Applications*, Prentice Hall, Inc. 1987.

▲신 윤 기(Yoon-Ki Shin)

1957년 1월 2일생



1979년 2월: 서울대학교 전자공학과 졸업  
 1982년 2월: 서울대학교 전자공학과 석사학위 취득  
 1987년 2월: 서울대학교 전자공학과 박사학위 취득  
 1985년 3월~1992년 2월: 부산대학교 전자공학과 교수로 근무  
 1992년 3월~현재: 대전대학교 전자공학과 부교수로 재직중  
 ※주관심분야: 신호처리, 적응필터이론, 수중통신 등임