

두께가 일정하지 않은 재료에서 경사진 균열의 성장거동에 관한 연구

A Study on the Crack Growth Behavior of a Inclined Crack in a Non-Uniform Thickness Material

조명래* · 표창률** · 박종주* · 고명훈***

M.R. Cho · C.R. Pyo · J.J. Park · M.H. Ko

(1997년 8월 5일 접수, 1997년 12월 12일 채택)

ABSTRACT

The effect of geometry factors on the combined mode stress intensity factor behaviors of a slant crack in a non-uniform thickness material was analysed by 2-dimensional theoretical analysis. The analysis is based on the Laurent's series expansions of complex potentials where the complex coefficients of the series are determined from the compatibility and the equilibrium conditions of the thickness interface and the stress free conditions of the crack surface. In numerical calculations the perturbation technique is employed. The expressions for the crack tip stress intensity factor are given in the form of power series of dimensionless crack length λ , and the function of crack slant angle α and thickness ratio β . The results of numerical calculations for each problems are represented as the correction factors $F(\lambda, \alpha, \beta)$. The results clearly show the following characteristics: The correction factors of the combined mode stress intensity factors for a non-uniform thickness material can be defined in the form of $F(\lambda, \alpha, \beta)$. The stress intensity factor values for a given crack length are decreased with increase of thickness ratio β .

1. 서론

그 동안의 파괴역학분야의 연구에서는 균열

이 존재하는 부재의 주 모델을 해석의 편의상 두께가 균일한 부재로 간편화하여, 주로 2차원적으로 해석을 해왔다. 그러나, 실제 기계 및 구

* 인덕전문대학 기계설계과

** 인덕전문대학 기계과

*** 대림전문대학 공업경영과

조물에는 두께가 일정한 부재 뿐 아니라, 두께가 일정하지 않고 변화하는 부재(이하 변후부재라 한다.)가 현실적으로 폭넓게 사용되고 있다. 게다가, 파괴역학에 대한 연구가 활발해지면서 파괴가 발생한 현상에 대한 평가 뿐만 아니라, 파괴를 근원적으로 방지하기 위한 대책에 대한 관심이 커지면서 변후부재에 대한 관심도 함께 증대되고 있다^{1,2)}. 또한, 실제 기계·구조물에 존재하는 균열은 존재형태의 다양함, 작용하중의 비대칭 또는 재료의 이방성등으로 인해, 엄밀한 의미에서 순수한 모드 I 균열의 상태로 존재하는 경우는 극히 드물다. 오히려 어느 정도라도 하중방향과 균열면이 경사되게 위치한 혼합모드 균열의 상태로 존재하는 것이 보다 일반적일 뿐 아니라, 단일 모드 성분으로 시작된 균열이 진행과정에서 혼합모드 균열로 변화하는 사례도 흔히 발견된다³⁾. 특히, 최근들어 그 사용빈도가 급격한 증가추세에 있는 섬유강화복합재와 같은 이방성재료 내에서는 모드 I 상태로 출발한 균열이 진행 도중 혼합모드 I/II 상태로 쉽게 변천하여, 실제로는 이에 대한 체계적인 연구가 현실적인 공학문제로서 지니는 의미도 간과할 수 없다 할 것이다.

변후부재와 관련된 파괴역학적 연구로는 Isida⁴⁾가 두께와 탄성계수가 서로 다른 동일폭 이재결합 판재가 연속적으로 무한히 결합되고, 그 한쪽 판재에 규칙적인 center crack이 존재하는 경우 및 두께와 탄성계수가 다른 반무한 판재가 결합되고 그 한쪽 판재에 균열이 존재하는 경우에 대하여 Laurent expansion형의 응력함수를 써서 수학적 해석을 수행한 2차원 이론해석을 하였고, Ratwani등⁵⁾이 land부를 갖는 표면에 균열이 존재하는 경우에 대하여, 적분방정식을 써서 응력확대계수를 해석하였다. 또한 Tokuda등⁶⁾이 두께가 얇은 판재 내에 있는 edge crack이 두께가 두꺼운 쪽으로 성장해 가는 thin-to-thick type에 대하여 2차원 유한요소법으로 응력확대계수 해석하였다.

그러나 지금까지 보고된 연구 결과들은 탄성론적인 이론해석은 해석과정의 복잡성 때문에, 해석대상 모델의 기하학적 형상이나 하중조건 등이 비교적 간단한 모드 I 균열에 대한 해석

경우로 한정되어 있기 때문에, 변후부재 내의 혼합모드 균열인 경우, 이 결과가 정성적인 지표는 될 수 있겠으나, 이 결과를 그대로 적용할 수 없다는 문제가 있다.

본 연구에서는 위의 두 이론해석 방법을 확장하여, 두께가 다른 2개의 반무한 판재가 결합되어 있고, 그 한쪽에 경사진 관통균열(slant crack)이 있는 모델을 설정하여, 균열경사각 α , 두께비 β , 및 무차원 균열길이 λ 를 변수로 한 응력확대계수 K_I 및 K_{II} 의 2차원 이론해석을 수행하였다.

2. 응력함수의 설정

일반적인 2차원 탄성문제에서 Airy의 응력함수는 복소 potential $\phi(z)$ 와 $\psi(z)$ 를 써서 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$Z(z) = \text{Re}\{\bar{z}\phi(z) + \psi(z)\} \dots\dots\dots (1)$$

좌표를 무차원화하기 위하여 x, y 를 각각 특징길이 W_1 으로 나누어 무차원 변수 ζ 및 무차원좌표 ξ 와 η 를

$$\zeta = \frac{z}{W_1} = \xi + i\eta, \quad \xi = \frac{x}{W_1}, \quad \eta = \frac{y}{W_1} \dots\dots\dots (2)$$

로 정의하면 식(1)을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$Z(\zeta) = \sigma_\infty W_1^2 \text{Re}\{\bar{\zeta}\phi(\zeta) + \psi(\zeta)\} \dots\dots\dots (3)$$

이에 대응하는 응력장과 평면응력상태에 대한 변위장은 다음식으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\infty \text{Re}\{2\phi'(\zeta) - \bar{\zeta}\phi''(\zeta) - \psi''(\zeta)\} \\ \sigma_y &= \sigma_\infty \text{Re}\{2\bar{\phi}'(\zeta) + \zeta\phi''(\zeta) + \psi''(\zeta)\} \\ \tau_{xy} &= \sigma_\infty \text{Im}\{\bar{\zeta}\phi(\zeta) + \psi(\zeta)\} \\ E(u - iv) &= \sigma_\infty W_1 [(3 - \nu)\bar{\phi}(\bar{\zeta}) \\ &\quad - (1 + \nu)\{\bar{\zeta}\phi'(\zeta) + \psi'(\zeta)\}] \\ &\dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

여기서, $\bar{\phi}$ 와 $\bar{\psi}$ 는 ϕ 와 ψ 의 공액 복소수

Fig. 1에서와 같이 길이 $2a$ 인 경사진 관통균열을 가지는 반무한 변후판재가 길이 방향의 무한원방에서 균일인장응력 σ_∞ 를 받고 있는 경우로 하였으며, 이 재료의 종탄성계수를 E , Poisson의 비를 ν 라 한다. 그리고, t_2 와 t_1 의 비를 두께비 β 로, 각 무차원좌표를 다음과 같이 정의

한다.

$$\zeta = \frac{z}{W_1}, \xi = \frac{x}{W_1} (0 \leq \xi \leq 1), \eta = \frac{y}{W_1}$$

$$\zeta_2 = \frac{z_2}{W_1}, \xi_2 = \frac{x_2}{W_1} (0 \leq \xi_2 \leq 1), \eta_2 = \frac{y_2}{W_1}$$

..... (5)

무차원균열길이 λ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\lambda = \frac{a \cdot \cos \alpha}{W_1} (0 \leq \lambda \leq 1) \dots\dots\dots (6)$$

식(4) 및 Fig.1에서, region I에 대한 경계조건은

$$\sigma_x|_{\eta=\infty} = 0, \sigma_y|_{\eta=\infty} = \sigma_\infty, \tau_{xy}|_{\eta=\infty} = 0, \dots (7)$$

이고, Region II에 대한 경계조건은

$$\sigma_{x_2}|_{\eta_2=\infty} = 0, \sigma_{y_2}|_{\eta_2=\infty} = \sigma_\infty, \tau_{x_2y_2}|_{\eta_2=\infty} = 0$$

..... (8-a)

$$\sigma_{x_2}|_{\xi_2=1} = 0, \tau_{x_2y_2}|_{\xi_2=1} = 0, \dots\dots\dots (8-b)$$

이며, 변후경계에서는 적합조건과 평형조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u|_{\xi=1, \eta=\eta} &= -u_2|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \\ v|_{\xi=1, \eta=\eta} &= -v_2|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \end{aligned}$$

..... (9)

$$\begin{aligned} (\sigma_x t)|_{\xi=1, \eta=\eta} &= (\sigma_{x_2} t_2)|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \\ (\tau_x t)|_{\xi=1, \eta=\eta} &= (\tau_{x_2} t_2)|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \end{aligned}$$

..... (10)

여기서, u, v 는 x, y 방향변위로, 아래첨자가 없는 것은 region I에 대한 것을, 아래첨자 2는 region II에 대한 것을 나타낸다.

위의 경계조건을 만족시키기 위하여 region I과 II에 독립적인 응력함수를 도입하고, 식(9)와 (10)의 적합조건 및 평형조건을 만족하도록 두 region을 결합하는 방법을 쓰기로 한다.

2.1 Region I의 응력함수

Region I에 대하여는 다음과 같은 3개의 응력함수를 중첩한다.

$$Z(\zeta) = Z^{(0)} + Z^{(1)} + Z^{(2)} \dots\dots\dots (11)$$

$$Z^{(0)} = \sigma_\infty W_1^2 \operatorname{Re}\{\bar{\zeta} \phi_0(\zeta) + \phi_0(\zeta)\}$$

$$Z^{(1)} = \sigma_\infty W_1^2 \operatorname{Re}\{\bar{\zeta} \phi_1(\zeta) + \phi_1(\zeta)\} \quad (12)$$

$$Z^{(2)} = \sigma_\infty W_1^2 \operatorname{Re}\{\bar{\zeta} \phi_2(\zeta) + \phi_2(\zeta)\}$$

여기서, $Z^{(0)}$ 는 무한원방에서의 경계조건을 만

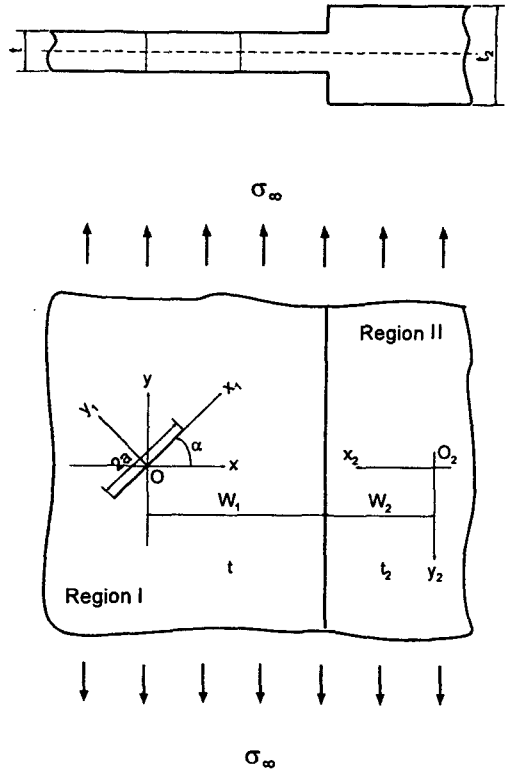


Fig.1 Combined mode I/II crack in a non-uniform thickness plate

족시키기 위한 것이고 $Z^{(1)}$ 는 균열선단에서의 singularity 및 균열면에서의 경계조건을 만족시키기 위한 것이다. $Z^{(2)}$ 는 변후경계에서의 적합조건과 평형조건을 만족시키기 위한 것이다.

$Z^{(0)}$ 의 복소 potential은 다음과 같이 설정한다.

$$\phi_0(\zeta) = \frac{1}{4} \zeta, \psi_0(\zeta) = \frac{1}{4} \zeta^2 \dots\dots\dots (13)$$

응력함수 $Z^{(0)}$ 에 대응하는 응력은 식(4)에 의하여

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)} &= \sigma_\infty \operatorname{Re}\left\{\left(\frac{1}{4}\right) - \bar{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\right\} = 0 \\ \sigma_y^{(0)} &= \sigma_\infty \operatorname{Re}\left\{2\left(\frac{1}{4}\right) + \bar{\zeta}(0) - \frac{1}{2}\right\} = \sigma_\infty \\ \tau_{xy}^{(0)} &= \sigma_\infty \operatorname{Im}\left\{\bar{\zeta}(0) + \frac{1}{2}\right\} = 0 \end{aligned}$$

..... (14)

로서 y 방향의 균일응력상태를 나타낸다.

$Z^{(0)}$ 에 대응하는 변위는

$$E(u^{(0)} - iv^{(0)}) = -\sigma_\infty W_1 \{ \nu \xi + i \eta \} \dots (15)$$

이므로, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} Eu^{(0)} &= -\sigma_\infty W_1 \nu \xi \dots\dots\dots (16) \\ Ev^{(0)} &= \sigma_\infty W_1 \eta \end{aligned}$$

복소 Potential을 $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ 좌표로 변환하면

$$\zeta_1 = e^{-i\alpha} \xi \dots\dots\dots (17)$$

따라서,

$$\Phi_0(\zeta_1) = \frac{1}{4} \zeta_1, \quad \Psi_0(\zeta_1) = \frac{1}{4} e^{2i\alpha} \zeta_1^2 \dots\dots\dots (18)$$

$Z^{(1)}$ 의 복소 potential은 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} (F_n^R + iF_n^I) \zeta_1^{-(n+1)}, \\ \psi_1(\zeta_1) &= -D_0^R \ln \zeta_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^R + iD_n^I) \zeta_1^{-n} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$Z^{(1)}$ 에 해당하는 응력과 변위는 식(4)에 의하여 $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\theta = \tan^{-1}(\eta/\xi)$ 라 할 때 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= -\sigma_\infty \left[\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)r^{-(n+2)} \right. \\ &\quad \{F_n^R \cos(n+2)\alpha - F_n^I \sin(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cdot \cos(n+2)\theta + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \\ &\quad r^{-(n+2)} \{F_n^R \cos(n+2)\alpha \\ &\quad - F_n^R \cos(n+2)\alpha - F_n^I \sin(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cos(n+4)\theta + D_0^R r^{-2} \cos 2\theta \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) r^{-(n+2)} \{D_n^R \cos(n\alpha) \\ &\quad - D_n^I \sin(n\alpha) \cos(n+2)\theta\} \\ &\quad - \sigma_\infty \left[\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) r^{-(n+2)} \right. \\ &\quad \{F_n^R \sin(n+2)\alpha + F_n^I \cos(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cdot \sin(n+2)\theta + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \\ &\quad r^{-(n+2)} \{F_n^R \sin(n+2)\alpha \\ &\quad + F_n^I \cos(n+2)\alpha\} \sin(n+4)\theta \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) r^{-(n+2)} \cdot \{D_n^R \sin(n\alpha) \\ &\quad + D_n^I \cos(n\alpha)\} \sin(n+2)\theta \left. \right] \dots\dots\dots (20-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(1)} &= \sigma_\infty \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) r^{-(n+2)} \right. \\ &\quad \{F_n^R \sin(n+2)\alpha + F_n^I \cos(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cos(n+4)\theta + \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) r^{-(n+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cdot \{D_n^R \sin(n\alpha) + D_n^I \cos(n\alpha)\} \\ &\cos(n+2)\theta] - \sigma_\infty \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \right. \\ &r^{-(n+2)} \{F_n^R \cos(n+2)\alpha \\ &- F_n^I \sin(n+2)\alpha\} \sin(n+4)\theta \\ &+ D_0^R r^{-2} \sin 2\theta + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) r^{-(n+2)} \\ &\cdot \{D_n^R \cos(n\alpha) - D_n^I \sin(n\alpha)\} \sin(n+2)\theta \left. \right] \dots\dots\dots (20-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Eu^{(1)} &= \sigma_\infty W_1 \left[(3-\nu) \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \right. \\ &\quad \{F_n^R \cos(n+2)\alpha - F_n^I \sin(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cdot \cos(n+1)\theta + (1+\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \\ &\quad r^{-(n+1)} \{F_n^R \cos(n+2)\alpha \\ &\quad - F_n^I \sin(n+2)\alpha\} \cos(n+3)\theta \\ &\quad + (1+\nu) r^{-1} D_0^R \cos \theta + (1+\nu) \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} n r^{-(n+1)} \{D_n^R \cos(n\alpha) \\ &\quad - D_n^I \sin(n\alpha)\} \cdot \cos(n+1)\theta \left. \right] \\ &+ \sigma_\infty W_1 \left[(3-\nu) \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \right. \\ &\quad \{F_n^R \sin(n+2)\alpha + F_n^I \cos(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cdot \sin(n+1)\theta + (1+\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \\ &\quad r^{-(n+1)} \{F_n^R \sin(n+2)\alpha + F_n^I \cos \\ &\quad (n+2)\alpha\} \cdot \sin(n+3)\theta + (1+\nu) \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} n r^{-(n+1)} \{D_n^R \sin(n\alpha) \\ &\quad + D_n^I \cos(n\alpha)\} \sin(n+1)\theta \left. \right] \dots\dots\dots (20-c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ev^{(1)} &= \sigma_\infty W_1 \left[(3-\nu) \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \right. \\ &\quad \{F_n^R \sin(n+2)\alpha + F_n^I \cos(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cdot \cos(n+1)\theta - (1+\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \\ &\quad r^{-(n+1)} \{F_n^R \sin(n+2)\alpha + F_n^I \cos \\ &\quad (n+2)\alpha\} \cos(n+3)\theta - (1+\nu) \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} n r^{-(n+1)} \{D_n^R \sin(n\alpha) \\ &\quad + D_n^I \cos(n\alpha)\} \cos(n+1)\theta \left. \right] \\ &+ \sigma_\infty W_1 \left[(3-\nu) \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \right. \\ &\quad \cdot \{-F_n^R \cos(n+2)\alpha + F_n^I \sin(n+2) \\ &\quad \alpha\} \sin(n+1)\theta + (1+\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \end{aligned}$$

$$r^{-(n+1)}\{F_n^R \cos(n+2)\alpha - F_n^I \sin(n+2)\alpha\} \cdot \sin(n+3)\theta + (1+\nu)r^{-1}D_0^R \sin\theta + (1+\nu)\sum_{n=1}^{\infty} nr^{-(n+1)} \cdot \{D_n^R \cos(n\alpha) - D_n^I \sin(n\alpha)\} \sin(n+1)\theta$$

..... (20-d)

$Z_2^{(2)}$ 의 복소 potential은 다음과 같이 설정한다.

$$\begin{aligned} \Phi_2(\zeta) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{B^R(m) + iB^I(m)\} e^{m\zeta} dm, \\ \Psi_2(\zeta) &= \int_0^{\infty} [\{A^R(m) + iA^I(m)\} \\ &\quad + \frac{\zeta}{2} \{B^R(m) + iB^I(m)\}] e^{m\zeta} dm \end{aligned}$$

..... (21)

$Z_2^{(2)}$ 에 대응하는 응력장과 변위장은 식(19)를 식(14)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(2)} &= -\sigma_{\infty} \int_0^{\infty} m^2 e^{m\xi} \{ (A^R + \xi B^R) \cos(m\eta) - (A^I + \xi B^I) \sin(m\eta) \} dm \\ \sigma_y^{(2)} &= \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} m^2 e^{m\xi} [\{ m^2 A^R + m(2+m\xi) B^R \} \cos(m\eta) - \{ m^2 A^I + m(2+m\xi) B^I \} \sin(m\eta)] dm \\ \tau_{xy}^{(2)} &= \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} e^{m\xi} [\{ m^2 A^R + m(1+m\xi) B^R \} \sin(m\eta) + \{ m^2 A^I + m(1+m\xi) B^I \} \cos(m\eta)] dm \end{aligned}$$

..... (22-a)

$$\begin{aligned} Eu^{(2)} &= \sigma_{\infty} W_1 \int_0^{\infty} e^{m\xi} [-(1+\nu)mA^R + \{(1-\nu) - (1+\nu)m\xi\} B^R \\ &\quad \cdot \cos(m\eta) + \{(1+\nu)mA^I - \{(1-\nu) - (1+\nu)m\xi\} B^I\} \\ &\quad \cdot \sin(m\eta)] dm \\ Ev^{(2)} &= \sigma_{\infty} W_1 \int_0^{\infty} e^{m\xi} [\{(1+\nu)mA^R + (2+(1+\nu)m\xi) B^R\} \sin(m\eta) \\ &\quad + \{(1+\nu)mA^I + (2+(1+\nu)m\xi) B^I\} \cos(m\eta)] dm \end{aligned}$$

..... (22-b)

식(14),(16),(20) 및 (22)를 종합하면, region I의 응력함수 $Z(\zeta) = Z^{(0)} + Z^{(1)} + Z^{(2)}$ 는 식(7-a,b)로 표시된 region I의 경계조건을 잘 만족하고, 또 x축 및 y축에 대한 대칭조건을 잘 만족한다.

Region I에 대하여, $\xi=1$ 인 변후경계상에서의 $Z^{(0)}$ 에 대응하는 응력과 변위는 식(14)와 (16)에서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)}|_{\xi=1} &= 0, \quad \tau_{xy}^{(0)}|_{\xi=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (23-a) \\ u^{(0)}|_{\xi=1} &= \frac{1}{E} \sigma_{\infty} W_1 \nu, \\ v^{(0)}|_{\xi=1} &= \frac{1}{E} \sigma_{\infty} W_1 \eta \end{aligned}$$

..... (23-b)

$Z^{(1)}$ 에 대응하는 변후경계상의 응력과 변위는 식(20-a,b)에 $\xi=1$, $r=\sqrt{1+\eta^2}$ 및 $\theta=\tan^{-1}(\eta)$ 을 대입하고 정리하면 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_x^{(1)}|_{\xi=1} = \sigma_x^{(1)c}|_{\xi=1} + \sigma_x^{(1)s}|_{\xi=1} \quad \dots\dots\dots (24-a)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)c}|_{\xi=1} &= -\sigma_{\infty} [\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) \{ F_n^R \cos(n+2)\alpha - F_n^I \sin(n+2)\alpha \} \cdot \frac{\cos(n+2)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+2)/2}} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \{ F_n^R \cos(n+2)\alpha - F_n^I \sin(n+2)\alpha \} \frac{\cos(n+4)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+2)/2}} \\ &\quad + D_0^R \frac{\cos 2\theta}{(1+\eta^2)} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \{ D_n^R \cos(n\alpha) - D_n^I \sin(n\alpha) \} \\ &\quad \cdot \frac{\cos(n+2)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+2)/2}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)s}|_{\xi=1} &= -\sigma_{\infty} [\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) \{ F_n^R \sin(n+2)\alpha + F_n^I \cos(n+2)\alpha \} \cdot \frac{\sin(n+2)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+2)/2}} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \{ F_n^R \sin(n+2)\alpha + F_n^I \cos(n+2)\alpha \} \frac{\sin(n+4)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+2)/2}} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot \{ D_n^R \sin(n\alpha) + D_n^I \cos(n\alpha) \} \frac{\sin(n+2)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+2)/2}}] \end{aligned}$$

$$\tau_{xy}|_{\xi=1} = \tau_{xy}|_{\xi=1}^c + \tau_{xy}|_{\xi=1}^s \quad \dots\dots\dots (24-b)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \tau_{xy}|_{\xi=1}^c &= \sigma_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \{F_n^R \sin \\ &\quad (n+2)\alpha + F_n^I \cos(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cdot \frac{\cos(n+4)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+2)/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \\ &\quad \{D_n^R \sin(n\alpha) + D_n^I \cos(n\alpha)\} \\ &\quad \cdot \frac{\cos(n+2)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+2)/2}} \\ \tau_{xy}|_{\xi=1}^s &= -\sigma_{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \{F_n^R \cos \right. \\ &\quad (n+2)\alpha - F_n^I \sin(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cdot \frac{\sin(n+4)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+2)/2}} + D_0^R \frac{\sin 2\theta}{(1+\eta^2)} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \{D_n^R \cos(n\alpha) \\ &\quad \left. - D_n^I \sin(n\alpha)\} \frac{\sin(n+2)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+2)/2}} \right] \end{aligned}$$

$Eu^{(1)}|_{\xi=1}^c = Eu^{(1)}|_{\xi=1}^c + Eu^{(1)}|_{\xi=1}^s \dots\dots (24-c)$
여기서,

$$\begin{aligned} Eu^{(1)}|_{\xi=1}^c &= \sigma_{\infty} W_1 [(3-\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \{F_n^R \cos \\ &\quad (n+2)\alpha - F_n^I \sin(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cdot \frac{\cos(n+1)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}} + (1+\nu) \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \{F_n^R \cos(n+2)\alpha \\ &\quad - F_n^I \sin(n+2)\alpha\} \frac{\cos(n+3)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}} \\ &\quad + (1+\nu) D_0^R \cdot \frac{\cos \theta}{(1+\eta^2)^{1/2}} \\ &\quad + (1+\nu) \sum_{n=1}^{\infty} n \{D_n^R \cos(n\alpha) \\ &\quad - D_n^I \sin(n\alpha)\} \cdot \frac{\cos(n+1)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Eu^{(1)}|_{\xi=1}^s &= \sigma_{\infty} W_1 (3-\nu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \{F_n^R \sin \right. \\ &\quad (n+2)\alpha + F_n^I \cos(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cdot \frac{\sin(n+1)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}} + (1+\nu) \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \{F_n^R \sin(n+2)\alpha \\ &\quad - F_n^I \cos(n+2)\alpha\} \frac{\sin(n+3)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}} \\ &\quad + (1+\nu) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \{D_n^R \sin(n\alpha) \\ &\quad \left. + D_n^I \cos(n\alpha)\} \frac{\sin(n+1)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}} \right] \end{aligned}$$

$Ev^{(1)}|_{\xi=1}^c = Ev^{(1)}|_{\xi=1}^c + Ev^{(1)}|_{\xi=1}^s \dots (24-c)$

여기서,

$$\begin{aligned} Ev^{(1)}|_{\xi=1}^c &= \sigma_{\infty} W_1 (3-\nu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \{F_n^R \sin \right. \\ &\quad (n+2)\alpha + F_n^I \cos(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cdot \frac{\cos(n+1)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}} - (1+\nu) \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \{F_n^R \sin(n+2)\alpha \\ &\quad - F_n^I \cos(n+2)\alpha\} \frac{\cos(n+3)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}} \\ &\quad - (1+\nu) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \{D_n^R \sin(n\alpha) \\ &\quad \left. + D_n^I \cos(n\alpha)\} \frac{\cos(n+1)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ev^{(1)}|_{\xi=1}^s &= -\sigma_{\infty} W_1 (3-\nu) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \{F_n^R \cos \right. \\ &\quad (n+2)\alpha - F_n^I \sin(n+2)\alpha\} \\ &\quad \cdot \frac{\sin(n+1)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}} + (1+\nu) \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \{F_n^R \cos(n+2)\alpha \\ &\quad - F_n^I \sin(n+2)\alpha\} \frac{\sin(n+3)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}} \\ &\quad + (1+\nu) D_0^R \cdot \frac{\sin \theta}{(1+\eta^2)^{1/2}} \\ &\quad + (1+\nu) \sum_{n=1}^{\infty} n \{D_n^R \cos(n\alpha) \\ &\quad \left. - D_n^I \sin(n\alpha)\} \cdot \frac{\sin(n+1)\theta}{(1+\eta^2)^{(n+1)/2}} \right] \end{aligned}$$

$\xi=1$ 인 변후경계상에서, $Z^{(2)}$ 에 대응하는 응력과 변위는

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(2)}|_{\xi=1} &= -\sigma_{\infty} \int_0^{\infty} m^2 e^{m\eta} [(A^R + B^R) \cos \\ &\quad (m\eta) - (A^I + B^I) \sin(m\eta)] dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(2)}|_{\xi=1} &= \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} e^{m\eta} \{m^2 A^I + m(1+m) \\ &\quad B^I\} \cos(m\eta) + \{m^2 A^R \\ &\quad + m(1+m) B^R\} \sin(m\eta) dm \\ &\dots\dots\dots (25-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Eu^{(2)}|_{\xi=1} &= \sigma_{\infty} W_1 \int_0^{\infty} e^{m\eta} \{-(1+\nu)mA^R \\ &\quad + ((1-\nu) - (1+\nu)m)B^R\} \\ &\quad \cdot \cos(m\eta) + \{(1+\nu)mA^I \\ &\quad - ((1-\nu) - (1+\nu)m)B^I\} \\ &\quad \cdot \sin(m\eta) dm \end{aligned}$$

$$Ev^{(2)}|_{\xi=1} = \sigma_{\infty} W_1 \int_0^{\infty} e^{-m\eta} [\{ (1+\nu)mA^I + (2+(1+\nu)m)B^I \} \cos(m\eta) + \{ (1+\nu)mA^R + (2+(1+\nu)m)B^R \} \sin(m\eta)] dm \dots\dots\dots (25-b)$$

2.2 Region II의 응력함수

Region II에는 균열이 없으므로, 다음과 같이 2개의 응력함수를 설정하기로 한다.

$$Z_2(\xi_2) = Z_2^{(0)} + Z_2^{(2)} \dots\dots\dots (26)$$

$$Z_2^{(0)} = \sigma_{\infty} W_1^2 \text{Re} \{ \bar{\xi}_2 \phi_0(\xi_2) + \Psi_0(\xi_2) \}$$

$$Z_2^{(2)} = \sigma_{\infty} W_1^2 \text{Re} \{ \bar{\xi}_2 \phi_2(\xi_2) + \Psi_2(\xi_2) \} \dots\dots\dots (27)$$

여기에서 $Z_2^{(0)}$ 는 무한원방에서의 경계조건을 만족시키기 위한 것이고, $Z_2^{(2)}$ 는

판폭의 자유경계 ($\xi_2=0$)에서의 경계조건과 변후경계 ($\xi_2=\omega$)에서의 경계조건 및 평형조건을 만족시키기 위한 것이다.

$Z_2^{(0)}$ 의 복소 potential은 다음과 같이 가정한 다.

$$\phi_0(\xi_2) = \frac{1}{4} \{ \xi_2 - (1+\omega) \},$$

$$\Psi_0(\xi_2) = \frac{1}{4} \left\{ \xi_2 - \frac{3}{2}(1+\omega) \right\}^2 \dots\dots\dots (28)$$

응력함수 $Z_2^{(0)}$ 에 대응하는 응력은 다음 식(4)에 의하여

$$\sigma_{x_2}^{(0)} = \sigma_{\infty} \text{Re} \left\{ 2 \left(\frac{1}{4} \right) - \bar{\xi}_2 \cdot 0 - \frac{1}{2} \right\} = 0$$

$$\sigma_{y_2}^{(0)} = \sigma_{\infty} \text{Re} \left\{ 2 \left(\frac{1}{4} \right) + \bar{\xi}_2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \right\} = \sigma_{\infty}$$

$$\tau_{xy_2}^{(0)} = \sigma_{\infty} \text{Im} \left\{ \bar{\xi}_2 \cdot 0 - \frac{1}{2} \right\} = 0 \dots\dots\dots (29)$$

이므로, y_2 방향의 균일응력응력장이 된다.

$Z_2^{(0)}$ 에 대응하는 변위장은 식(4-a)에 의하여 다음과 같이 표시된다.

$$E(u_2^{(0)} - iv_2^{(2)}) = -\sigma_{\infty} W_1 [\nu \{ \xi_2 - (1+\omega) \} + i\eta_2] \dots\dots\dots (30)$$

$Z_2^{(0)}$ 의 복소 Potential은 다음과 같이 설정한 다.

$$\phi_2(\xi_2) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{ H^R(m) + iH^I(m) \} e^{-m\xi_2} dm$$

$$\Psi_2(\xi_2) = \int_0^{\infty} [\{ G^R(m) + iG^I(m) \} + \frac{\xi_2}{2} \{ H^R(m) + iH^I(m) \} e^{-m\xi_2}] dm \dots\dots\dots (31)$$

식(4)에 의하여 $Z_2^{(2)}$ 에 대응하는 응력장과 변위장은 다음과 같이 표시된다

$$\sigma_{x_2}^{(2)} = -\sigma_{\infty} \int_0^{\infty} m^2 e^{-m\xi_2} [G^R + \xi_2 H^R] \cos(m\eta_2) - (G^I + \xi_2 H^I) \sin(m\eta_2)] dm$$

$$\sigma_{y_2}^{(2)} = \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} e^{-m\xi_2} [\{ m^2 G^R + m(2+m) H^R \} \cos(m\eta_2) - \{ m^2 G^I + m(2+m) H^I \} \sin(m\eta_2)] dm$$

$$\tau_{xy_2}^{(2)} = \sigma_{\infty} \int_0^{\infty} e^{-m\xi_2} [\{ m^2 G^R + m(1+m\xi_2) H^R \} \sin(m\eta_2) + \{ m^2 H^I + m(1+m\xi_2) G^I \} \cos(m\eta_2)] dm \dots\dots\dots (32-a)$$

$$Eu_2^{(2)} = \sigma_{\infty} W_1 \int_0^{\infty} e^{-m\xi_2} [\{ -(1+\nu)mG^R + ((1-\nu) - (1-\nu)m\xi_2)H^R \} \cdot \cos(m\eta_2) + \{ (1+\nu)mG^I - ((1-\nu) - (1+\nu)m\xi_2)H^I \} \cdot \sin(m\eta_2)] dm$$

$$Ev_2^{(2)} = \sigma_{\infty} W_1 \int_0^{\infty} e^{-m\xi_2} [\{ (1+\nu)mG^R + (2+(1+\nu)m\xi_2)H^R \} \sin(m\eta_2) + \{ (1+\nu)mG^I + (2+(1+\nu)m\xi_2)H^I \} \cos(m\eta_2)] dm \dots\dots\dots (32-b)$$

식(29), (30) 및 (32)를 종합하면, region II의 응력함수 $Z_{2(\xi_2)} = Z_2^{(0)} + Z_2^{(2)}$ 는 식(8-a,b)의 region II에 대한 경계조건을 잘 만족하고 있다. 변후경계에서는 $\xi_2 = \omega$ 이며, 변후경계상에서의 $Z_2^{(0)}$ 에 대응하는 응력과 변위는 다음과 같다.

$$u_2^{(0)}|_{\xi_2=\omega} = \frac{1}{E} \sigma_{\infty} W_1 \nu \dots\dots\dots (33)$$

$$v_2^{(0)}|_{\xi_2=\omega} = \frac{1}{E} \sigma_{\infty} W_1 \eta_2$$

변후경계상에서의 $Z_2^{(2)}$ 에 대응하는 응력과 변위는 식(32-a,b)에 $\xi_2 = \omega$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{x_2}^{(2)}|_{\xi_2=1} &= -\sigma_\infty \int_0^\infty m^2 e^m [(G^R + H^R) \cos(m \eta_2) - (G^I + H^I) \cdot \sin(m \eta_2)] dm \\ \tau_{x_2 y_2}^{(2)}|_{\xi_2=1} &= \sigma_\infty \int_0^\infty e^m \{ m^2 G^I + m(1+m)H^I \} \cos(m \eta_2) + \{ m^2 G^R + m(1+m) H^R \} \sin(m \eta_2) \} dm \end{aligned} \quad (34-a)$$

$$\begin{aligned} Eu_2^{(2)}|_{\xi_2=1} &= \sigma_\infty W_1 \int_0^\infty e^m \{ -(1+\nu)mG^R + ((1-\nu) - (1+\nu)m)H^R \} \cdot \cos(m \eta_2) + \{ (1+\nu)mG^I - ((1-\nu) - (1+\nu)m)H^I \} \cdot \sin(m \eta_2) \} dm \\ Eu_2^{(2)}|_{\xi_2=1} &= \sigma_\infty W_1 \int_0^\infty e^m \{ (1+\nu)mG^I + (2 + (1+\nu)m)H^I \} \cos(m \eta_2) + \{ (1+\nu)mG^R + (2 + (1+\nu)m)H^R \} \sin(m \eta_2) \} dm \end{aligned} \quad (34-b)$$

3. 변후경계에서의 평형 및 적합조건

Region I 과 region II에 대하여, 독립적으로 설정된 응력함수들에 대응하는 응력장 및 변위장들은, 변후경계에서의 적합조건인 식(9)와 평형조건인 식(10)을 만족해야 하므로, 다음 관계가 성립해야 한다.

$$\begin{aligned} (u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)})|_{\xi=1, \eta=\eta} &= -(u_2^{(0)} + u_2^{(2)})|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \\ (v^{(0)} + v^{(1)} + v^{(2)})|_{\xi=1, \eta=\eta} &= -(v_2^{(0)} + v_2^{(2)})|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \end{aligned} \quad (35-a)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)})|_{\xi=1, \eta=\eta} &= (\sigma_{x_2}^{(0)} + \sigma_{x_2}^{(2)})|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)})|_{\xi=1, \eta=\eta} &= (\tau_{x_2 y_2}^{(0)} + \tau_{x_2 y_2}^{(2)})|_{\xi_2=\omega, \eta_2=-\eta} \end{aligned} \quad (35-b)$$

식 (23)과 (33-a)에서, $Z^{(0)}$ 와 $Z_2^{(0)}$ 에 대응하는 응력들은 변후경계에서 평형을 이루며, 식(23-b)와 (33-b)를 비교하면, $Z^{(0)}$ 와 $Z_2^{(0)}$ 에 대응하는 변위들은 자체적으로 변후경계에서의 적합조건을 만족하고 있는 것을 알 수 있다. 따라서 식 (3.3-1)에서 $Z^{(0)}$ 와 $Z_2^{(0)}$ 에 대응하는 응력과 변위는 제외하고 식(24)와 (34)를 대입하고, $\beta = t_2/t$, $\eta_2 = -\eta$ 를 대입하면 $Z^{(1)}$ 에 대응하는 변위와 응력들이 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\sigma_x^{(1)}|_{\xi=1} = \sigma_x^{(1)c}|_{\xi=1} + \sigma_x^{(1)s}|_{\xi=1} \quad (36-a)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)c}|_{\xi=1} &= \sigma_\infty \int_0^\infty m^2 e^m \{ -\beta G^R - \beta H^R + A^R + B^R \} \cos(m \eta) dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)s}|_{\xi=1} &= -\sigma_\infty \int_0^\infty m^2 e^m \{ \beta G^I + \beta H^I + A^I + B^I \} \sin(m \eta) dm \end{aligned}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}|_{\xi=1} = \tau_{xy}^{(1)c}|_{\xi=1} + \tau_{xy}^{(1)s}|_{\xi=1} \quad (36-b)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(1)c}|_{\xi=1} &= \sigma_\infty \int_0^\infty e^m \{ \beta m^2 G^I + \beta m(1+m) H^I - m^2 A^I - m(1+m) B^I \} \cos(m \eta) dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(1)s}|_{\xi=1} &= -\sigma_\infty \int_0^\infty e^m \{ \beta m^2 G^R + \beta m(1+m) H^R - m^2 A^R + m(1+m) B^R \} \sin(m \eta) dm \end{aligned}$$

$$Eu^{(1)}|_{\xi=1} = Eu^{(1)c}|_{\xi=1} + Eu^{(1)s}|_{\xi=1} \quad (36-c)$$

여기서,

$$\begin{aligned} Eu^{(1)c}|_{\xi=1} &= \sigma_\infty W_1 \int_0^\infty e^m \{ (1+\nu)mG^R - \{ (1-\nu) - (1+\nu)m \} H^R + (1+\nu)mA^R - \{ (1-\nu) - (1+\nu)m \} B^R \} \cos(m \eta) dm \end{aligned}$$

$$Eu^{(1)s}|_{\xi=1} = \sigma_\infty W_1 \int_0^\infty e^m \{ (1+\nu)mG^I$$

$$\begin{aligned}
 & -\{(1-\nu)-(1+\nu)m\}H^I \\
 & -\{(1+\nu)mA^I+\{(1-\nu) \\
 & -(1+\nu)m\}B^I\}\sin(m\eta)dm \\
 E_V^{(1)}|_{\xi=1}^c &= E_V^{(1)}|_{\xi=1}^c + E_V^{(1)}|_{\xi=1}^s \dots (36-d)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 E_V^{(1)}|_{\xi=1}^c &= -\sigma_\infty W_1 \int_0^\infty e^{m\xi} [(1+\nu)mG^I \\
 & + \{2+(1+\nu)m\}H^{I+(1+\nu)mA^I} \\
 & + \{2+(1+\nu)m\}B^I] \cos(m\eta)dm
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_V^{(1)}|_{\xi=1}^s &= \sigma_\infty W_1 \int_0^\infty e^{m\xi} [(1+\nu)mG^R \\
 & + \{2+(1+\nu)m\}H^R - (1+\nu)mA^R \\
 & - \{2+(1+\nu)m\}B^R] \sin(m\eta)dm
 \end{aligned}$$

4. Crack Tip 응력확대계수해석

균열선단에서의 응력확대계수는 다음식으로 정의된다.

$$\begin{aligned}
 K_I - iK_{II} &= 2\sqrt{2\pi} \sigma_\infty \sqrt{W_1} \lim_{\xi_1 \rightarrow \lambda} \sqrt{\xi_1 - \lambda_1} \phi'(\xi_1) \\
 &= \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \{F_I(\lambda, \beta) - iF_{II}(\lambda, \beta)\} \\
 &\dots\dots\dots (37)
 \end{aligned}$$

여기서, $\sigma_\infty \sqrt{\pi a}$ 는 균일두께의 무한판 내에 있는 균열의 응력확대계수이며, $F(\lambda, \beta)$ 는 수정계수(correction factor)이다.

$\lambda_1 = a/W_1$ 이므로 식(37)에서 $\{F_I(\lambda, \beta) - iF_{II}(\lambda, \beta)\}$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 \{F_I(\lambda, \beta) - iF_{II}(\lambda, \beta)\} &= \\
 & 2\sqrt{\frac{2}{\lambda_1}} \lim_{\xi_1 \rightarrow \lambda} \sqrt{\xi_1 - \lambda} \phi'(\xi_1) \\
 &\dots\dots\dots (38)
 \end{aligned}$$

$X = \lambda_1/\xi_1$ 로 정의하면 식(38)은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 \{F_I(\lambda, \beta) - iF_{II}(\lambda, \beta)\} &= 2\sqrt{2} \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{X}} \sqrt{1-X} \\
 & \{ \phi'(\xi_1)^R + i\phi'(\xi_1)^I \} \\
 &\dots\dots\dots (39)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 \phi'(\xi_1)^R &= \frac{1}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) X^{-n} \\
 & \sum_{q=0}^{\infty} m_n^{(2q+2)R} \lambda_1^{(n+2q+2)} \\
 & - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) X^{2n+2} \\
 & \cdot \sum_{q=0}^{\infty} F_{2n}^{(2n+2q+2)R} \lambda_1^{2q} \\
 & - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) X^{2n+3} \\
 & \sum_{q=0}^{\infty} F_{2n+1}^{(2n+2q+6)R} \lambda_1^{2q+3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi'(\xi_1)^I &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) X^{-n} \\
 & \left\{ \sum_{q=0}^{\infty} m_n^{(2q+2)I} \lambda_1^{(n+2q+2)} \right\} \\
 & - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) X^{2n+2} \\
 & \cdot \left\{ \sum_{q=0}^{\infty} F_{2n}^{(2n+2q+2)I} \lambda_1^{2q} \right\} \\
 & - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) X^{2n+3} \\
 & \left\{ \sum_{q=0}^{\infty} F_{2n+1}^{(2n+2q+6)I} \lambda_1^{2q+3} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_I(\lambda, \beta) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{X}} \sqrt{1-X} + 2\sqrt{2} \\
 & \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{X}} \sqrt{1-X} \sum_{q=0}^{\infty} (n+1) X^{-n} \\
 & \cdot \sum_{q=0}^{\infty} m_n^{(2q+2)R} \lambda_1^{n+2q+2} - 2\sqrt{2} \\
 & \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{X}} \sqrt{1-X} \sum_{q=0}^{\infty} (n+1) X^{2n+2} \\
 & \cdot \sum_{q=0}^{\infty} F_{2n}^{(2q+2q+2)R} \lambda_1^{2q} - 2\sqrt{2} \\
 & \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{X}} \sqrt{1-X} \sum_{q=0}^{\infty} (n+1) X^{2n+3} \\
 & \cdot \sum_{q=0}^{\infty} F_{2n+1}^{(2q+2q+6)R} \lambda_1^{2q+3} \\
 & = \sum_{n=0}^{\infty} f_I(\beta) \lambda_1^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{II}(\lambda) &= -2\sqrt{2} \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{X}} \sqrt{1-X} \\
 &\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) X^{-n} \sum_{q=0}^{\infty} m_n^{(2q+2)I} \lambda^{n+2q+2} \\
 &+ 2\sqrt{2} \lim_{X \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{X}} \sqrt{1-X} \\
 &\quad \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) X^{2n+2} \sum_{q=0}^{\infty} (F_{2n}^{(2q+2q+2)I} \lambda^{2q} \\
 &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) X^{2n+3} \sum_{q=0}^{\infty} F_{2n+1}^{(2n+2q+6)I} \lambda^{2q+3} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{II}(\beta) \lambda^n
 \end{aligned}$$

5. 결과 및 고찰

균열경사각 $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ 에 대하여, thin-to-thick형으로, 두께비 $\beta = 1, 2, 3, 5, 10, 100$ 및 thick-to-thin형으로 $\beta = 0.7, 0.5, 0.3, 0.1, 0.0$ 로 변화시켜 가면서, 무차원균열길이 $\lambda = 0.2 \sim 0.95$ 까지의 수정계수 $F_I(\alpha, \beta, \gamma)$ 과 $F_{II}(\alpha, \beta, \gamma)$ 를 수치해석 했다. 무한급수의 해석은 $\lambda^{21}(n = 21)$ 항 까지 계산하였다. 해석결과는 Figs. 2~4와 같다.

1) Fig. 2a, b는 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우로서, 모드 I 균열 상태이므로 F_{II} 값은 모두 0이다. $\beta = 1$ 인 특별한 경우는 균일두께의 무한판재 내에 있는 모드 I 균열이므로 모든 λ 값에 대하여 $F_I |_{\beta=1} = 1.0$ 으로 나타났다. 또한 $\alpha = 0^\circ$ 에 대한 해석결과는, 두께가 다른 2개의 반무한판재가 결합되고, 그 한쪽에 모드 I 균열이 존재하는 경우에 대한 Isida의 해석 결과⁹⁾와 정량적으로 잘 일치하고 있다. ① $\beta < 1$ (L-S형)인 경우에는, λ 의 증가에 따라 F_I 값은 단순 증가하고 있으며, β 가 작을수록 그 증가도가 크게 나타난다. 따라서 같은 균열 길이에서 β 가 작을수록 F_I 값은 크게 나타나며, $\beta = 0$ 인 곡선은 F_I 값의 최대치를 나타낸다. ② $\beta > 1$ (S-L형)인 경우에는, λ 의 증가에 따라 F_I 값은 단순 감소하고 있으며, β 가 클수록 그 감소도도 크다. 따라서 같은 균열 길이에서 β 가 커질수록 F_I 값은 작게 나타나나, β 가 커질수록 그 감소도의 폭이 점차

줄어 $\beta \rightarrow \infty$ 에서는 F_I 값이 어떤 값에 수렴하게 되므로, 그림의 $\beta = 100$ 인 곡선은 실제적인 F_I 값의 최소치를 나타낸다고 할 수 있다.

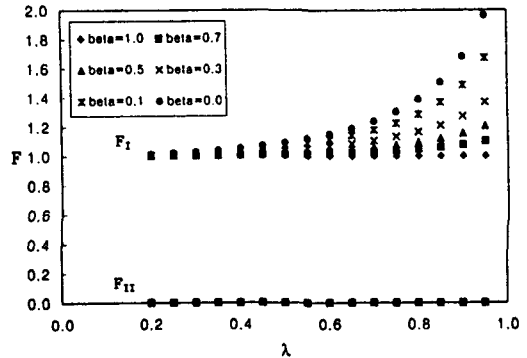


Fig. 2a SIF correction factor values (thick-to-thin type, $\alpha = 0.0^\circ$)

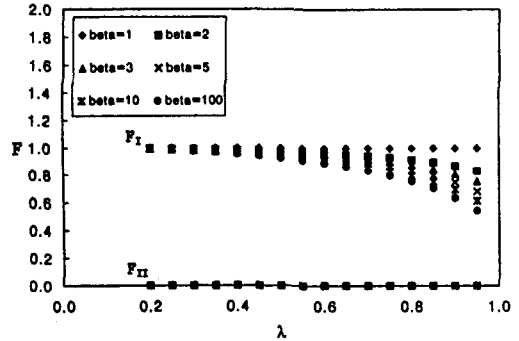


Fig. 2b SIF correction factor values (thin-to-thick type, $\alpha = 0^\circ$)

2) Fig. 3a, b는 $\alpha = 15^\circ$ 인 경우로서, $\beta = 1$ 인 경우는 균일두께의 무한판재 내에 있는 15° 경사 (하중 방향과 75°) 균열이며, 모든 λ 값에서 $F_I |_{\beta=1} = 0.933$ 으로 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우보다 감소했으며, $F_{II} |_{\beta=1} = 0.250$ 으로 나타났다. ① $\beta < 1$ (L-S형)인 경우 $\alpha = 0^\circ$ 일 때와 같이, 같은 균열길이에서 β 가 작을수록 F_I 값은 크게 나타나며, β 의 감소에 따른 F_I 값의 증가폭은 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우보다 작게 나타난다. ② $\beta > 1$ (S-L형)인 경우에도 $\alpha = 0^\circ$ 일 때와 같이, 같은 균열 길이에서 β 가 커질수록 F_I 값은 작게 나타나며, β 의 증가에 따른 F_I 값의

감소폭은 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우보다 작다.

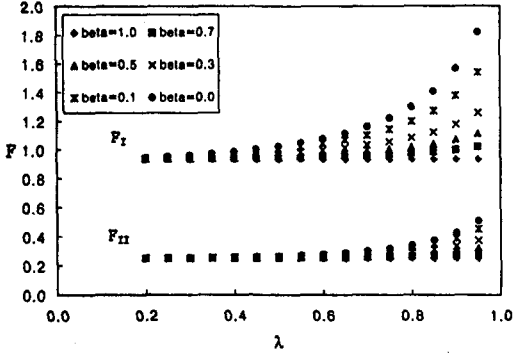


Fig. 3a SIF correction factor values (thick-to-thin type, $\alpha = 15^\circ$)

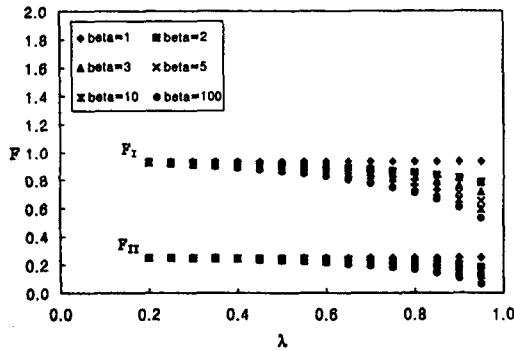


Fig. 3b SIF correction factor values (thin-to-thick type, $\alpha = 15^\circ$)

- 3) Fig. 4a, b는 $\alpha = 30^\circ$ 인 경우로서, $\beta = 1$ 인 때에는 균일두께의 무한판재 내에 있는 30° 경사 (하중 방향과 60°) 균열이 되며, 모든 λ 값에서 $F_I |_{\beta=1} = 0.750$ 으로서, $\alpha = 15^\circ$ 인 경우보다도 더 감소하고, $F_{II} |_{\beta=1} = 0.433$ 으로 $\alpha = 15^\circ$ 인 경우보다 증가한다. 전체적인 $F-\lambda$ 경향은 $\alpha = 0^\circ$ 및 $\alpha = 15^\circ$ 인 경우와 유사하다. $\beta < 1$ (L-S형)인 경우, β 의 감소에 따른 F_I 값의 증가폭은 $\alpha = 15^\circ$ 일 때 보다도 더 작으며, $\beta > 1$ (S-L형)인 경우에도, β 의 증가에 따른 F_I 값의 감소폭은 $\alpha = 15^\circ$ 인 경우보다 더 작다.

6. 결론

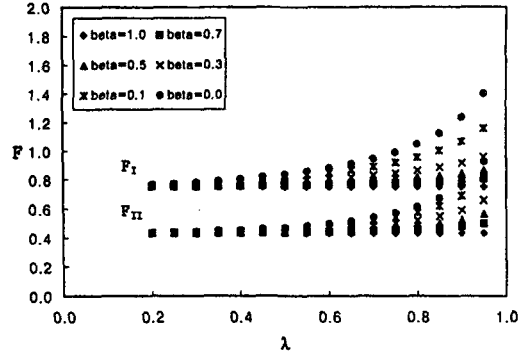


Fig. 4a SIF correction factor values (thick-to-thin type, $\alpha = 30^\circ$)

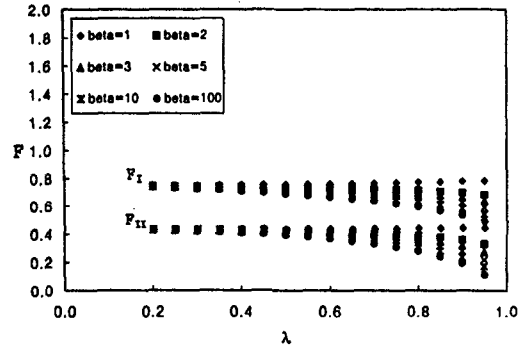


Fig. 4b SIF correction factor values (thin-to-thick type, $\alpha = 30^\circ$)

- $\beta = 1$ 인 경우는 두께가 균일한 무한 판재의 경우가 되고, 이 때의 F_I 및 F_{II} 값은 모든 균열 길이에서 일정한 값으로 나타나며, α 가 커짐에 따라 F_I 는 감소하고, F_{II} 는 증가한다.
- $\beta < 1$ 인 경우에는, λ 가 커짐에 따라 F_I 및 F_{II} 값이 모두 단순 증가하고, β 가 감소함에 따라 그 증가도가 크게 나타나, 같은 α 및 같은 균열 길이 λ 에서, β 가 작을 수록 F_I 및 F_{II} 값은 커진다. 그러나 β 가 작아질수록 그 증가도의 폭이 점차 작아지며, 그 최대값은 $\beta = 0$ 인 곡선이 된다. 또한 α 가 커짐에 따라, β 의 감소에 따른 F_I 및 F_{II} 값의 증가도 폭은 작아진다.
- $\beta > 1$ 인 경우에는, λ 가 커짐에 따라 F_I 및 F_{II} 값이 모두 단순 감소하고, β 가 증가함에 따라 그 감소도가 크게 나타나, 같은 α 및 같은 균열 길이에서 β 가 커질수록 F_I 및 F_{II}

값은 작게 나타난다. 그러나 β 가 커질수록 그 감소도의 폭이 점차 작아지며, 그 최대값은 $\beta \rightarrow \infty$ (본 해석에서는 $\beta = 100$)인 곡선이 된다. 또한 균열 경사각 α 가 커짐에 따라, β 의 증가에 따른 F_I 및 F_{II} 값의 감소도 폭은 작아진다.

본 연구는 1996년도 한국학술진흥재단 자유공모과제 연구비지원으로 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- 1) W.H. Yang, Y.S. Choy and M.R. Cho, "A Fracture Mechanics Analysis of a Crack in a Variable Thickness Plate Having Fillet (Thin-to-Thick Type)", Engng F.M., Vol. 42, No. 1, pp. 117~128, 1992.
- 2) Y. H. Chen, H. G. Haha, "Interaction of a Stiffener With a Crack in an Anisotropic Sheet", Engng F.M., Vol. 33, No. 6, pp. 887~895, 1989.
- 3) J. Zuidema and H.S. Blaauw, "Slant Fatigue Crack Growth in Al 2024 Sheet Material", Engng F.M., Vol. 29, No. 4, pp. 401~413, 1988.
- 4) M. Isida, "On the Determination of Stress Intensity Factors for Some Common Structural Problems", Engng F.M., Vol. 2, pp. 61~79, 1970.
- 5) M.M. Ratwani and H.P. Kan, "Analysis and Growth of Cracks in Skins with Variable Thickness", F.M. Fifteenth Sympo., ASTM STP 833, pp. 44~56, 1984.
- 6) 徳田直明, 山本善之, "板構造物中のクラック應力擴大係數の有限要素法による解析法", 日本造船學會 論文集, Vol. 130, pp. 221~235, 1971.