韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1997. 6. 제 36권, 제 1호, 11-22.

J. Korea. Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Jun. 1997, Vol. 36, No. 1, 11-22.

중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구

송 순 희 (이화여자대학교)
오 정 현 (광남중학교)

I. 서 론

A. 연구의 필요성 및 목적

교육의 목적은 창조적인 인간상(creativity), 유용성 있는 인간상(utilitarian), 심미감 있는 인간상(esthetic)의 구현으로서, 이에 따르는 수학교육의 목적은 크게 두가지로 나누어 생각할 수 있다.

하나는 수학 지식의 습득, 기능의 습득과 같은 직접적인 것으로 그것들의 응용 및 적용이며, 다른 하나는 간접적인 것으로 수학적 사고의 신장과 수학적 태도의 함양이다.

여기서 수학적 사고라 함은 '대상을 수학적으로 보고 생각하며 수학을 만들고 다듬어 가는데 근원이 되는 생각'을 의미하는데, 수학적으로 사고하도록 가르친다는 것은 수학적 안목으로 문제를 해결하는 능력을 개발한다는 것과 동일시 될 수 있다. 그러므로 교사에게 주어진 임무는 수학적 문제해결(mathematical problem solving) 학습이라 할 수 있다. 문제 해결 학습은 실생활에 응용된 문제 상황을 통하여 수학적 개념의 이해와 사고교육을 동시에 하는 것을 의미하므로, 우리의 생활주변에서 일어나는 현상을 관찰하여 그 속에 내재된 어떤 법칙과 원리, 형식을 발견하여 구조화 시키고 추상화 시키는, 즉, 내적·외적 상황을 "함수적"인 관점에서 파악 처리하는 함수적 사고의 함양이 필수적으로 요구된다.

그러나, 학습현장에서 실시되고 있는 함수지도가 함수적 경험에 의한 함수적 사고의 신장에 있기보다는 이미 생성된 산물로서의 지식을 전달, 습득시키는데 급급하고 있고 '함수'라는 용어에서부터 느끼는 학생들의 이질감과 개념 이해의 불충분, 학습 문제 풀이에서의 미성취 즉 오류를 발견하게 된다.

이러한 어려움에 대한 해결은 우선 교육현장에서 학생들의 인지수준을 파악하고 그 인지수준에 알맞은 학습지도안을 충분히 짜는데 있으며, 문제 해결 과정에서 발생되는 학생들의 오류를 파악하고 그 오류에 대한 지도방법을 개선하고 고안하는데 있다.

따라서 본 연구의 함수적 사고의 신장과 함수적 능력의 발전을 위해, 중학교 학생들이 함수영역에서 저지르는 수학적 오류들을 분석·연구함으로써 교수 학습시 참고자료로 사용하고자 한다.

B. 연구의 방법

본 연구는 오류에 관한 이론적 고찰과 조사연구로 이루어졌다. 오류에 관한 이론적 고찰을 위해 수집된 문헌들은 오류의 분류 및 실험에 대한 선행 논문들이다.

한편, 조사 연구는 중학교 2,3학년 학생들을 대상으로 전(前)학년에 학습한 수학단원에 대한 설문조사로써, 함수영역에 대한 학생들의 태도를 살펴보았고, 중학교 1,2,3학년 학생들에게 교육과정에 준하는 함수영역의 문제들을 선별하여 테스트를 실시하였다.

테스트 실시후 각 오류들을 학년별로 분류하여 빈도수를 측정하고, 학년별 오류의 특성을 비교하였으며, 모든 학년의 오류빈도수를 합산

하여 함수영역에서의 학생들의 오류 빈도수를 분석하였다.

C. 연구문제

본 연구를 위한 연구문제는 다음과 같다.

1. 중학교 함수 영역에서 발생하는 오류를 분석하여 오류 모델을 설정하고 가장 많은 오류를 찾는다.
2. 오류의 내용상 특징을 살펴본다.

II. 이론적 고찰

A. 오류의 정의

오류(error)의 정의를 「국어 대사전」에서 찾아보면 '그릇되어 이치에 어긋남', '이치에 어긋난 인식'등으로 되어 있고, 「교육학 용어사전」에서는 '논리학에 있어서 바르지 못한 논리적 과정, 특히 외견상 바르게 보이면서 틀린 추리, 통속적 의미로는 참이 아닌 것으로 쓰이기도 하며, 착각·관측상의 오차 등으로 인한 지각상(知覺上)의 착오를 가리키기도 함' 등으로 풀이하고 있다. 본 연구에서 말하는 오류는 수학적 오류 즉, '수학의 개념상 바르지 못한 논리과정' 만을 의미한다.

B. 오류에 대한 실험 연구사례

1. 오류 연구

수학교육에서 오류에 관한 연구는 오랜 역사를 지니고 있다. 미국에서는 1925년경 Buswell과 Judd가 산술적인 오류를 진단하여 30개 이상의 연구를 한 바 있고, 독일에서는 Weimer(1925)와 Seemann(1929)이 오류를 연구하였다. 미국 연구의 방법과 가설은 행동주의에 기원을 두고 있는 반면, 독일 등 유럽은 Gestalt theory와 교육학적인 개혁자들의 생각에 영향을 받는 등 학교 체제 구조의 차이에서부터 오류분석면에 있어 매우 다른 출발과 관심의 차이가 있었다. 그러나 최근에는 산술적 계산에서의 오류에만 제한되지 않고 여러 방면으로 오류분석에 관심이 분산 증가되었다.

1970년대 이후로는 미국의 Boyd Holtan과 J. Dan Knifong (1976), 독일의 Hendri Radatz (1979), 오스트레일리아에서 Clements (1980)과 Newman (1981), 이스라엘의 Nitsa Movshovitz - Hadar와 Orit Zaslavsky(1987)등 각국의 수학자들이 오류에 관한 연구를 활발히 하고 있다.

2. 실험연구사례 및 오류의 분류

J. Dan Knifong과 Boyd Holtan (1976)은 초등학교 6학년 학생 35명을 대상으로 MAT (Metropolitan Achievement Test)를 실시한 후 학생들의 오답을 분류하였다.

독일의 Hendrik Radatz(1979)는 오류를 범하게 되는 범주를 언어의 난이성, 공간적인 정보 획득의 어려움, 필수적인 기술, 사실, 개념의 부족한 숙련, 사고의 경직 혹은 부정확한 연합, 부적절한 규칙이나 전략의 적용 등 5가지로 구분하여 제안했다. 이전에 Pippig(1975)는 이 오류 범주 중 사고의 경직이나 부정확한 연합에 의한 오류, 반대의 치환으로부터 생기는 오류들을 보존의 오류, 연합의 오류, 방해의 오류, 동화의 오류, 전작업으로터의 반대 치환의 오류로 분류했었다. 또한 Newman (1981)과 Clements (1980)는 오스트레일리아에서 5-7학년을 대상으로 테스트를 실시하여 읽기 단계, 이해단계, 변환단계, 처리기술단계, 기록단계, 부주의로 인한 6가지 오류로 분류했다.

이스라엘의 Nitsa Movshovitz Hadar와 Orit Zaslavsky는 고등학교 학생들이 수학 졸업 시험에서 범한 오류들을 분석하여 잘못 이용된 자료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적절한 추론, 곡해된 정리나 정의, 논증되지 않은 해답,

기술적 오류의 여섯 가지로 분류했다.

김옥경 (1990)도 고등학교 학생들을 대상으로 테스트를 실시하고 오류를 분석 연구하여 오류의 분류 모델을 제시하였는데 이 오류 분류 모델은 여덟가지 범주로 Hadar의 여섯가지 범주에 '풀이 과정이 생략된 오류'와 오류의 애매 모호성'이 추가된 것이다.

이상에서 살펴본 것처럼 수학에서 발생하는 오류에 대한 연구가 각 국에서 많은 수학교육자들에 의해 다양한 측면에서 이루어지고 있음을 알 수 있다.

III. 조사 연구

A. 표본 설정 및 배경

본 연구는 서울에 소재한 광남 중학교 1,2,3학년 학생 147명(1학년 48명, 2학년 51명, 3학년 48명)을 대상으로 실시하였다.

함수 부문에 대한 학생들의 태도를 알아보기 위하여 2,3학년을 대상으로 설문조사를 하였고, 함수 단원에 대한 테스트는 1,2,3학년에게 모두 실시하였다.

B. 설문 조사

설문조사는 전(前)학년에 배운 수학 단원에 대한 학생들의 심리적, 경험적 태도를 알아보기 위한 것으로 2학년에게는 문항 1에, 3학년에게는 문항 1,2에 모두 답해 줄 것을 요구하였다.

설문의 내용 및 그 결과는 다음과 같다.

<설문> 다음은 1,2학년때 배웠던 단원명입니다. 가장 어려웠던 단원에 1번, 그 다음으로 어려웠던 단원에 2번을 써 주십시오.

문항 1. <1학년 수학 과정>

집합과 자연수 (　)
수와 식 (　)
일차 방정식 (　)
함수와 그래프 (　)
자료의 정리 (　)
도형의 기초 (　)
도형의 성질 (　)
도형의 관찰 (　)

문항 2. <2학년 수학 과정>

수와 연산 (　)
방정식 (　)
부등식 (　)
일차 함수 (　)
확률 (　)
도형의 성질 (　)
도형의 닮음 (　)

<표 1> 1학년 과정에 대한 설문 응답 결과 (%)

	2학년		3학년	
	1순위	2순위	1순위	2순위
집합과 자연수	6.8	19.1	9.3	9.8
수와 식	2.3	2.4	4.7	7.3
일차 방정식	6.8	23.8	4.7	12.2
함수와 그래프	68.2	11.9	41.9	12.2
자료의 정리	2.3	4.8	9.3	14.6
도형의 기초	0.0	4.8	2.3	9.8
도형의 성질	2.3	7.1	23.3	14.6
도형의 관찰	11.4	26.2	4.7	19.5

<표 2> 2학년 과정에 대한 설문 응답 결과 (%)

문항 2	3학년	
	1순위	2순위
수와 연산	6.8	0
방정식	11.4	2.3
부등식	6.8	9.3
일차함수	13.6	18.6
확률	34.1	11.6
도형의 성질	15.9	32.6
도형의 닮음	11.4	25.6

설문 조사 결과를 보면 1학년 과정에 대한 응답은 2,3학년 모두 '함수와 그래프'단원을 가장 어려웠다고 응답하였으나 (2학년 68.2%, 3학년 41.9%), 2학년 과정에 대한 3학년의 응답은 '확률(34.1%)', '도형의 성질(15.9%)' 단원 다음으로 '일차함수(13.6%)' 단원을 어려웠던 것으로 응답하였다.

이것은 '함수'라는 용어를 처음 접하게 되고 개념을 익히게 되는 1학년때의 학생들의 심리적, 경험적인 어려움을 의미하며, 2학년이 되어서는 2학년때 새로 등장하는 확률과 도형의 증명 등에 대한 부담감에 비해 함수에 대한 부담은 상대적으로 낮아진다는 것을 의미한다. 그러나 낮아진 부담감만큼 실제 문제 풀이 과정에서도 학생들이 함수에 대한 이해가 높아지고, 정답을 내는 비율이 올라갔다고는 말할 수 없다.

C. 텍스트의 타당성 및 난이도

테스트 문항 구성은 최근 출제되었던 고입 연합고사의 문제들을 기초로 하는 것이 타당하다는 결론을 얻었다.

문제의 난이도는 문제에 대한 학생들의 답안을 토대로, 각 문항별로 측정하여 소수 첫째 자리에서 반올림 하였는데 그 방법은 다음과 같다.
난이도=(R/N)×100 (N:총 응답자수, R:정답자수)

<표 3> 테스트의 난이도

문항 / 학년	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	90	90	58	56	63	81	81	42	29	63	77
2	73	39	69	53	39	51	54	45	27	18	45
3	85	83	65	83	41	48	46	57	59	54	54

문항 / 학년	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	54	77	65	85	56	56	62	..	..	..	..
2	37	25	18	22	6	51	8	41	..	..	..
3	43	43	63	46	50	28	30	24	39	17	43

<표 3>에 의거하여 평균 난이도를 계산해 보면 1학년(65.83%)이 가장 높고, 3학년(50.05%), 2학년(37.95%) 순으로 나타났다.

일반적으로 검사 이론상 난이도가 50%일때 가장 분별을 잘한 검사임을 고려한다면, 3학년의 테스트 문제가 가장 적절했다고 해석할 수 있다.

D. 오류 분석 방법

오류는 학생들의 답안을 채점한 후 학생들이 문제 풀이 과정에서 보여준 풀이 방법을 분석하여 오답을 쓰기까지의 원인을 성질에 따라(qualitative method) 분류하였다. 학생들이 정답을 맞추지 못한 경우라도 전혀 어떤 풀이 과정이나 답을 제시하지 않는 경우와 흐릿한 글씨로 알아볼 수 없도록 쓴 경우도 무응답으로 처리하여 본 연구에서 제외시켰으며, 문제를 푸는 과정에서 여러가지 오류가 발생한 경우에는 처음으로 발생한 오류만을 분석하여 선행된 오류로부터 발생한 다음 단계의 오류는 포함시키지 않았다.

1학년 48명으로부터 208개의 오류를 추출하였으며, 2학년 51명으로부터는 264개, 3학년 48명으로 부터는 118개의 오류를 추출하여 총 590개의 오류가 선정되었다.

연구자는 처음에 오류를 분석하기 위해 국내외 연구 자료를 참고로 하여 검토한 결과 Nitsa Movshovitz Hadar와 Orit Zaslavsky (1987)가 오류 모델로 제시한 6가지 모델에 풀이 과정의 생략과 오류의 애매 모호성을 추가하여 8가지 오류 모델을 설정한 김옥경(1990)의 분류 모델을 채택하였다. 그러나 학생들의 오답을 분석한 결과 중학교 함수 영역의 문제 형태 및 수준에 있어 정리나 정의의 부적절한 사용에서 오는 오류로 분류하기 보다는 '필수적인 사실, 개념의 부족한 숙련(Deficient mastery of prerequisite facts and concepts)'에서 오는 오류로 분류함이 절절하다는 판단하에 오용된 자

료, 잘못 해석된 언어, 논리적으로 부적절한 추론, 필수적인 사실과 개념의 부족한 숙련, 요구되지 않은 해답, 기술적 오류, 풀이 과정이 생략된 오류 등 7가지 모델을 설정하여, 학생들이 문제 풀이에 자신이 없어서 흐릿한 글씨로 알아볼 수 없도록 쓴 경우도 본 연구에서 분류할 대상으로 선정하지 않았으므로 '오류의 애매 모호성' 범주는 제외시켰다.

IV. 오류 분석 결과

A. 오류 모델에 따른 오류 분석

수학 내용의 논제들에서 발생하는 오류들의 다양한 원인은 수학적인 정보들을 얻고, 처리하고, 보유하고, 재생산하는데 쓰이는 기재들을 조사함으로서 확인될 수 있지만, 주어진 오류에 있을 수 있는 원인을 정확하게 분리한다는 것은 매우 어렵다. 왜냐하면 그 원인들 사이에는 어떤 밀접한 상호 작용이 있기 때문이다. 그러나 현장에서 학생들을 지도하는 교사에게는 오류 원인에 대한 인지적인 모델을 가진 오류 유형에 대한 연구 및 결과가 학생들을 이해하는데 도움이 되고 다음 지도 계획을 적절히 구성할 수 있으므로 필수적으로 요구된다.

다음은 테스트를 통한 오류들을 7가지 모델로 분류한 것으로써, 분류 기준이나 세부 내용을 정리하여 제시한 것이다(Nitsa Movshovitz Hadar & Orit Zaslavsky, 1987).

1. 오용된 자료 (Misused data)

(1) 문제에 주어진 정보로부터 바로 얻을 수 없고, 진술되지도 않은 것을 마치 하나의 주어진 정보처럼 지적하는 경우
(2) 답을 구하기 위해서 필요한 주어진 자료를 무시하고 임의로 관련이 없는 자료를 보탬으로써 정보의 부족을 보충하는 경우
(3) 문제를 풀기 위해 옮겨 쓰는 과정에서 어떤 세부 항목을 잘못 옮겨 쓰는 경우

2. 잘못 해석된 언어(Misinterpreted language)

(1) 문제에서 제시하고 있는 것과는 다른 의미로 해석하여 수학적인 수식이나 용어로 나타내는 경우
(2) 그래프상의 기호를 수학적 용어로 잘못 해석 하거나 그 반대의 경우

3. 논리적으로 부적절한 추론 (Logically invalid inference) : 일반적으로 귀납 또는 연역적인 추론 도중에 발생하는 불합리한 추론

4. 필수적인 사실·개념의 부족한 숙련 (Deficient mastery of prerequisite facts and concepts) : 수학 문제 풀이 과정시 필수적인 내용, 지식의 결함에서 오는 경우

(1) 알고리즘의 무지에서 오는 경우
(2) 기초적인 사실의 부족한 숙련에서 오는 경우
(3) 필수적인 개념과 상징의 불충분한 지식에서 오는 경우

5. 요구되지 않은 해답 (Unmatched solution) : 학생들의 풀이과정 각 단계는 옳지만 제시된 마지막 결과는 문제에서 요구하는 해답이 아닌 경우, 즉 문제의 이해 과정에서 주어진 문제의 마지막 목표가 무엇인지 확인하지 않는데서 생기는 오류

6. 기술적 오류(Technical errors)

(1) 계산상의 오류
(2) 도표로부터 자료를 뽑을때의 오류
(3) 대수 기호를 다룰 때의 오류
(4) 초등학교에서 습득된 연산 방식에서의 오류

(5) +, - 를 잘못 사용하거나 빠뜨리는 경우

7. 풀이 과정의 생략 (Omission of solving process)

(1) 풀이 과정이 없이 답만을 제시한 경우
(2) 현 단계까지의 풀이 과정은 옳으나 다음 단계의 풀이 과정이 제시 되지 않는 경우

이상의 분류 모델에 따른 각 학년별 오류 빈도수를 살펴보면 다음 <표 4>와 같다.

<표 4> 학년별 오류 범주별 빈도수

오류종류 \ 학년	1학년	2학년	3학년	합계
오용된 자료	13 (6.3%)	17 (6.4%)	5 (4.2%)	35 (5.9%)
잘못 해석된 언어	6 (2.9%)	0 (0%)	0 (0%)	6 (1.0%)
논리적으로 부적절한 추론	26 (12.5%)	33 (12.5%)	19 (16.1%)	78 (13.2%)
필수적인 사실·개념의 부족한 숙련	83 (39.9%)	91 (34.5%)	19 (16.1%)	193 (32.7%)
요구되지 않은 해답	4 (1.9%)	6 (2.3%)	8 (6.8%)	18 (3.1%)
기술적 오류	61 (29.3%)	57 (21.6%)	32 (27.1%)	150 (25.4%)
풀이과정의 생략	15 (7.2%)	60 (22.7%)	35 (29.7%)	110 (18.6%)
합 계	208	264	18	590

이상에서 보면 중학교 학생들을 필수적인 사실이나 개념의 부족한 숙련에서 오는 오류가 가장 많고 기술적인 숙련의 부족에서 오는 오류도 흔히 범하게 되는 오류임을 알 수 있다. 그러나 학년별로 살펴보면 학년이 높아질수록 필수적인 사실, 개념의 부족한 숙련에서 오는 오류는 감소하는 대신 풀이 과정의 생략은 점점 증가함을 볼 수 있고, 기술적인 오류는 전학년에 걸쳐 중요한 오류 범주 중의 하나로 자리잡고 있다. 그러나 이것은 학년이 높아질수록 필수적인 사실, 개념에 대한 습득이 잘 된다기보다는 문제 풀이 과정에서 다음 단계가 잘 추론되지 않을 경우 풀이과정을 더 이상 계속하지 않기 때문이라고 지적된다. 실제로 시험지의 분석 결과 3학년의 경우, 풀이 과정을 중도에 포기하거나 문제 풀이에 대한 자신이 없어 임의의 답만을 제시한 경우, 혹은 아예 답을 쓰지 않은 경우가 빈번하다. 학생들의 오류 빈도수를 문항별로 살펴보면 문항에 따른 오류의 특징을 잘 알 수 있는데 그 내용은 다음 <표 5>와 같다.

<표 5> 문항별 오류 빈도수

A: 오용된 자료
B: 잘못 해석된 언어
C: 논리적으로 부적절한 추론
D: 필수적인 사실·개념의 부족한 숙련
E: 요구되지 않은 해답
F: 기술적 오류
G: 풀이 과정의 생략

B. 학생들의 풀이 과정 비교

Ginsburg(1977)는 오류는 체계적인 규칙에 근거를 두고 있으며 오류는 좀처럼 변덕스럽거나 임의적이지 않다고 하였다. 그러나 학생들의 테스트 답안을 분석하면서 오류의 원인을 분리한다는 것은 매우 어려운 일임을 알 수 있었다.

다음은 오류 유형별로 학생들의 '옳게 푼 풀이 과정<T>'과 '오류가 발생한 풀이과정<F>'을 비교한 것이다.

1. 오용된 자료

* <u>3학년 18번 문항</u>
: 정의역이 $\{x|-2\leq x\leq 3\}$인 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 최대값을 M, 최소값을 m이라 할 때, $M-m$을 계산하시오.

<T>

$$\begin{aligned} y &= x^2-2x-3 \\ &= (x-1)^2-4 \end{aligned}$$

* 1학년

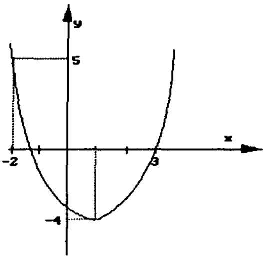
오류 \ 문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	1									5							1	6
B					6													
C				18						1	1	2	2	2				
D	2	4	6	2	1			10	29	2		13	1	12	1			
E			3													1		
F	1		10		6	3	3	13			1	1				6	10	7
G							2				4	1	1		3	1	3	
합 계	4	4	19	20	13	3	5	23	29	8	6	17	4	14	4	8	14	13

* 2학년

오류 \ 문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
A					5		1	2	3	1	1	1			3				
B		1			4	1	1		4	7	1	2	2			5		5	
C																			
D	1	6	6	7	3	11	1	2	9	5	10	9	6	3	6		4	2	0
E							2			2	1			1					
F	3	4	1	1	2		3	3	3	2	2	2	8	4	9	1	7		2
G		3		2	2	1	2	3	3	5	4	2	3	6	1	4	1	18	
합 계	4	14	7	10	16	13	10	10	22	22	19	16	19	14	19	10	12	2	2

* 3학년

오류 \ 문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
A												1	1					3				
B																						
C			3	1	1	8		1	1							3					1	
D		1	1		2	3		1	1	5	1		2	1					1			
E	1				5								1	1								
F				3	3	2	4		2		4		1	3	5		2		1		1	
G		1	3	1	2	5	2	1	6			2	2	1	1	1	1	1	2		3	
합 계	1	2	7	5	13	18	6	3	10	5	5	3	7	6	6	4	3		4		5	



최대값 $M=5$
최소값 $m=-4$
$\therefore\ M-m=9$

<F>

$y=x^2-2x-3$의
$x=-2$, 최대값 $M=4+4-3$
$x=3$일때, 최소값 $m=9-6-3$
$\therefore\ M-m=5$

2. 잘못 해석된 언어

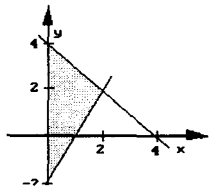
* 1학년 5번 문항
: $X=\{x \mid |x| \le 2$인정수$\}$일때 $y=-2x$로 정해지는 함수 $f: X\to Y$에 대하여 정의역과 치역을 쓰시오.

<T>
정의역 : {-2, -1, 0, 1, 2}
치 역 : {-4, -2, 0, 2, 4}
<F>
정의역 : {-2, -1, 0, 1, 2}
$=\{x \mid |x| \le 2\}$
치 역 : {-4, -2, 0, 2, 4}
$=\{x \mid |x| \le 4\}$

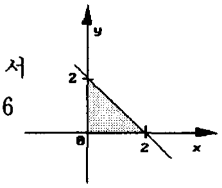
3. 논리적으로 부적절한 추론

* 2학년 10번 문항
: 일차함수 $y=-x+4$, $y=2x-2$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

<T>
$-x+4=2x-2$
$x=2$
$y=2, (2,2)$: 교점
$\therefore$ 넓이 : $6\times2\div2=6$



<F>
$y=-x+4$, $y=2x-2$에서
$-x+4=2x-2$, $3x=-6$
$x=2$, $y=2$
$\therefore$ 넓이 : $2\times2\div2=2$



4. 필수적인 사실, 개념의 부족한 숙련

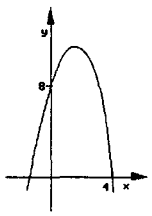
* 2학년 4번 문항
: 일차함수 $x-y-3=0$의 기울기를 쓰시오.

<T>
$x-y-3=0$
$-y=-x+3$
$y=x-3$
$\therefore$ 기울기 : 1
<F>
$x-y-3=0$
$y=x-3$
$\therefore$ 기울기 : -3

5. 요구되지 않은 해답

* 3학년 13번 문항
: 그림의 포물선은 $y=-x^2+bx+c$의 그래프이다. $b+c$는?

<T>
(4, 0), (0, 8)을 $y=-x^2+bx+c$에 대입
$c=8$, $-16+4b+8=0$, $b=2$
$\therefore\ b+c=2+8=10$



<F>

(4, 0), (0, 4)을 $y=-x^2+bx+c$에 대입

c=8, $b=2$

$y=-x^2+2x+8$

$=-(x-1)^2+9$

$\therefore$ (1, 9)

6. 기술적 오류

* 3학년 11번 문항

: 이차함수 $y=2x^2-4x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 $y=2x^2+8x+3$의 그래프가 되었다면, a^2+b^2은 얼마인가?

<T>

$y=2x^2-4x+1$

$=2(x-1)^2-1$

$y=2x^2+8x+3$

$=2(x^2+2)-5$

$-a-1=2, \ -1+b=-5$

$a=-3, \ b=-4$

$\therefore \ a^2+b^2=9+16=25$

<F>

$y=2(x-a)^2-4(x-a)+1+b$

$=2(x^2-2ax+a^2)-4x+4a+1+b$

$=2x^2-4ax+2a^2-4x+4a+1+b$

$=2x^2-4x(a+1)+2a^2+4a+1+b$

$y=2x^2+8x+3$

$a+1=2, \ 2a^2+4a+1+b=3$

$a=1, \ b=-4$

$\therefore \ a^2+b^2=1+16=17$

그외 순서쌍기호 ( )의 생략, 단위 쓰기에서의 오류 등이 발견된다.

7. 풀이 과정의 생략

* 3학년 14번 문제

: $y=x^2-4x+a$는 점(1, 1)을 지난다. 꼭지점의 좌표는?

<T>

$y=x^2-4x+a$

$1=1-4+a$

$a=4$

$y=x^2-4x+4$

$=(x-2)^2$

$\therefore$ (2, 0)

<F>

$y=x^2-4x+a$

$a=4$

$y=x^2-4x+4$

$=(x-2)^2$

(최종답을 제시하지 않음)

그외, $a+b$의 값이나, $p+q$의 값을 요구하는 문항에서 a와 b, p와 q의 값을 각각 구해놓은 채 최종답을 생략한 경우가 흔히 발견된다.

C. 함수 영역에서의 오류의 특징

이상 학생들의 시험 답안지를 분석하고 오류를 분류하여 오류 모델을 제시하고, 정답자와 오답자의 답안을 비교하였다. 다음은 각 학년별로 함수 영역에서 학생들이 저지르는 오류의 내용상 특징을 나열한 것이다.

<1학년>

• 함수에 대한 개념 중 특히 함수값에 대한 개념이 부족하다. 함수 $f: X \to Y$에서 치역 $\{f(x) | f(x) \in Y,\ x \in X\}$를 이해하지 못하고 $f(x)$를 X의 원소로 착각한다.

• 어떤 대응이 함수인지를 선별하는 능력은 뛰어나나 가능한한 함수의 개수와 순서쌍의 개수에 혼돈을 일으키며, 함수의 개수를 맞춘 학생일지라도 추론에 의한다기 보다는 실제로 화살표로 대응시키면서 함수의 개수를 일일히 센 흔적을 볼 수 있다.

• 정의역과 치역을 쓸때 집합 기호를 쓰지않는 학생이 많은 것으로 보아 함수는 두 집합의 원소 사이의 대응이라는 개념이 부족하다.

• 연속에 대한 개념 부족과 수에 대한 감각이 자연수, 정수에 익숙해져 있어 $|x| \leq 2$를 -2, -1, 0, 1, 2로 생각한다.

• 좌표평면상의 점의 좌표를 읽을때, 특히 좌표축에 있는 점의 좌표를 읽을 때 오류가 발생한다.

• 정비례함수와 증가함수와의 혼돈이 있다. 특히 $y = ax + b (b \neq 0)$꼴도 정비례식이라고 생각하는 학생이 많다. 또 실제로 학생들을 지도해 본 경험에 의하면 $y = ax$에서 a가 음수인 경우를 반비례함수라고 생각하는 학생이 많다. 이것도 감소함수와 반비례함수에 대한 혼돈에서 연유한다.

• 반비례함수에 대한 개념의 부족으로 식을 세우는데 오류가 많지만 실생활과 관련된 응용문제에서는 많은 학생이 정답을 내었다.

• 그외 +, −의 처리, 순서쌍기호 (a, b)의 처리에서의 오류가 빈번하다.

<2학년>

• x, y의 증가량을 계산하여 기울기를 구할 때 뺄셈 계산에서의 오류가 발생한다.

• 절편에 대한 개념이 부족하여 $y = ax + b$에서 a를 x절편으로 잘못 아는 경우가 있으며, 개념이 있는 학생일지라도 절편을 구하는 문제에서 $(a, 0)$ 또는 $(0, b)$로 좌표로 제시하는 경우가 많다.

• 평행이동의 경우 특히 +, −의 개념이 혼돈되고 있는데 이는 문제 이해의 불충분에서 오는 경우가 많다.

• $ax + by + c = 0$의 식을 $y = ax + b$의 형태로 고칠때는 기술적인 오류(계산상의 오류)가 많다.

• 그래프를 보고 기울기를 읽는 능력이 부족한데 특히 좌표상에 게시되어 있는 숫자에 학생들이 집착을 보인다.

• 두 직선에 의해 둘러싸인 넓이의 문제는 무조건 x절편과 y절편으로만 풀려는 경향이 있고 교점을 생각하지 않는다.

• 수로 제시된 문제에는 익숙하지만 그래프에 대한 개념을 묻는 문자로 처리된 문제(2학년 16번, 18번, 3학년 16번)는 익숙치 않으며 성취도가 극히 낮다. 즉 구체적인 문제에 비해 형식적인 문제에 약하다.

<3학년>

• 꼭지점이 x축 위에 있는 식을 찾을 때 인수분해가 잘 되는 식을 고르는 경향이 있다.

• $y = a(x-m)^2 + n$의 꼭지점(m, n)을 구하는 문제에 익숙한 나머지 $y = ax^2 + n$형태의 식이 $m = 0$인 경우임을 알지 못하고 억지로 식을 지어내는 경우가 많다.

• 역시 평행이동의 경우 +, −에서의 오류가 많고, 괄호의 처리에 미숙하다.

• 좌표평면상의 그래프를 이해하거나 좌표를 읽는데 여전히 부족하다.

• 2차함수의 최대값, 최소값을 묻는 문제에

서 정의역의 양끝의 숫자만을 대입하여 문제를 풀려고 한다.

• 2차함수와 2차방정식의 관계를 이해하는데 부족하다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 오류에 대한 선행연구들을 고찰하고, 중학교 함수 영역에서 발생하는 오류를 분석 연구하여 분류 모델을 제시한 것으로써 그 내용은 다음과 같다.

(1) 오용된 자료(Misused data)
(2) 잘못 해석된 언어 (Misinterpreted language)
(3) 논리적으로 부적절한 추론 (Logically invalid inference)
(4) 필수적인 사실·개념의 부족한 숙련 (Deficient mastery of prerequisite facts and concepts)
(5) 요구되지 않은 해답(Unmatched solution)
(6) 기술적 오류(Technical errors)
(7) 풀이 과정이 생략된 오류 (Omission of solving problem)

이러한 오류 모델에 의한 학생들의 풀이 과정을 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 학생들은 필수적인 사실이나 개념에 대한 이해 및 숙련이 부족하다.

둘째, 학생들은 계산상의 오류 및 기호를 처리하는데서 오는 기술적인 오류를 흔히 범한다.

셋째, 문제를 다 풀어놓고서도 최종적인 답만을 제시하지 않는 경우가 있었으며, 풀이 과정 없이 임의의 답만을 제시한 경우가 많았는데 고학년 일수록 그런 경향이 나타났다.

넷째, 학생들은 참고서를 통한 틀에 박힌 문제 유형에 너무나 익숙해져 있어서 다른 유형의 문제로 나름대로 해석하여 풀이하거나 부적절한 추론을 하는 경우가 있었다.

다섯째, 주어진 조건이나 자료를 무시하거나 빠뜨린 경우가 있었다.

따라서 이같은 오류들의 분석 결과에 대한 제언으로 학생들을 지도함에 있어 다음과 같은 내용을 강조하고자 한다.

첫째, 함수의 본질을 다루는 충분한 개념학습을 강조함과 아울러 이를 활용할 수 있는 지도에 중점을 두어야 한다.

둘째, 교사들은 공책검사 및 평가를 통해 학생들의 답안을 분석 체크하여 학생에게 틀린 부분을 알려줌으로써 오류의 재반복 및 기술적 오류를 최소화해야 한다.

셋째, 학생들에게 문제에 주어진 조건을 종합 재구성할 수 있는 능력을 길러주며, 최종 답을 쓰기전에 문제를 다시 살피는 습관을 기르도록 지도한다.

네째, 동일한 문제에 대한 풀이 방법을 다양하게 제시하여 문제에 대한 다양한 접근을 할 수 있도록 한다.

마지막으로 교사들은 오류를 범하기 쉬운 내용들을 충분히 연구하여 미리 학생들에게 반례를 들어 보임으로써 학생들의 오류를 최소화해야 한다.

참 고 문 헌

강선아 (1993). "함수적 사고 신장을 위한 함수 개념지도", 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

강시중 (1989). 「수학 교육론」, 서울: 교육출판사.

고지영 (1993). "제6차 중학교 수학과 교육과정의 분석", 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

교육부 (1994). 「중학교 수학과 교육과정 해설」, 서울: 대한교과서 주식회사.

김도상, 석용징, 신현성, 이준열 (1990). 「수학과 교재론」, 서울: 경문사.

김옥경 (1990). "고등학교수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류 모델에 관한 연구", 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

김 진 (1990). "중학교 수학과 교과서 비교연구－함수 영역을 중심으로－", 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

박두일, 신동선, 강영환 (1991). 「중학교 수학 1 교사용 지도서」, 서울: 교학사.

박을룡, 김치영, 박한식 (1982). 「수학대사전」, 서울: 홍문도서.

심연욱 (1986). "중학 수학에서의 함수개념지도에 관한 연구", 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

서울대학교 사범대학 교육 연구소 (1981). 「교육학 용어사전」, 서울: 배영사.

서울특별시 교육청 (1993). 「서울특별시 중학교 교육과정 편성 운영지침」, 서울.

서울 한글 학회 (1992). 「우리말 큰 사전」, 서울: 어문각.

이명숙 (1987). "함수개념의 이해과정을 통해 본 연계성 연구－중학교 교과서를 중심으로－", 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

이은주 (1991). "개념 표현의 분석을 통한 수학과 교육과정의 내용 연구에 관한 연구", 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

이효정 (1990). "중학생의 수학적 개념 및 표기의 이해에 관한 연구", 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

이희승(編) (1982). 「국어대사전」, 서울: 어문각.

중앙교육평가원 (1991). 「수학과 교수－학습목표의 상세화」, 서울: 극동문화사.

최경미 (1991). "문제풀이 과정에서 발생하는 수학적 오류의 분석 및 힌트 제시 효과에 관한 연구", 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

J. Dan Knifong & Boyd Holtan (1976). "An Analysis of children's written Solutions to Word Problems", Journal for Research in Mathematics Education, pp.106-112.

Nitsa Movshovitz-Hardar & Orit Zaslavsky (1987). "An empirical classifical model for Errors in high school mathematics", Journal for Research in Mathematics Education 1987, Vol.18, No.1, pp.3-14.

Radatz, H. (1979), "Error Analysis in Mathematics Education", Journal of Research in Mathematics Education 10, pp.163-172.