Historia Mathematica Vol. 10. No. 2, 1997, 72-81

황금분할과 조형예술*

한양대학교 이과대학 수학과 **한정순**
한양대학교 이과대학 수학과 **임종록**

Abstract

황금비는 이집트의 고왕국시대 혹은 더욱 그 이전으로 올라 갈 수가 있으나, 이 비율이 특히 고고학자나 미학자들 사이에서 학문적으로 중시 된 것은 르네상스 시대 이래의 현상이며, 황금비의 이름을 붙이게 된 것은 근세에 들어와서의 일이다. 이 황금비는 가장 조화가 잡힌 비로소 건축, 조각, 회화, 공예 등 조형예술의 분야에서는 다양한 통일의 하나의 원리로서 널리 활용되고 있다.

본고에서는 황금분할의 수학적 내용과 조형예술 분야에 미친 영향과 활용성을 살펴보았고, 그리고 황금비의 수리는 정연하고 신비적이기 때문에, 그것이 항상 아름답고 바람직할 것이라고 하는, 일종의 예측을 역사적으로 행해 왔던 것임을 알 수 있었다.

0. 서론

인류가 최초로 발견한 기하학적 도형 그리기는 원이다. 그러나 직각을 사용해서 정사각형을 만들 수 있게 되기까지는 꽤 많은 시대가 흘러야 했다.

이집트 시대에는 간단하게 정사각형을 그리는 방법을 알고 있었다. 한 개의 줄에 등간격으로 매듭을 14개 만든다. 그리고 두 번째의 매듭을 우선 말뚝으로 고정시킨다. 다음에 첫 번째의 매듭에서 세어서 다섯 번째의 매듭을 다시 말뚝으로 고정시킨다. 그곳에서 줄을 꺾어서 아홉 번째의 매듭을 역시 말뚝으로 고정시킨다. 이어서 열네번째의 매듭을 최초의 말뚝으로 고정시킨 두 번째의 매듭으로 당겨오고 말뚝 있는 곳에 서서 줄을 조이면 3:4:5 의 비례로 된 직각삼각형이 된다. 직각삼각형이 되면 이번에는 두 번째의 매듭이 있는 말뚝으로 당긴 줄을 말뚝에서 빼서 첫 번째의 매듭에 잇고, 이것을 반복하면 정사각형이 얻어진다. 직각삼각형의 3개의 변에서 최단선분과 최장선분의 비는 3 : 5로서, 바로 황금비를 나타내고

* 본 논문은 1997년 한양대학교 교내연구비 지원에 의하여 수행되었음

있는 것이다.

후세에 레오나르도 다 빈치(Leonardo da Vinci, 1452~1519)를 비롯하여 르네상스 시대의 거장들이 이집트삼각형이라고 부르며 사물의 위치결정이나 구성의 기본형으로 애용한 것이 바로 이 삼각형인데, 정사각형의 발견이 동시에 미의 발견이 되어 황금비의 기원이 되었다는 것은 시사하는 바가 크다.

황금분할은 자연이나 미술작품의 형태미를 규정하고 있는 각종 비례 중에서 고래로 가장 이상적이라고 하였으며, 그런 뜻에서 특히 황금이라는 이름이 붙여져 온 비례법이다. 황금분할을 기하학의 명제로서 처음 제기한 사람은 기원전 300년경에 유클리드(Euclid, 330?~275? B.C.)가 쓴 기하학의 제2서 중에 그 해법이 설명되어 있다. 그 명제는 『하나의 직선을 길고 짧은 두 개의 선분으로 나누고, 짧은 선분과 전 선분으로 만들어지는 직사각형을 긴 선분으로 만들어지는 정사각형의 면적과 같게 할 것』이라는 것이다.

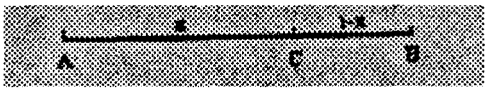
황금분할 내지 그 배분에 의한 양의 비율을 황금비 혹은 황금율이라고 부르며, 작도의 기호로는 그리스 문자의 파이(ϕ)를 일반적으로 사용하고 있다.

황금비는 고대 그리스인들의 건축에 중요한 역할을 했다. 오늘날에도 많은 건축가들은 길이와 폭의 비율이 ϕ인 직사각형이 가장 좋은 비율을 가진 직사각형이라 믿는다. 이 때문에 다양한 미학 이론에서 ϕ는 빛나는 역할을 해왔다. 놀랍게도 수 ϕ는 나무의 잎사귀가 놓이는 방식에서도 나타난다. 중세 시대에 와서 이 비는 극도로 신비화되어 신의에 의해서 수여된 비법이라고 해서 신수비례법(Divina proportion)이라고 불려졌다. 15세기말에 성 프란시스코회의 수도사 프라 르카 파치올리(Pacioli, 1450~1520)가 레오나르도·다·빈치의 삽화를 붙여서 집필한 황금비에 관한 저서에는 이 제명이 붙여져 있다.

1. 수학에서의 황금분할

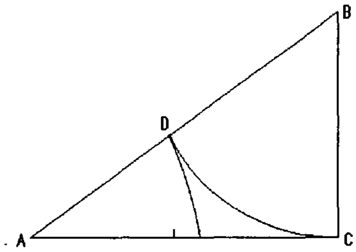
한 선분을 둘로 자르면서, 잘라진 조각 중 긴 조각과 원래 전체 선분의 비율이, 짧은 조각과 긴 조각의 비율과 같게 만들면, 우리는 선분을 『황금분할』 한 것이다. <그림 0>에서와 같이 선분 AB를 잘나낸 점 C를, AB를 『황금비』로 분할했다고 한다. 이 비율의 값은 그리스 문자 ϕ로 표기된다. 선분 AB가 단위길이 일 때 (AB=1) AC를 x로 나타낸다면

$\phi=\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$ 이다. 이는 x에 대한 이차방정식 $x^2+x-1=0$이 되며, 이 방정식의 양의 해는 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 이다. 이 양의 해의 근사값은 0.61803이다.



<그림 0>

ϕ 직사각형의 작도법에는 여러 가지가 있으나, 유클리드의 해법에 따르면, <그림 1>에서 주어진 선분 AB를 2등분하고, B에서 mB의 길이를 B위에 세워 C점을 정하고, C에서 A에 사선을 내려서 직각삼각형 ABC를 만든다. 이 삼각형은 $\sqrt{4}$ 직사각형을 대각선으로 2등분한 형과 같다. 그 대각선 CA의 C점에서 CD의 길이만큼 컴퍼스로 옮겨 D점을 구하고, 나머지 DA의 길이를 AB선상에 취하면 황금분할점 ϕ가 얻어진다. A에서 ϕ점까지가 1.681, ϕ에서 B까지가 1의 비가 된다. 이 비를 장단변의 길이로 해서 직사각형을 만들면 황금직사각형이 된다.



$\frac{1}{2}(m)$ ϕ <그림 1>

13세기 초반 이탈리아 수학자 레오나르도 다 피자(Leonardo da Pisa 1175~?)는 그의 저서에서 다음과 같은 명제를 해설하고 있다.

즉, 『한 쌍의 토끼에게서 1년간 몇 쌍의 토끼를 얻을 수 있나? 단, 각 한 쌍은 다음 달부터 매월 새로 한 쌍을 낳고 사망은 전혀 없는 것으로 한다.』는 명제로서, 이런 조건하에서 월차적 쌍의 증가는 다음과 같은 수가 된다고 발표했다.

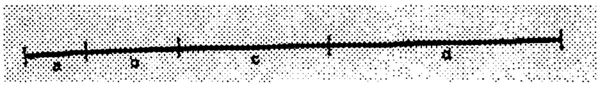
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, …

이 숫자는 제 3 항의 값이 앞의 두 개의 수의 합과 같은 성질을 지니고 있으며, 레오나르도의 통칭인 피보나치(Fibonacci)에서 이름을 따서 피보나치 급수라고 부르고 있다. 이 급수의 연속하는 두 항의 수의 비는 황금지수 1.618의 근사치가 되고, 뒤의 숫자로 갈수록 그 값이 근접하게 된다.

그 후 17세기에 들어와서 수학자 지라드(Albert Girard, 1595~1632)가 이 계수를 토대로 해서 황금비가 무리수가 되는 것을 근사정수로 나타내는 방법으로서 다음과 같은 수열을 만들었다.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

이것을 선분으로 나타내면 황금비에 의한 선분의 발전을 보여주는 <그림 2>와 같이 된다.



<그림 2>

$a:b:c:d\cdots$

이들 사이에는 $a:b=b:c=c:d$의 관계가 존재하며, 모두 황금비이다.

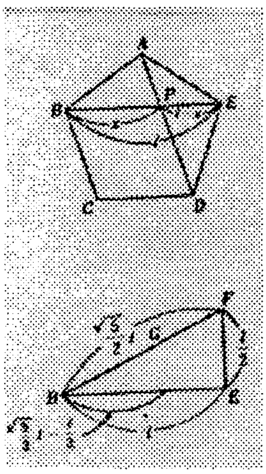
원에서 나뉘어진 조화원형의 하나로 펜타그램이 있다. 이것은 정오각형이 내포하는 별모양을 말하며, 한 개의 단순한 기하학적 도형에 불과한 이 별모양이 왜 그렇게 신비시되었는가 하는 의문이 생기게 되는데, 이 도형 속에는 일종의 불가사의라고 생각되는 비율의 관계가 내재되어 있어, 황금비가 도형의 각 부분마다 구현되고 있다. 즉, 교차된 선은 여덟 개의 이등변 삼각형과 하나의 정오각형을 만드는데, 이들 선의 상호간에 황금비가 성립되는 것이다. <그림 3>에서 정오각형 ABCDE의 대각선 AD와 BE의 교점을 P라고 생각하면, $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BP}}=\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{PE}}$.

그런데, $\mathrm{EA}=\mathrm{AB}=\mathrm{BP}$이므로 $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BP}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}$이다. 또, 한 선분 BE위에 한 점 P를 잡고, 이 식이 성립하도록 하였을 때, 『선분 BE를 점 P에서 황금분할한다』고 말한다. $\mathrm{BE}=l$, $\mathrm{BP}=x$, $\mathrm{PE}=l-x$라고 놓고, 이 식을 나타내면

$$\frac{l}{x}=\frac{x}{l-x}, \qquad \therefore x^2+lx-l=0$$

이 방정식의 양의 해만을 취하면, $x=\frac{\sqrt{5}}{2}l-\frac{1}{2}l$이다. 여기서 황금분할을 작도할 수 있다. 길이 l인 주어진 선분 BE의 끝 E에서, 이 선분에 수선을 세우고, 그 위에 EF의 길이가 $\frac{l}{2}$이 될 점 F를 잡는다. 그러면, $\mathrm{BF}=\sqrt{l^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}l$이다. 따라서, 점 F를 중심, $\frac{l}{2}$을 반지름으로 하는 원을 그리고, BF와의 교점을 G로 한다. 또, 점 B를 중심, BG를 반지름으로 하는 원과 BE의 교점을 P라고 한다면, 점 P는 선분 BE를 황금분할하는 점이다. 이 때,

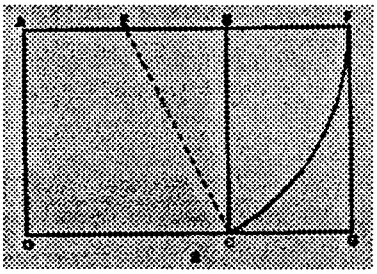
PE : BP≒1 : 1.618이다.



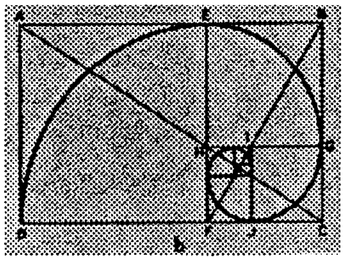
<그림 3>

ϕ는 많은 재미있는 수학적 성질을 지니고 있다. 1을 ϕ로 나누

었을 때의 몫은 ϕ와 1의 차와 같다. 그리고 <그림 4-1>에서 단위 직사각형 ABCD에 대하여, 변 AB의 중점을 잡고, E를 중심으로 하고 반지름이 EC인 원호를 그어, 변 AB의 연장선과 원호의 교점 F를 찾는다. 이 때 직사각형 ADGF는 길이 대 폭의 비율이 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 즉 ϕ인 황금사각형이 된다. 이 작업을 계속하면 <그림 4-2>에서와 같이 점점 크기가 작아지는 황금사각형 계열이 얻어진다.



<그림 4-1>

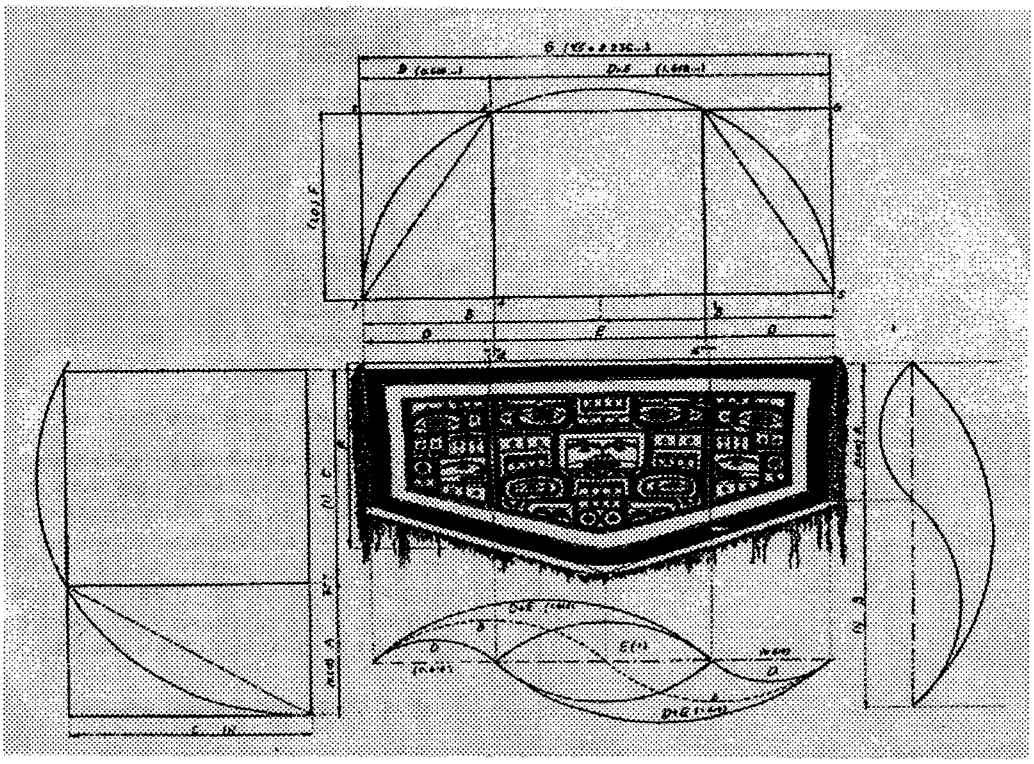


<그림 4-2>

2. 조형예술에서의 황금분할

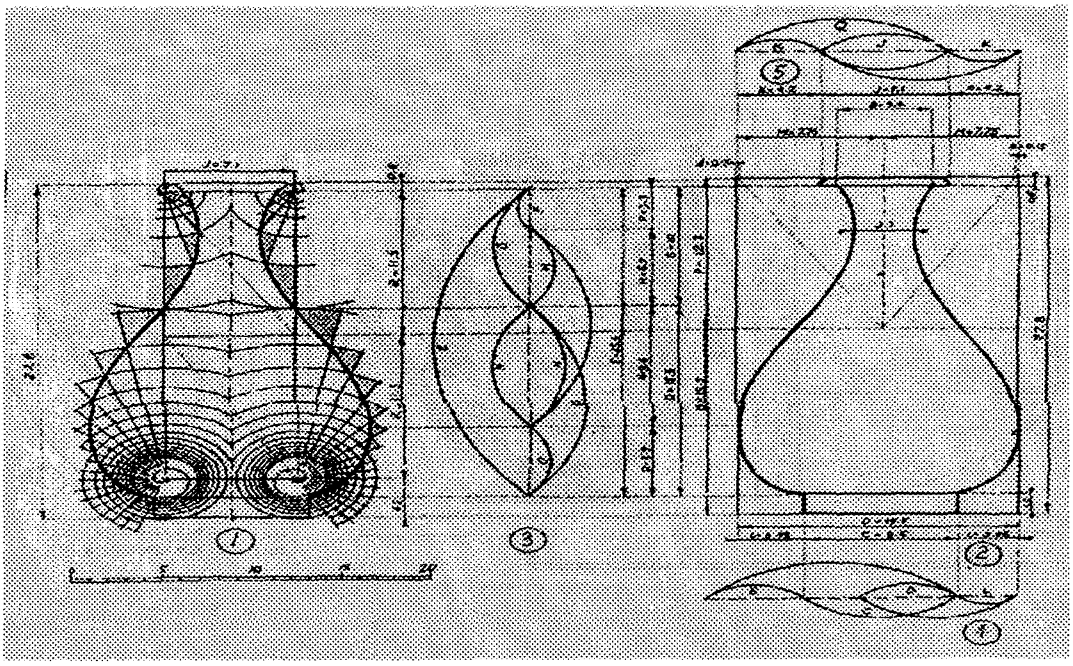
다른 문화권에 속해 있는 직물 짜는 사람들도 바구니를 짜는 사람들이 하는 간단한 조화의 비율을 즐겨 사용하는 것을 볼 수 있다.

서북 아메리카 인디언들의 아무렇게나 짠듯한 예식을 위한 담요도 디자인의 접합 부분에서와 마찬가지로 세밀한 부분까지 고르게 잘 완성된 모든 부분에서 동일한 선호성을 찾아볼 수 있다. <그림5>는 칠칼(chilkat)인의 담요 주위에 그려진 황금분할구조를 보여준다. 이 비율들은 짧은 측면에서 높이는 물론, 너비의 반과도 관련되는데 이들 비율은 항상 담요에 있어서 동일하다. 담요에서의 정확한 ϕ비율과 실질적인 비율 사이의 정확한 차이는 다시 d로 표시된다. 담요의 짧은 측면은 몸을 편리하게 둘러 감을 수 있도록 되어 있지만 측면의 너비는 결코 제멋대로 된 것이 아니다. 조사대상이 된 17개의 실물들이 모두 이와 같은 비율에 접근한다. 이 담요의 그림형태는 두 개의 좁은 측면의 것으로 양쪽 측면이 나누어진 넓은 중앙패널처럼 종종 묘사되어 진다. 담요위의 황금분할구조는, 이 동일하지 않고 이웃하는 요소 - D와 E-의 너비는 두 개의 상호 황금직사각형(1-2-3-4와 3-4-5-6)내부에 모든 형태를 포함하고 있으며, 연대적으로 잘 알고 있는 $\sqrt{5}$직사각형을 만들어내는 황금관계속에 있음을 보여주고 있다.



<그림 5>

<그림 6>은 성조시대(960~1279 A.D.)의 중국 Lung chuan celadon 화병이다. 이 그림에서는 식물모양의 작도를 위해서 상반에너지에 의한 방법으로 우아한 모양의 윤곽을 얻을 수 있음을 보여준다. 이렇게 얻어진 것은 거의 황금비(7.1:11.5≒1:1.6197)에 가까운 2개의 직사각형의 구석에 윤곽을 형성하는 4개의 대수학적인 나선형의 중앙이 위치한다는 것을 보여준다. 이들 숫자로 나타난 관계를 알지 못한다 할지라도 이 윤곽이 잎의 윤곽과 유사하다는 것은 이 모양이 유기적 성장의 형태와 관련성이 있음을 시사해 줄 것이다. 이들 시사는 주된 형태간의 배율관계가 어떻게 음악의 기본화음과 가까운가를 기록하는 것이기도 하며, 파형 그림과 그래프에 의하여 실증되고 있다.



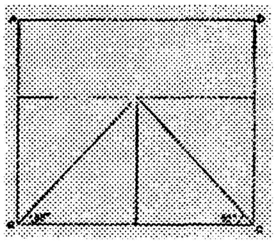
<그림 6>

이집트 피라미드 중에서 가장 크고 또 유명한 기제(Gizeh)에 있는 쿠푸(Khufu ?~?, 재위 2589~2566 B.C.) 왕의 제1피라미드가 갖는 조형적인 아름다움에 대해서 학문적으로 규명한 학자가 과거에는 없었다. 겨우 금세기에 들어와서 뮌헨의 한 측량기사인 케・크레피시가 현지를 답사하여 실측한 결과, 표면에 나타난 삼각형과 밑변이 차지하는 정사각형의 면적과 전체 면적은 일정한 비를 가졌으며, 그것이 황금비에 가까운 비라는 것을 시사하는 정도로 끝났다.

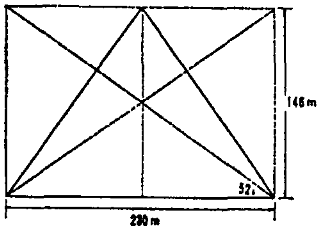
그후 1925년에 이집트 정부가 자체적으로 면밀한 실측조사를 실시하여, 높이 약 146m, 밑면의 폭이 약 230m라는 숫자가 분명하게 밝혀진 것인데, 이 숫자는 우리들을 흥분시키기에 충분한 수치로서, 앞에서 기술한 피보나치의 급수 중의 제11항 대 제12항(지라드의 수열에서는 제13항 대 제 14항의 비, 144:233)에 거의 일치된다. 피라미드의 높이가 약 146m이므로 144와의 차이는 겨우 0.02이며, 폭은 약 230m이므로 233의 수치에 대해서 0.03의 차이밖에 없다. 높이와 폭의 관계가 이와 같이 황금비의 근사값을 나타내고 있다. 이 관계는 당연히 밑면의 정사각형에도 밀접하게 이어져 있을 것이므로, 피라미드는 다음과 같은 과정을 밟아서 그 비를 할당한 것이라는 것을 추정할 수 있을 것이다.

제일 먼저 밑면의 정사각형의 크기를 결정한 다음에, 그 정사각형 안에 앞에서의 ϕ직사각형의 작도법에서 설명한 바와 같은 방법으로 황금직사각형을 구하고, 이 직사각형의 단변에 길이를 가지고 높이를 결정한 것이다. 즉 <그림 7>과 같이 ϕ직사각형의 장변의 2등분점을 구하여 직사각형의 좌우의 양끝에 사선을 내리면, 하나의 삼각형이 형성되는 동시에

그 경사가 결정된다는 대단히 간단하고도 놀랄 만큼 합리적인 방법에 의해서 전체와 각부를 완전한 통제하에 놓고, 황금비에 지배에 의해서 이 비례가 갖는 독특한 아름다움을 형태상에 구현시켰다.



(I)평면계획



(Ⅱ)높이의 결정

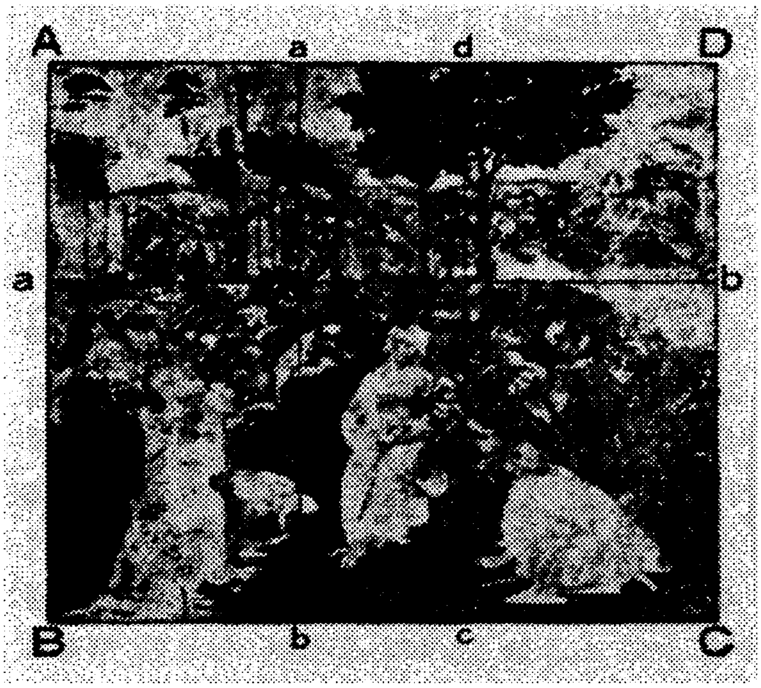
<그림 7>

도리스 양식의 아테네의 파르테논(Parthenon) 신전(B.C 5)의 기둥 높이는 기둥 밑변너비의 5배반이나 되며, 기둥머리는 단순한 사각형 모양의 넓적한 돌(abaci)로써 이루어져 있으며 밖으로 뻗친 손(echini)과 같은 형태를 취하고 있다. 신전의 정면 중앙부는 황금분할된 기울어진 기둥에 맞춰져 있으며, 기둥머리 윗부분은 전체 높이의 황금분할점에 근접해 있다. 그리고 파르테논 신전은 두 구석의 기둥 중심선과 바닥의 선 그리고 돌림띠의 꼭대기가 2개의 황금분할된 직사각형으로 이루어진 $\sqrt{5}$의 직사각형을 이루고 있다. 7개 공간이 있는 이 신전의 정면 기둥은 피타고라스 삼각형의 3:4 비율과 제 4공관 개론의 음악적 조화를 구현하고 있으며 동시에 황금비 및 제5 diapente 조화를 나타내고 있다. 그리고 이 신전의 평면도는 2개의 황금분할된 직사각형에 맞추어져 있으며, 보물의 방과 처녀의 방도 황금비로 되어 있다.

레오나르도 다 빈치의 작품중 「동방현자의 예배」의 캔버스형은 <그림 8>에서와 같이 거의 직사각형에 가까운 형태로서, 아주 약간 세로 방향으로 연장되었다. 그러므로 우선 캔버스의 좌변 AB를 장변으로 하고 그 위에 황금직사각형 ABcd를 만들어 보면, 직사각형의 한쪽의 장변 dc의 선이 마리아의 배후에 그려진 나무의 중심을 관통한다. 그러므로 이 위치에 황금비의 분할선이 그려진 것을 알 수 있다.

다음에 캔버스의 우변 DC를 장변으로 하고 앞에서와 같이 황금직사각형 abCD를 만들어 보면, 배경계단의 중앙과 박사의 머리 등을 관통하는 위에 장변 ab가 그려져서, 이상으로 마리아의 양쪽이 규정된다.

다음의 황금직사각형의 단변의 길이 Ad 를 잡아 캔버스의 장변 위에서 a', b'을 구하여 연결하면, 그로부터 밑쪽 a'BCb' 은 화면의 어두운 부분이 되고, 동시에 성모 마리아를 배치하는 직사각형 $ebcf$가 얻어지며, 그로써 다른 인물들이나 배후의 풍경을 배치하는 기본의 틀이 짜여지는 것이다.



<그림 8>

3. 결론

피타고라스(Pythagoras 586~497 B.C.)는 「자연현상에는 합리적 배열과 연쇄와 법칙이 있으며, 그 관계는 양 또는 수로 표시할 수 있다.」라고 하였다. 바로 이것이 조화의 근본인 것이다.

단순한 형식이 동반되는 아름다움에 대한 연구는 긴 역사를 가지고 있다. 화가라든지 디자이너들 사이에서는 예로부터 황금분할이라는 종횡의 비를 간결한 수식으로 나타내는 장방형이 존중되어 왔다.

조형 작품에 사용되었다고 인정되는 비례는 보다 많은 수리적 근거에 따라서 기하학적으로 유도된 것이다. 또한 본고에서 알 수 있었던 것은 조형작품들은 수적관계에 일정한 계획성을 인정할 수 있다는 것이었다. 시대에 따라 다른 표현양식을 갖고 있는데, 구성의 근저에는 각시대에 공통되는 동일법칙이 존재하고 있다는 것이다. 그리고 황금비의 수리는 정연하고 신비적이기 때문에 그것이 항상 아름답고 바람직할 것이라고 하는, 일종의 예측을 역사적으로 행해 왔던 것임을 알 수 있었다.

이제 여기서 저자는 황금분할이 문화인류학, 그리고 자연현상과의 관계를 고찰해 보는 것이 앞으로의 연구과제로 남는다.

참고문헌

1. Carl B. Boyer, *A History of Mathematics,* Princeton University Press, 1968.
2. 김용운, *문화속의 수학,* 현암사, 1977.
3. Howard Eves, *Return to Mathematical Circles,* Prindle, Weber & Schmidt, 1988.
4. 한병호, *수학이란 무엇인가?,* 진리세계사, 1989.
5. 김용운, 김용국, *수학사 대전,* 우성문화사, 1990.
6. E. T. Bell, *수학을 만든 사람들*(Men of Mathematics) 상, 안재구역, 미래사, 1993.
7. E. T. Bell, *수학을 만든 사람들*(Men of Mathematics) 하, 안재구역, 미래사, 1993.
8. 권영한, *재미있는 이야기 수학,* 전원문화사, 1993.
9. Howard Eves, *수학의 위대한 순간들*(Great Moments in Mathematics), 허민, 오혜영 역, 경문사, 1994.
10. F. Cajori, *A History of Mathematics,* Macmillan Company, New York.
11. M. H. Morgan, *건축십서*(The ten Books on Architecture), 오덕성역, 기문당.