Historia Mathematica Vol. 10. No. 2, 1997, 11-23

CATEGORICAL TOPOLOGY의 역사

서강대학교 수학과 **홍성사**
숙명여자대학교 수학과 **홍영희**

Abstract

Category theory gives a convenient language for the study of mathematical structures besides its own study. In this paper, we investigate how the abstract structure theory emerged in 1930s affects the study in Topology and eventually becomes a rudiment for the category theory. Moreover, various extensions and universal mapping problems were put in their proper perspective as reflections by the category theory and by its duality principle, coreflections become an interesting subject in Topology, both of which give rise to a new discipline of the categorical topology.

1991 Mathematical Subject Classification - 01A65, 01A60, 18-03, 54-03

0. 서론

1945년 Eilenberg와 Mac Lane에 의하여 category와 functor의 개념이 도입되었다 [14]. 그 후 category theory의 단행본 형태로 출판된 것은 1964년 Abelian Categories [20]가 그 시작이다. 따라서 category theory의 역사는 반세기밖에 되지 않는다. 그러나 1960년대에 monad (= triple)를 통하여 equational class가 이루는 category가 category theory에 의하여 확정됨으로 category theory는 수학의 모든 분야에 급속히 도구로 이용되기 시작하였다.

대수학 분야와 거의 같은 시기에 adjoint situation이 위상수학의 연구에 이용되기 시작한 후 여러 중요한 extension theory를 category theory의 reflection으로 통합하고, 또 그 dual 인 coreflection의 연구가 활발하게 진행되어 이들의 결과는 [28]에 정리되어 1968년에 출판되었다. 그 후 1971년에 위상수학과 category theory가 연결되는 분야로 categorical topology라는 이름이 쓰이기 시작하였다 [30].

따라서 다른 수학 분야의 역사와 비교하면 매우 짧은 역사를 가지고 있는 것은 틀림없지

만 이 분야의 태동과정을 알아봄으로써 현대 수학의 전개과정과 20세기 이전의 수학의 발전과정을 비교하는 것이 이 논문의 목적이다.

모든 분야의 수학사를 논할 때, 항상 그 후의 발전과정이 연계되어야 한다. categorical topology의 기원도 그 후의 결과들을 언급할 수밖에 없으므로, 현재 진행중인 연구 결과에 대한 역사적인 의미를 논함에 어려움이 있음을 밝혀두고자 한다.

실제로 Meyer는 [53]에서 다음과 같이 언급하였는데 이 경우 contemporary culture를 categorical topolgoy로 대치하여도 좋을 것으로 생각되어 인용하고자 한다.

"A book about contemporary culture is speculative for other reasons too. First, because the meaning of the present will be definitely established only when its implication-its consequences- have become the facts, problems, and perplexities of some future present. And second, because, however much one may try to be detached and impartial-observing relationships and movements rather than judging them- it is impossible to stand outside of culture. For the models and categories we use in conceptualizing and ordering the world are necessarily limited to, if not determined by, those which are provided by our particular culture."

이와 같이 상당한 제약을 받을 수밖에 없는 주제이나, 수학사의 효용 중에 문화사적인 의미도 중요하지만 수학 자체의 발전과정을 통하여 현재 진행되고 있는 연구 방법을 알아보는 것도 중요하다는 생각에서 이 주제를 선택하여 논하고자 한다.

1절에서는 위상수학의 발전과정과 특히 categorical topology에 관계되는 부분의 역사를 조사한다.

2절에서는 category theory의 전개과정과 1970년대 중반 이전까지의 categorical topology의 주제들에 대하여 알아본다.

category theory에 대한 자세한 내용과 용어는 주로 [1]에 따르기로 하고, 더욱 자세한 reference는 [33, 37]에서 찾을 수 있다.

1. 위상구조

1.1. 유한한 인간이 무한을 이해하려고 하는 노력은 가장 오래되고 또 중요한 문제이다. 이 문제를 해결하기 위하여 종교, 철학은 오랫동안 여러 가지 방안을 강구하고 또 그 방안은 다시 수많은 문제를 만들어 내었다. 수학에서도 이를 해결하기 위하여 극한 (limit)이라는 개념을 고대 Greece 시대부터 생각해 내었다. 특히 Archimedes는 포물선의 한 부분의 면적을 극한을 이용하여 구하고 또 원둘레를 내접하는 정다각형의 길이로 근사값을 구한 것은 잘 알려진 사실이다. 이들은 모두 미적분학의 기본적인 출발점으로 다시 나타나게 되었

다. 실제로 현재 우리가 사용하는 극한의 개념은 19세기에 들어와서 정립되었다. 극한이란 더 좋은 근사값의 상태를 나타내는 것이므로 이를 잴 수 있는 적당한 자 (yardstick)가 필요하게 되었다. 19세기 전반기에는 주로 실직선 (real line) $\mathbb{R}$이 그 대상이었으므로 $\mathbb{R}$의 usual metric을 사용하면 되었다. 그러나 해석학의 발전으로 그 대상이 Euclidean space $\mathbb{R}^n$으로 확장되고, 또 더 나아가 함수공간이 연구의 대상으로 대두됨에 따라 위상구조가 필요하게 되었다. Cauchy, Abel, Bolzano등에 의하여 수열의 극한과 극한의 관계와 연속함수의 정확한 이해가 이루어지고 이들을 발전시켜 Riemann은 위상구조의 정의의 필요성을 강조하고 또 위상공간을 정의하려고 시도하였다. 그는 Topology를 Leibnitz가 사용하였던 Analysis Situs라는 단어로 쓰기 시작하였다 [60, p.91].

1.2. 그러나 우리가 현재 사용하고 있는 accumulation point, closed set, open set, perfect set의 시초는 Cantor에 의하여 도입되었다. 실제로 집합론의 시작과 위상공간의 시작은 Cantor에 의하여 동시에 시작되었다. 그는 Fourier series인 무한급수

$$a_0/2 + \Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

가 수렴하면 이는 함수를 정의하는데, 구간 $[0, 2\pi]$에서 두 Fourier series가 같은 함수를 정의하면, 이들 무한급수는 같은 계수를 가짐을 먼저 증명하였다. 그 후 $\mathbb{R}$의 부분집합 S에 대하여 derived set $S' = \{x \in \mathbb{R} \mid x$를 포함하는 임의의 개구간 (a, b)에 대하여 $(a, b) \cap S$가 무한집합$\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x$는 S의 accumulation point$\}$을 정의하고 무한귀납적정의 (infinite recursive definition)를 통하여 다음을 정의하였다:

$S^{(n+1)} = (S^{(n)})'$ (n은 자연수, 즉 finite ordinal),

$S^{(\infty)} = \cup\{S^{(n)} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$,

$S^{(\infty+1)} = (S^{(\infty)})'$,

. . .

$S^{(\infty+\infty)} = \cup\{S^{(\infty+n)} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$,

. . ..

이 때 다음이 성립함을 증명하였다 [8].

1.3. (Cantor) $\mathbb{R}$의 부분집합 S에 대하여 $S^{(k)} = \emptyset$이 되는 k가 존재하고, 모든 $x \notin S$에 대하여 두 Fourier series가 같은 함수를 정의하면, 두 급수의 모든 계수는 같다.

1.4. **1.2.**의 infinite recursive definition은 처음으로 finite induction을 벗어나는 개념이었고, 또 ∞를 the first infinite ordinal ω로 생각하면 그의 정의는 well ordered set의 개념으로 자연스럽게 확장되어 집합론의 기원을 이루게 되었다.

1.5. Cantor가 $\mathbb{R}$과 $\mathbb{R}^n$의 부분집합의 accumulation point, closed set, open set을 정의한 후 Borel은 폐구간 $[a, b]$의 모든 countable open cover는 finite subcover를 가짐을 증명하

였다[5]. 1906년 Fréchet는 Hadamard의 지도아래 쓴 박사 학위논문에서 수렴하는 sequence의 성질을 추상화한 sequential space와 거리공간 (metric space)을 정의하여 실질적인 추상공간을 도입하고 [61], 1907년 Riesz는 accumulation point의 개념을 일반화하여 T_2-closure space를 도입하였으나 [18], 이들은 모든 위상구조를 나타내는데는 부족한 개념이었다. 한편, 1902년 Hilbert는 $\mathbb{R}^2$에서 근방계 (neighborhood system = neighborhood filter)를 도입하여 $\mathbb{R}^2$ 의 위상을 도입하였다 [39, p.180].

1.6. 1914년 Hausdorff는 그의 저서 Grundzüge der Mengenlehre [25]에서 위의 Hilbert의 neighborhood system에 대한 공리를 일반화하여 Hausdorff space를 위상공간으로 도입한 것이 위상수학의 기원인 것은 잘 알려져 있다 (자세한 내용은 [7]의 Historical Note참조). Hausdorff가 위상공간을 도입한 후 위상수학은 급속히 발전하였는데 특히 Moscow School에 의하여 metric space의 이론이 위상공간으로 확장되었다.

1.7. 위상공간의 기본구성 (basic construction)에 대하여, subspace는 1914년 Hausdorff [25], coproduct는 1923년 Tietze [67], quotient space는 1932년 Baer와 Levi [2]에 의하여 각각 정의되었다. 이에 비하여 product는 1923년 Tietze가 box topology에 의한 product를 정의하였으나[67], 현재의 product는 1935년 Tychonoff가 정의하였다[71]. 실제로 Tychonoff는 1930년에 Tychonoff cube $[0, 1]^m$ (m : 임의의 기수)를 정의하고[69], 1935년에 $\mathbb{R}^{[0, 1]}$ 에 product topology를 정의한 후[70], 임의의 product를 정의하였다. 이는 초기 위상수학자들은 여전히 거리공간의 범주를 크게 벗어나지 못하였음을 나타내고 있다. 거리공간의 coproduct 와 countably product는 거리공간임을 보면 알 수 있다.

1.8. Moore-Smith가 sequence의 개념을 net로 확장하였지만[55], net는 그 당시 모든 위상수학자들에 의하여 활용되지는 못하였고, 여전히 sequence의 수렴이 위상구조의 연구에 중요한 도구로 사용되고 있었다. first countable space에서 수렴하는 sequence의 구조가 이들 위상공간의 구조를 결정하는 것을 보면 이를 알 수 있다. 그 후1937년에 Cartan에 의하여 filter의 개념이 도입되고, 또 수렴하는 filter의 구조가 모든 위상구조를 결정한다는 사실이 밝혀진다[9, 10, 7]. 이 사실은 Fischer에 의하여 limit space와 convergence space의 개념으로 확장된다[15]. 위상공간의 가장 큰 약점은 위상공간과 연속함수의 category **Top**이 cartesian closed가 아니기 때문에 연속함수의 공간에 exponential law를 만족하는 위상구조가 존재하지 않는 것이다. 그러나 Binz에 의하여 convergence space의 category **Conv**가 cartesian closed임을 이용하여 해석학의 결과들을 확장하였다[4].

1935년에 Tychonoff가 product space를 정의하고 Tychonoff 정리를 증명한 것과, 1937년 filter의 도입으로 위상수학은 countable type -sequence, countable cover- 의 제약에서 완전히 벗어나게 되었다. 이는 위상수학의 발전에 매우 중요한 전기를 이루는 일이었다.

1.9. 1937년에 일어난 또 하나의 특기할 일은 Weil에 의하여 uniform space와 complete space가 도입된 것이다[72]. 실제로 Heine - Borel 정리에서, boundedness는 topological property가 아니다. compact Hausdorff space는 totally bounded, Hausdorff complete space로 확정되므로, Heine - Borel 정리가 완전히 이해되었고, 또 completely regular space와 Hausdorff uniform space가 일치하고, completely regular space의 compactification은 totally bounded Hausdorff uniform space의 completion으로 되어 extension theory에서 가장 중요한 completion과 compactification을 연결시킬 수 있게 되었다.

1.10. 위상구조는 점과 집합사이의 근사구조인데, 두 집합사이의 근사구조를 위하여 1952년에 proximity structure[12], 부분집합들의 유한족 (finite family of subsets)의 근사구조를 위하여 1959년 contiguity structure가 각각 도입되었다[45]. 이들은 모두 compactification의 연구에 중요한 역할을 하였다. 그 후 1974년 Herrlich는 arbitrary family of sets의 근사구조를 나타내기 위하여 nearness structure를 도입하였다. 실제로 nearness space와 nearness preserving map들로 이루어진 category **Near**는 symmetric space (= R_0-space, 즉, $x \in cl\{y\}$ iff $y \in cl\{x\}$인 위상공간)와 연속함수의 category **STop**을 coreflective subcategory로, uniform space와 uniformly continuous map의 category **Unif**과, contigual space와 contigual map의 category **Cont**를 reflective subcategory로 포함한다. 한편 proximity space와 proximal map의 category **Prox**는 **Unif** ∩ **Cont**로 확정하였다[31, 32]. 또 모든 symmetric space의 strict extension은 uniform space의 completion을 확장한 nearness space의 completion으로 확정하므로, 위상공간과 uniform space의 extension theory를 한꺼번에 해결하였다. 이로써 위상구조의 conceptual generalization이 완결되었다.

1.11. 위상공간의 위상 (topology)이 complete Heyting algebra (= frame = locale)임에 착안하여 위상구조의 연구가 lattice 이론을 이용하여 진행되고 있음은 [74]에 소개되었다.

2. 위상수학과 Category Theory

2.1. 수학을 구조적인 입장에서 연구한 수학자로는 Noether가 가장 중요한 위치를 차지하는 것으로 알려져 있다. Weyl은 [73]에서 1935년에 다음과 같이 말하였다.

"She originated above all a new and epoch-making style of thinking in algebra .

Emmy Noether's later 'theology' . . . abhorred all calculations and operated in a much thinner air of abstraction than Hilbert ever dared!" 이어서, "Emmy Noether with masterly skill . . . made algebra the Eldorado of axiomatics; . . . her works of maturity . . . constitute an extreme and grandiose example of conceptual axiomatics thinking in mathematics." 라고 하였다. Noether의 영향은 대수학에 국한되지 않고 위상수학의 연구에도 크게 작용하였다.

2.2. Noether가 시작한대로 수학을 구조론의 입장에서 집대성한 것은 Bourbaki 학파에 의하여 이루어진다. 그들은, 1939년에 출판된 [6]에서 수학적 구조(mathematical structure)를 정의하고 universal mapping problem의 개념을 도입하였다. 그 후 계속하여 Eléments des Mathématique에서 이들을 기초로 하여 그들의 이론을 전개한 것은 유명한 일이다. 그 중에 위상수학 분야를 다룬 [7]에서 현재 category theory에서 택하고 있는 방식대로, 먼저 위상공간을 object로 다루고 연속함수 (= morphism)를 다룬 후, 곧 initial structure와 그 *dual concept*인 *final structure*의 존재성을 증명한 후 이를 통하여 basic construction - subspaces, products, coproducts, quotients -을 취급하고 있다. 이는 category라는 단어만 사용하지 않은 채 명백하게 categorical method를 사용하여 위상수학을 전개한 것이다. 그러나 그들이 정의한 structure나 universal mapping problem은 너무 많은 것을 한꺼번에 다루려고 함으로 오히려 구조적인 방법을 복잡하게 만드는 우를 범하긴 하였지만, 수학은 함수의 연구라는 입장과 그들의 방법은 현재도 가장 적절한 것이라는 데는 이론의 여지가 없다.

2.3. 구조적인 입장에서 일어나는 현상은 서로 다른 구조를 비교할 수 있는 것이다. 위상구조와 순서구조를 비교하는데 functor의 개념이 사용된 것은 [74]에서 알아보았다.

2.4. Stone-Čech compactification[11, 66], uniform space의 completion등은 모두 universal mapping problem의 해이고, 또 Markoff가 free group, free Hausdorff topological group over completely regular space 등도 universal mapping problem의 해로 확정하였다 [51, 52]. Kakutani는 Markoff의 결과가 Stone-Čech compactification과 마찬가지 방법으로 구성됨을 보였다[46]. 이는 1948년 Samuel이 다시 발견하고, 나아가서, extension of the ring of operators of a module, field of quotients of an integral domain, free group, free topological group, completion, Stone-Čech compactification등을 모두 같은 방법으로 구성하여, universal mapping problem의 중요성을 강조하였다[63].

2.5. Bourbaki의 구조적인 입장은 전술한대로 1945년 Eilenberg와 Mac Lane에 의하여 category, functor, natural transformation의 개념이 도입되었다. 이들은 주로 homology theory와 homological algebra의 연구의 도구로만 쓰였다. 그들은 [13]에서, "In a mathematical sense our theory provides general concepts applicable to all branches of abstract mathematics, and so contributes to the current trend towards uniform treatment of different mathematical disciplines." 라고 하였으나, 그 주장은 쉽게 받아들여지지 않았다. 또 Mac Lane은 product 역시 limit의 일종임을 밝혀 내었다. 따라서 product도 universal mapping problem의 해이고, 또 수학의 모든 분야에서 같은 방식으로 정의된다는

사실은 대단히 중요한 사건이었다. 실제로 Bourbaki는 이미 집합, 위상공간, 대수의 product를 이 입장으로 보아 여러 가지 결과를 얻어내었다. 또 coproduct (= direct sum)는 product의 dual이므로, coproduct가 폭 넓게 사용되었다. 한편 product, inverse limit등을 일반화하여 1958년 Kan은 category에서 limit의 개념을 도입하였다[47]. 한편, **Top**에서 subspace는 equalizer로 되는데, 이는 1960년 Freyd에 의하여 도입되고[19], equalizer의 dual인 coequalizer는 quotient이다. equalizer의 중요성은 category가 complete, 즉 모든 limit가 존재하기 위한 필요충분 조건은 product와 equalizer가 존재하는 것임을 보아도 알 수 있다.

2.6. Bourbaki가 정의한 universal mapping problem은 category theory에서 adjoint situation으로 나타나는데, 이는 Kan이 1958년 처음으로 도입하였다[47]. 그는 두 functor

$$G : A \to B, \quad F : B \to A$$

에 대하여, bifunctor $hom_A(F\_, \_)$, $hom_B(\_, G\_)$ 사이에 natural isomorphism이 존재하는 것으로 정의하였다. 이 때, F를 G의 left adjoint, G를 F의 right adjoint라고 정의한다. 그는 중요한 예로, abelian group과 homomorphism의 category **Ab**에서, Hom functor와 tensor product로 정의되는 functor에 대하여, hom $(\_ \otimes \_, \_)$, hom $(\_, Hom(\_, \_))$ 사이에 나타나는 natural isomorphism을 들었다. Kan의 adjoint situation과 universal arrow의 존재성과 동치임은 1964년 Sonner에 의하여 언급되었다 ([65]). Bourbaki의 universal mapping problem의 해의 존재성에 대한 정리의 categorical counterpart인 Adjoint Functor Theorem은 Freyd에 의하여 [19, 20]에 처음 나타나지만, 이는 모두 위에서 언급한대로 Bourbaki와 **2.4.**에서 다룬 내용에 의하여 이미 알려진 사실을 정리한 것이다.

2.7. category theory에서 가장 중요하게 다루는 주제로 위의 basic construction - limits, colimits -, adjoint situation, smallness condition (Adjoint Functor Theorem 참조)과 factorization이다. morphism중에 monomorphism, extremal monomorphism, regular monomorphism과 그 dual인 epimorphism, extremal epimorphism, regular epimorphism이 중요하고, source와 sink중에 중요한 것들은 mono-source, extremal mono-source, initial source, initial mono-source, epi-sink, extremal epi-sink, final sink, final epi-sink등이다. 임의의 source나 sink가 이들 morphism과 source나 sink로의 factorization이 factorization problem이다. 이는 canonical factorization의 일반화로, basic construction, adjoint situation과 깊은 관련이 있다. 이들의 초기 연구 결과는 [50, 24, 42, 43, 68, 64, 49, 28, 35, 21, 48, 62]등에 발표되었다.

2.8. 이상에서 category theory의 기본 골격이 이루어 진 역사를 조사한 셈이다. 국내 학계의 category theory에 대한 초기 접촉에 대하여 잠시 언급하겠다. 1967년 연세대학교에서 지금은 작고하신 범우 김치영 박사님의 주도아래 weekly seminar에서 Isbell의 [44]에서 category의 정의를 읽기 시작한 후, 김박사님께서 1965년에 출판된 Mitchell의 [54]를 구해

오셔서 1968년에 이를 읽어 낸 것이 그 시초이다. 당시에 category theory의 단행본으로는 Freyd와 Mitchell의 책밖에 없던 시절이었으므로 다른 분야에 비하여 매우 일찍 category theory가 국내에 소개되었다. 지금도 계속되고 있는 범우 seminar에서 1975년부터 다시 [34, 28, 1] 및 categorical topology에 관련된 논문을 읽었다. 이 결과로 국내에서 category theory를 연구하는 학자는 다른 분야에 비하여 상대적으로 많은 편이다.

2.9. 모든 위상공간은 위상공간 T = ({0, 1, 2}, {∅, {1, 2}, {0, 1, 2}})의 power의 subspace와 homeomorphic이듯이, T_0-space는 Sierpinski space, zero-dimensional space는 two-point discrete space D, completely regular space는 unit interval [0, 1] 혹은 실직선 **R**의 power의 subspace와 각각 homeomorphic이다.

2.10. Stone-Čech compactification을 구성할 때 사용한 unit interval [0, 1]을 Nachbin과 Hewitt는 **R**로 대치하여 realcompact space (≅ **R**의 power의 closed subspace)를 정의하고, realcompactification을 구성하고, 이는 reflection이 됨을 보였다[38, 22]. 또 [0, 1]과 **R**을 D로 대치하여 Banaschewski는 zero-dimensional compactification을 구성하여, reflection이 됨을 보였다[3].

2.11. 위의 **2.9.**와 **2.10.**은 Mrówka가 위상공간 E에 대하여, E-regular space (≅ E의 power의 subspace)[56], 그와 Engelking은 E-compact space (≅ E의 power의 closed subspace)의 개념으로 확장하고[14], E-regular space의 category는 **Top**에서 reflective 이고, 또 Hausdorff space E에 대하여, E-compactification을 위와 같은 방법으로 구성하여, E-compact space의 category가 **Top**에서 reflective임을 보였다[14, 57, 58, 59]. 그후 Herrlich에 의하여 위상공간의 class $\mathscr{E}$에 대하여 $\mathscr{E}$-regular space (≅ $\mathscr{E}$의 member의 product의 subspace)와 $\mathscr{E}$-compact space (≅ $\mathscr{E}$의 member의 product의 closed subspace)로 확장되고, $\mathscr{E}$-compactification을 구성하여, $\mathscr{E}$-regular space의 category와 $\mathscr{E}$-compact space의 category는 각각 **Top**의 reflective subcategory임을 증명하였다[27]. 한편, completely regular space가 compact (realcompact, resp.)이기 위한 필요충분조건은 모든 z-ultrafilter (z-ultrafilter with the countable intersection property, resp.)가 fixed이다 [22]. 그는 infinite cardinal k에 대하여, k-compact space (= 모든 k-intersection property를 갖는 z-ultrafilter가 fixed인 completely regular space)를 정의하였다. $\aleph_0$-compact space = compact space, $\aleph_1$-compact space = realcompact space이며, 모든 infinite cardinal k에 대하여 k-compact space의 category는 **Top**의 reflective subcategory임을 보였다[26]. 이로써 **Top**의 reflective subcategory들은 proper class로 늘어났다. Hong은 k-compact space X를 βX의 k-closed subspace로 확정하고, 또 X의 k-compactification $\beta_k X$를 βX에서 X의 k-closure로 구성하였다. z-ultrafilter 대신에 maximal clopen filter를 이용하여 zero-dimensional k-compact space에 대하여도 같은 사실을 얻어내었다[40].

2.12. category theory의 큰 장점은 duality principle이다. 함수공간의 compact-open topology를 활용하는데 결정적인 역할을 하는 k-space는 compact space의 coproduct의 quotient space로 되는데, 이는 $\mathscr{E}$-regular space의 dual concept이다. 따라서 k-space의 category는 **Top**에서 coreflective이다. 마찬가지로, locally connected space는 connected space의 coproduct로 되고, 또 final sink에 대하여 닫혀있어서, locally connected space의 category도 **Top**에서 coreflective이다[23]. 한편 Franklin은 sequential space를 자연수의 discrete space N의 one-point compactification αN의 copower의 quotient (E-regular space의 dual concept)로 characterize하여, sequential space는 거리공간의 quotient space로 결정 지웠다. 이는 거리공간의 category **Met**의 initial hull이 uniformizable space인 것과 같이 **Met**의 final hull이 sequential space의 category **Seq**로 되고, **Seq** 역시 **Top**의 coreflective subcategory가 된다[16, 17].

2.13. 위의 사실은 다음과 같은 결과로 정리된다. **Top**의 subcategory **A**에 대하여,

1) **A**가 **Top**의 bireflective (bicoreflective, resp.) subcategory 이기 위한 필요충분조건은 **A**가 initial source (final sink, resp.)에 관하여 닫혀있다.

2) **A**가 **Top**의 epireflective subcategory이기 위한 필요충분조건은 **A**가 initial mono-source에 관하여 닫혀있다. 이는 **A**가 **Top**에서 productive, hereditary인 것과 동치다.

2.14. Herrlich는 limit-operator의 개념을 도입하여, **Top**의 coreflective subcategory를 모두 구하였다[29]. infinite cardinal k에 대하여, k-closure operator는 limit-operator의 예이다. Hausdorff space의 category **Haus**의 epireflective subcategory **A**는 항상 **Haus**의 onto-reflective subcategory **B**가 존재하여, **A**는 **B**의 extensive subcategory로 된다. **Haus**의 extensive subcategory **A**를 포함하는 **Haus**의 모든 extensive subcategory도 limit-operator에 의하여 결정된다[41]. 따라서 limit-operator는 reflective subcategory와 coreflective subcategory를 동시에 결정한다.

3. 결론

Hilbert로부터 시작된 공리적 방법은 1930년대에 Noether를 거쳐서 더욱 구조적인 방법으로 강조되었다. 이는 1939년부터 시작한 Bourbaki의 Eléments de Mathematique에 정리되고, 1945년 Eilenberg와 Mac Lane에 의하여 category theory가 도입되었지만, homology, homological algebra에만 주로 쓰였다. 1958년 Kan에 의하여 Bourbaki의 universal mapping problem을 보완하는 adjoint situation과 limit, colimit의 개념이 도입되고, 1960년대 초에 대수적 구조를 adjoint situation을 통하여 정의할 수 있게 되어, category theory는 처음 도입되었을 때에 기대하였던 대로 수학의 모든 분야에 급속히 쓰이기 시작하였다.

위상수학은 거리공간의 일반화 정도로 이해되다가, 1935년 Tychonoff는 product를 정의하고, 이를 이용하여 Tychonoff Theorem을 증명하였다. locally compact space의 one-point compactification 이후, Tychonoff의 결과를 이용하여 Stone-Čech compactification이 구성된 후 위상수학은 제 자리를 차지하게 되었다. 이 후 uniform space 의 completion이 만들어진 후 이들이 모두 reflection으로 되어, extension theory와 category theory가 연결되므로 category theory와 위상수학은 자연스럽게 연결되고, 1960년대부터 급속하게 발전하여 1971년 categorical topology라는 분야가 탄생하였다. 이 분야는 매우 광범위한 주제를 다루는데, 우리는 주로 **Top**의 reflective, coreflective subcategory의 문제를 통하여 그 생성과정을 알아보았다. 이들이 categorize되기 이전과 그 후의 결과를 비교함으로 새로운 개념이 정립되는 과정과, category theory를 통하여 여러 문제가 통합되는 과정과 구조적으로 문제를 다루므로 전체를 조감할 수 있게 됨을 알 수 있다. 이는 category theory이전의 수학과 매우 다른 양상이다. 한 개의 문제에서 다음 문제로 발전하던 것과 달리, 수학의 여러 분야의 결과가 category theory로 통합되고, 다시 새로운 문제를 만들어 내는 과정으로 변하였다.

참고문헌

1. J. Adámek, H. Herrlich and G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, Wiley, New York, 1990.
2. R. Baer and F. Levi, Stetige Funktionen in topologischen Räumen, *Math. Z.* 34(1932), 110-130.
3. B. Banaschewski, Über nulldimensionale Räume, *Math. Nach.* 13(1955), 129-140.
4. E. Binz, Continuous Convergence on C(X), *Springer Lect. Notes in Math.* 469, New York, 1975.
5. E. Borel, Sur quelque points de la théorie des fonctions, *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.* 12(1895), 9-55.
6. N. Bourbaki, *Theory of Sets,* Hermann, Paris, 1968.
7. N. Bourbaki, *General Topology,* Part I, Part II, Hermann, Paris, 1966.
8. G. Cantor, Über unendliche, lineare Punktmanichfatigkeiten II, *Math. Ann.* 17(1880), 355-358.
9. H. Cartan, Théorie des filtres, *Compt. Rendue Acad.* 205(1937), 595-598.
10. H. Cartan, Filtres et ultrafiltres, *Comp. Rendue Acad.* 205(1937), 777-779.
11. E. Čech, On bicompact spaces, *Ann. Math.* 38(1937), 823-844.
12. V. A. Efremovič, Geometry of proximity, *Mat. Sbornik*, 31(1952), 189-200.
13. S. Eilenberg and S. Mac Lane, General theory of natural equivalences, *Trans. Amer. Math. Soc.* 58(1945), 231-295.

14. R. Engelking and S. Mrówka, On E-compact spaces, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.* 6(1958), 429-436.
15. H. R. Fischer, Limesraume, *Math. Ann.* 137(1959), 269-303.
16. S. P. Franklin, Spaces in which sequences suffice, *Fund. Math.* 57(1965), 107-115.
17. S. P. Franklin, Spaces in which sequences suffice II, *Fund. Math.* 61(1967), 51-56.
18. M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo,* 22(1906), 1-74.
19. P. Freyd, *Functor Theory,* Thesis, Princeton Univ. 1960.
20. P. Freyd, *Abelian Categories,* Harper & Row, New York, 1964.
21. P. Freyd and G. M. Kelly, Categories of continuous functors I, *J. Pure Appl. Alg.* 2(1972), 169-191.
22. L. Gilman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions,* van Nostrand, Princeton, 1960.
23. A. M. Gleason, Universal locally connected refinements, *Illinois J. Math.* 7(1963), 521-531.
24. A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.* 9 (1957), 119-221.e
25. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre,* Veit, Leipzig, 1914.
26. H. Herrlich, Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen und Kompaktheitsgrad topologischer Räume, *Math. Z.* 96(1967), 64-72.
27. H. Herrlich, $\mathfrak{E}$-kompakte Räume, *Math. Z.* 96(1967), 228-255.
28. H. Herrlich, Topolgische Reflexionen und Coreflexionen, *Springer Lect. Notes in Math. 78,* Berlin, 1968.
29. H. Herrlich, Limit-operators and topological coreflections, *Trans. Amer. Math. Soc.* 146(1969), 203-209.
30. H. Herrlich, Categorical topology, *Gen. Topol. Appl.* 1(1971), 1-15.
31. H. Herrlich, A concept of nearness, *Gen. Topol. Appl.* 4(1974), 191-212.
32. H. Herrlich, Topological Structures I, *Math. Centre Tracts* 52(1974), 59-122.
33. H. Herrlich, Categorical topology 1971-1981, *Gen. Topol. Rel. Mod. Anal. and Algebra V* (ed. J. Novák), Heldermann Verlag, Berlin, 297-383.
34. H. Herrlich and G. E. Strecker, *Category Theory,* Allyn and Bacon, Boston, 1973.
35. H. Herrlich and G. E. Strecker, Coreflective subcategories, *Trans. Amer. Math. Soc.* 157(1971), 205--226.
36. H. Herrlich and G. E. Strecker, Coreflective subcategories in general topology, *Fund. Math.* 73(1972), 199-238.

37. H. Herrlich and G. E. Strecker, Categorical Topology, *Handbook of the History of General Topology*, Vol. 1, eds. C. E. Aull and R. Rowen, Kluwer Academic Pub. 255-341.
38. E. Hewitt, Rings of real-valued continuous functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 64(1948), 54-99.
39. D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7th ed.; Teubner, Leibzig, 1930.
40. S. S. Hong, On k-compactlike spaces and reflective subcategories, *Gen. Topol. Appl.* 3(1973), 319-330.
41. S. S. Hong, Limit-operators and reflective subcategories, *Lect. Notes in Math., Springer*, 378(1974), 219-227.
42. J. R. Isbell, Some remarks concerning categories and subspaces, *Canad. J. Math.* 9(1957), 563-577.
43. J. R. Isbell, Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras, *Rozp. Math.* 36(1964), 1-32.
44. J. R. Isbell, *Uniform spaces, Amer. Math. Soc.*, Providence, 1964.
45. V. M. Ivanova and A. A. Ivanov, Contiguity spaces and bicompact extensions, *Isz. Akad. Nauk SSR*, 23(1959), 613-634.
46. S. Kakutani, Free topological groups and infinite direct products of topological groups, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20(1944), 595-598.
47. D. M. Kan, Adjoint functors, *Trans. Amer. Math. Soc.* 87(1958), 294-329.
48. G. M. Kelly, Monomorphisms, epimorphisms, and pull-backs, *J. Austral. Math. Soc.* 9(1969), 124-142.
49. J. F. Kennison, Full reflective subcategories and generalized covering spaces, *Illinois J. Math.* 12(1968), 353-365.
50. S. Mac Lane, Groups, categories and duality, *Proc. Nat. Acad. Sci.* USA, 34(1948), 263-267.
51. A. A. Markoff, On free topological groups, *Dokl. Akad. Nauk SSR*, 31(1941), 3-36.
52. A. A. Markoff, On free topological groups, *Izv. Akad. Nauk SSR, Ser. Math.* 9(1945) 3-64.
53. L. B. Meyer, *Music, The Arts, and Ideas*, The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1967.
54. B. Mitchell, *Theory of Categories, Academic Press*, New York, 1965.
55. E. H. Moore and H. L. Smith, A general theory of limits, *Amer. J. Math.* 44(1922), 102-121.
56. S. Mrówka, On universal spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl.* III4(1956), 479-481.

57. S. Mrówka, A property of Hewitt-extension υX of topological spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.* 6(1958), 95-96.
58. S. Mrówka, On E-compact spaces II, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.* 14(1966), 597-605.
59. S. Mrówka, Further results on E-compact spaces I, *Acta Math.* 120(1968), 161-185.
60. B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke,* 2nd ed. Teubner, Leibzig, 1892.
61. F. Riesz, Die genesis des Raumbegriffs, *Math. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn,* 24(1907), 309-353.
62. C. M. Ringel, Diagonalisierunspaare I. *Math. Z.* 117(1970), 249-266.
63. P. Samuel, On universal mappings and free topological groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* 54(1948), 591-598.
64. Z. Semadeni, Projectivity, injectivity, and duality, *Rozp. Mat.* 35(1963), 1-47.
65. J. Sonner, Universal solutions and adjoint homomorphisms, *Math. Z.* 86(1964), 14-20.
66. M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.* 41(1937), 375-481.
67. H. Tietze, Beiträge zur allgemeinen Topologie I, *Math. Ann.* 88(1923); 290-312.
68. V. Trnkova, On the theory of categories, *Comm. Math. Univ. Carolinae,* 3(1962), 9-35.
69. A. Tychonoff, Über die Topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.* 102(1930), 544-561.
70. A. Tychonoff, Über einen Funktonenraum, *Math. Ann.* 111(1935), 762-766.
71. A. Tychonoff, Ein Fixpunktsatz, *Math. Ann.* 111(1935), 767-776.
72. A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Act. Sci. Ind. Hermann,* Paris, 1937.
73. H. Weyl, Emmy Noether, *Scripta Math.* 3(1935), 200-220.
74. 홍성사, 홍영희, 순서와 위상구조의 관계, *Historia Math.* 10(1997), 19-32.