순서와 위상구조의 관계

서강대학교 수학과 홍성사
숙명여자대학교 수학과 홍영희

Abstract

This paper deals with the relationship between the order structure and topological structure in the historical point of view. We first investigate how the order structure has developed along with the set theory and logic in the second half of the nineteenth century. After the general topology has emerged in the beginning of the twentieth century, two disciplines of the order theory and topology give each other a great deal of effect for their development via various dualities, compactifications by maximal filter spaces and Alexandroff's specialization order, which form eventually a fundamental setting for the development of the category theory or functor theory.

1991 Mathematical Subject Classification - 01A55, 01A60, 06-03, 54-03, 18-03

0. 서론

수학은 구조적인 입장에서 수학적 구조를 연구하는 학문으로 이해되고, 수학적 구조는 순서구조, 대수적 구조, 위상적 구조와 그들의 복합 구조(mixed structure)로 이해되고 있다. 이 중에서, 순서구조는 그 자체의 연구도 중요하지만, 다른 구조의 연구에 매우 중요한 도구로 사용된다. 정렬집합과 유한, 무한 귀납법, 및 귀납적 정의(recursive construction), 선택공리와 Zorn's Lemma를 통한 구성(construction)등은 수학의 모든 분야에서 이용되고 있다. 대수학에서 부분 대수(subalgebra)의 격자(lattice)나, congruence lattice에 의한 대수적 구조의 연구, 위상수학에서 상한(supremum), 하한(infimum)을 통한 approximation, 수열과 filter의 수렴에 의한 위상구조의 연구는 모두 순서구조가 이들의 구조를 밝히는데 절대적임을 보여 주고 있다.

여 주고 있다.

이 논문의 목적은 순서구조와 위상구조의 발전과정의 관계를 조사함으로 이들이 서로 상대방의 발전에 어떤 영향을 주면서 발전하였는가를 알아보는 것이다. 특히 이들을 category theory(=functor theory)([1])를 이용하여 정리함으로 그들 사이의 관계를 더욱 쉽게 이해하고, 또 이들은 후에 category theory의 발전에도 기여하고 있음을 보이고자 한다.

1절에서는 순서구조 자체의 역사를 알아본다. 19세기의 형식논리학과 집합론의 발전과 함께 순서구조의 연구가 진행되는 과정을 조사한다.

20세기로 넘어오면서 위상수학이 정립된 후, duality, compactification, specialization order 등을 통해서 위상구조와 순서구조의 연구가 함께 발전하는 과정을 기술한 것이 2절이다.

1. 순서구조

1.1 실수와 그 부분집합의 보통순서(usual order)를 추상화하여 순서집합을 처음 정의한 사람은 분명하지 않지만, 순서집합을 체계적으로 처음 연구한 사람은 역시 Cantor(1845 - 1918)이었다. 그는 주로 전순서집합(totally ordered set)을 다루었고, 특히 그의 무한론(=집합론)의 연구를 위하여 1882년에 도입한 정렬집합(well-ordered set)의 개념은 그의 업적 중에서 가장 중요한 것이라고 평가되고 있다. 실제로 Cantor는 기수(cardinal number)를 같은 기수를 갖는 최소 순서수(first ordinal)로 정의하고 기수의 이론을 전개하였다. 또 두 order type의 곱을 정의한 것은 1885년이었다. 물론 두 순서수의 곱은 바로 그 order type의 곱의 순서수이다. 현재 우리가 사용하는 두 기수의 곱, 즉 A의 기수 = a, B의 기수 = b에 대하여 ab = A×B의 기수로 정의한 것이 1895년([14])임을 보아도 그의 집합론이 순서구조 - 정렬집합 -의 연구에 의하여 이루어 진 것을 알 수 있다. 또 정렬집합에서, 무한귀납법(transfinite induction)을 이용한 증명과 무한귀납적 정의(transfinite recursive definition)를 이용하여 정의되는 집합들을 통하여, 여러 새로운 사실을 증명하였다. 따라서 그에게 Well-Ordering Principle은 반드시 필요한 명제이었고 이를 증명하려고 노력하였다. 그 후 Zermelo가 선택공리를 통하여 Well-Ordering Principle을 증명한 것은 주지의 사실이다 ([41, 42]). 1873년경부터 Cantor와 Dedekind (1831 - 1916)는 편지를 통하여 자기들의 연구결과에 대한 비판을 나눔으로 서로의 연구에 많은 영향을 주었다.

1.2 Cantor가 주로 전순서집합과 정렬집합에 대한 연구를 한 반면 Dedekind는 순서집합(partially ordered set)과 격자(lattice)에 대한 연구를 진행하여 이들을 발표하였으나, 그 당시 수학자들에게 별로 호응을 얻지 못하고, 1935년 이후에 그의 결과들이 재발견되었다. Dedekind가 다룬 격자는 Ideal lattice로 일반적인 격자는 아니었다([17, 18]). 또 그는 유리수의 보통순서집합 $\mathbb{Q}$위에서 절단(cut)을 다음과 같이 정의하였다.

1.3 다음 조건을 만족하는 순서쌍 (V, W) (V, W $\subseteq$ $\mathbb{Q}$)를 Dedekind cut라 한다.

D1) $V \neq \varnothing$, $W \neq \varnothing$.

D2) $V = \downarrow V = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x \le v, v \in V \}$, $W = \uparrow W = \{ x \in \mathbb{Q} \mid w \le x, w \in W \}$.

D3) 임의의 $p \in V$에 대하여, $p' \in V$이 존재하여 $p < p'$이고, $q \in W$에 대하여, $q' \in W$ 이 존재하여 $q' < q$이다.

D4) $p < q$이면, $p \in V$이거나 $q \in W$이다.

D5) $V \cap W = \varnothing$.

Dedekind는 Dedekind cut의 집합으로 실수의 집합을 정의하고, 이는 Dedekind complete (공집합이 아닌 위로 유계인 부분집합은 상한을 가진다) 임을 증명하였다([16]). 이는 쉽게 순서집합으로 확장하여 순서집합의 Dedekind completion을 구성할 수 있다. 실제로 Dedekind complete 순서집합보다 완비 순서집합 (complete partially ordered set = 모든 부분집합이 상한을 가지는 순서집합)이 먼저 생각되어야 하였음에도 불구하고, 그 당시 수학자들이 수체계에 관심을 가지고 있었으므로, Dedekind complete 순서집합이 먼저 취급되었다.

순서집합의 완비화(completion of partially ordered set)는 1937년 MacNeille에 의하여 구성되었다([29]). 순서집합의 MacNeille completion은 다음과 같이 구성된다.

1.4 순서집합 $(X, \le)$의 원소 x에 대하여, $\downarrow x = \{a \in X \mid a \le x\}$라 하자. 이때, 함수 ${}^c : P(X) \to P(X)$ $(A \mapsto A^c = \cap\{\downarrow x \mid x$는 A의 상계$\})$
로 정의하면, 함수 ^{c}는 closure operator, 즉, 모든 $A, B \in P(X)$에 대하여,

$$A \subseteq A^c; \quad A \subseteq B\text{이면, } A^c \subseteq B^c; \quad A^{cc} = A^c$$

를 만족한다.

따라서, $mX = \{A \in P(X) \mid A = A^c\}$는 closure system, 즉, mX는 임의의 교집합에 대하여 닫혀있다. 그러므로 $(mX, \subseteq)$는 complete lattice이다. 또 함수

$$\downarrow : X \to mX \ (x \mapsto \downarrow x)$$

는 증가함수이고, X의 부분집합이 상한 혹은 하한을 가지면, $\downarrow$는 그 상한, 하한을 보존한다.

또 mX의 원소 A에 대하여,

$$A = \vee\{\downarrow x \mid \downarrow x \subseteq A\} = \wedge\{\downarrow x \mid A \subseteq \downarrow x\}$$

이므로, $\{\downarrow x \mid x \in X\}$는 mX에서 join-dense, meet-dense이다. 실제로 MacNeille completion은 join-dense meet-dense completion으로 확정된다([6, 7]).

1.5 위의 Dedekind completion과 MacNeille completion을 비교하여 보면, 집합론이 정립되지 않은 19세기 수학자들과 그 후의 수학자들 사이에 명백한 차이가 있음을 알 수 있다. 20세기 이전의 수학자들은 수체계 및 그와 관련된 분야에서 별로 벗어나지 못하였다.
순서집합, 특히 격자론은 집합과 명제들의 이론에서 시작되었다. Leibniz(1646-1716)가 처음

두 명제(실제로 그는 명제의 개념은 정립하지 못하고 이를 개념의 입장으로 이해하였다) p, q의 conjunction을 pq로 나타내고 pq = p와 p ⇒ q가 서로 동치임을 밝혀내었다. 그러나 p, q의 disjunction과 conjunction사이의 관계를 밝히지 못하여 더 이상의 진전을 보지 못하였다([28]). 그 후, Boole(1815-1864)이 두 집합 x, y의 교집합을 xy로 나타내고 서로 소(disjoint)인 두 집합 x, y에 대하여 합집합을 x+y로 나타내었다. 공집합을 0, 전체집합을 1로 또 x의 여집합을 1-x로 나타내었다. 그 역시 xy = x와 x⊆y가 서로 동치임을 보인다. 한편 명제적 서술 p, q에 대하여 이들의 해집합의 교집합, 합집합과 p, q의 conjunction, disjunction을 대응시켜 p∧q, p∨q의 계산이 가능함을 보임으로, 명제계산의 수학화와 Boolean logic과 Boolean algebra의 관계의 기초를 이루었다([9, 10]). 그가 disjoint union만 정의한 이유는 아마도 그는 정수의 곱셈과 덧셈과 같이 pq, p+q를 생각하였기 때문인 것으로 추측하고 있다. 이 후 Jevons(1835-1882)는 1864년에 x, y가 disjoint가 아닌 경우까지 그들의 합집합 x+y를 정의하였다.

또 De Morgan(1806-1871)은 1858년, Peirce(1839-1914)는 1867년에 독립적으로 오늘날 De Morgan법칙으로 알려진

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \;;\; \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B \quad (\complement A\text{는 }A\text{의 여집합})$$

을 증명하였다.

그 후 Peirce([30])는 1880년 분배격자(distributive lattice)의 중요성을 처음 인지하였다. 그러나, 그는 모든 격자는 분배격자인 것으로 생각하고 이론을 전개하였다. 분배격자의 dual 격자도 분배격자이다. 즉, 격자 (L, ∨, ∧)가 모든 a, b, c ∈ L에 대하여,

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

이면,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

임을 Schröder가 1890년에 처음 증명하였다([33]).

Leibniz가 처음 시도하였다가 실패한 이후, 19세기 말에 conjunction과 disjunction의 관계는 그들 사이의 분배법칙과 De Morgan법칙에 의하여 완전히 해결되었다. 이상에서 다룬 것은 모두 집합이나 명제들을 대상으로 하고 있다. Whitehead(1861-1947) 와 Huntington (1874-1952)이 각각 [40], [25]에서 이들을 추상화하였다.

이들의 결과와 논리학과의 관계는 우리가 다루려는 위상구조와 순서구조의 관계의 범위에서 벗어나므로 다음기회로 넘긴다. 그러나 Brouwer (1881-1966)와 그 학파들이 이룬 직관주의(Intuitionism)([11, 12])의 논리를 위하여 1930년 Heyting이 도입한 Heyting algebra([24])를 소개함으로, Boolean logic과 Boolean algebra, Brouwerian logic과 Heyting algebra의 관계에서 순서구조 및 격자의 발전과정과 logic과 lattice의 관계를 이해하고자 한다.

앞으로, 모든 격자는 유계격자(bounded lattice), 즉 최대원, 최소원을 가진다고 가정하고 이를 각각 1, 0으로 나타낸다.

1.6 격자 (L, ∨, ∧)이 다음 조건을 만족할 때 Heyting algebra라 한다 : 모든 a, b $\in$ L 에 대하여, "c $\leq$ (a $\to$ b) $\Leftrightarrow$ c $\wedge$ a $\leq$ b (c $\in$ L)"를 만족하는 원소 a $\to$ b가 존재한다.

1.7 Heyting algebra (L, ∨, ∧)에 대하여 다음이 성립한다.

a) $a \to a = 1$.

b) $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$.

c) $b \wedge (a \to b) = b$.

d) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$ (a, b, c $\in$ L).

e) (L, ∨, ∧)은 분배격자이다.

f) $\sim a = a \to 0$으로 정의하면, $a \wedge x = 0 \Leftrightarrow x \leq \sim a$.

위의 a) - d)는 a, b, c를 명제로, →를 conditional connective "if, then"으로, 1을 항진명제 (tautology)로 바꾸면 Boolean logic에서 성립하는 동치관계이고, ~a는 a의 부정 (negation of a)과 대응됨을 알 수 있다. 실제로 격자 (L, ∨, ∧)이 위의 a) - d)를 만족하는 이항연산 (binary operation)을 가지면, L은 Heyting algebra이다([5, 27]).

따라서, Boolean algebra는 두 개의 이항연산 ∨, ∧와 한 개의 일항연산(unary operation) ~을 가지는 격자, 즉 disjunction, conjunction, negation을 가지는 격자임에 반하여, Heyting algebra는 세 개의 이항연산 ∨, ∧, →을 가지는 격자, 즉 disjunction, conjunction, conditional connective를 가지는 격자이고, 0을 모순명제(contradiction)로 볼 때, $\sim p = p \to 0$으로 p의 부정을 정의하는 논리이다. 한편, Boolean algebra L의 원소 a, b에 대하여, $a \to b = \sim a \vee b$이므로, Boolean algebra는 Heyting algebra이다.

전순서집합 L의 원소 a, b에 대하여, $a \leq b$이면, $a \to b = 1$, 그 밖의 경우에는 $a \to b = b$이므로, 전순서집합은 Heyting algebra이다. 전순서집합 {0, 1/2, 1}과 폐구간 [0, 1]은 Boolean algebra가 아닌 Heyting algebra이다.

Boolean algebra는 Heyting algebra이외에도, pseudo complemented distributive lattice, Post algebra([32]), De Morgan algebra, Lukasiewicz algebra등으로 일반화되어, Boolean algebra가 Boolean logic의 수학화이듯이, 이들은 각각 중요한 logic들의 수학화이다. 이들에 대한 자료는 [5]에서 얻어 낼 수 있다.

한편 complete lattice쪽으로는, complete Boolean algebra, complete Heyting algebra, continuous lattice, coherent lattice등으로 연구가 진행되고 있고, 이 중 complete Heyting algebra는 다음 절에서 다시 언급하기로 한다. 이와 같이 순서 및 격자이론은 그 자체의 연구와 병행하여, logic의 체계화 혹은 수학화와 함께 발전하였음을 알 수 있다.

2. 위상구조와 순서구조

2.1 1906년에 Fréchet(1878-1973)가 Hadamard의 지도하에 쓴 그의 학위 논문에서 거리공간과 수열공간(sequential space)을 도입하여 수체계의 위상을 추상화한 후([20]), 1914년 Hausdorff(1868-1942)가 위상공간(=오늘의 Hausdorff 공간)을 도입함으로 위상수학이 시작되었다([22]).

실수의 위상구조(topological structure)와 uniform structure가 실수의 순서구조, 즉 Dedekind completeness에 의하여 결정되는 것은 잘 알려져 있다. 실제로 실수의 완비성(completeness)과 실수가 Dedekind complete인 것은 서로 동치이다. 거리공간의 위상구조는 실수의 순서구조를 이용하여 정의된다.

그러나, 위상공간과 순서구조사이의 연결을 처음 밝혀낸 것은 M. H. Stone이었다. 그는 우선 Boolean algebra와 모든 원소가 idempotent($a^2 = a$인 원소)인 unitary ring, 즉 Boolean ring과 서로 동치임을 보였다([34]). Ring의 ideal theory를 Boolean algebra에 옮겨, 격자론에서 ideal theory의 중요성을 처음 인지하였다.

앞에서와 같이 이 절에서도 모든 격자는 유계격자를 뜻한다.

2.2 격자 $(L, \vee, \wedge)$의 부분집합 I에 대하여,

a) $I = \downarrow I$; $0 \in I$; $a, b \in I$에 대하여 $a \vee b \in I$일 때, I를 L의 ideal이라 한다;

b) $I \neq L$인 ideal이며, $a \wedge b \in I$ 이면 $a \in I$이거나 $b \in I$일 때, I를 prime ideal이라 한다.

c) I가 포함관계에 관하여 maximal proper ideal일 때, I를 maximal ideal이라 한다.

Ideal, prime ideal, maximal ideal의 dual을 각각 filter, prime filter, ultrafilter라 한다.

2.3 격자 $(L, \vee, \wedge)$의 ideal I에 대하여 다음은 서로 동치이다.

a) $\complement I$는 L의 filter이다.

b) I는 prime ideal이다.

c) lattice homomorphism $h : L \to 2$가 존재하여, $I = h^{-1}(0)$ (2 는 chain $\{0, 1\}$을 나타낸다).

d) $\hom(L, 2) = \{h \mid h : L \to 2$는 lattice homomorphism$\}$과 L의 prime ideal 전체의 집합 spec(L) 사이에 일대일 대응이 존재한다.

e) L이 분배격자이면, maximal ideal은 prime ideal이다.

2.4 분배격자 $(L, \vee, \wedge)$가 Boolean algebra이기 위한 필요충분조건은 L의 모든 prime ideal이 maximal ideal인 것이다.

이상의 준비를 가지고, Boolean algebra와 위상공간사이의 관계를 알아보자.

2.5 Boolean algebra $(L, \vee, \wedge)$에 대하여 $\hom(L, 2)$를 discrete space $2 = \{0, 1\}$의 적공간(product space) 2^L의 부분공간(subspace)으로 보자. 2는 zero-dimensional compact Hausdorff space이므로, $\hom(L, 2)$는 2^L의 closed subspace이다. 따라서, $\hom(L, 2)$는 zero-dimensional compact Hausdorff space이다.
또 lattice homomorphism $h : (L, \vee, \wedge) \to (L', \vee, \wedge)$에 대하여,

$$\hom(h, 2) : \hom(L', 2) \to \hom(L, 2) \ (u \mapsto u \circ h)$$

는 연속함수이다. 따라서

$$\hom(\ , 2) : \mathbf{Bool} \to \mathbf{ZComp}$$

는 contravariant functor이다. (**Bool**은 Boolean algebra와 lattice homomorphism으로 이루어진 category이고, **ZComp**는 zero-dimensional compact Hausdorff space와 연속함수로 이루어진 category이다.)
위의 **2.3, 2.4**에서, $\hom(L, 2)$는 $\mathrm{spec}(L) = \{P \mid P : L$의 prime ideal$\}$
$= \{M \mid M : L$의 maximal ideal$\}$
로 이해할 수 있다. L의 원소 a에 대하여,

$$\Sigma_a = \{u \in \hom(L, 2) \mid u(a) = 1\}$$

로 놓으면, $\{\Sigma_a \mid a \in L\}$은 $\hom(L, 2)$의 base이다. 이 때, $\hom(L, 2)$를 $\mathrm{spec}(L)$로 identify 하면,

$$\Sigma_a = \{P \in \mathrm{spec}(L) \mid a \notin P\}$$

로 되어, commutative unitary ring의 structure space (= maximal ideal space) 혹은 spectral space (= prime ideal space)의 정의와 $\hom(L, 2)$의 정의가 같음을 알 수 있다.

2.6 Zero-dimensional compact Hausdorff space X에 대하여,

$$C(X, 2) = \{f \mid f : X \to 2\text{는 연속함수}\}$$

를 나타내고, $f, g \in C(X, 2)$에 대하여, $f \le g$를 모든 $x \in X$에 대하여, $f(x) \le g(x)$로 정의하자. 즉, $f \le g \Leftrightarrow f^{-1}(1) \subseteq g^{-1}(1)$이고, 또 $f^{-1}(1)$은 X의 clopen (= closed and open) subset이다.
따라서,

$$C(X, 2) \to (\{A \mid A : X\text{의 clopen subset}\}, \subseteq) \ (f \mapsto f^{-1}(1))$$

은 order isomorphism이고, $(\{A \mid A : X$의 clopen subset$\}, \subseteq)$은 Boolean algebra $(P(X), \subseteq)$의 subalgebra이므로, $C(X, 2)$는 Boolean algebra이다.
또 연속함수 $f : X \to Y$에 대하여,

$$C(f, 2) : C(Y, 2) \to C(X, 2) \ (u \mapsto u \circ f)$$

는 lattice homomorphism이다. 따라서,

$$C(\ , 2) : \mathbf{ZComp} \to \mathbf{Bool}$$

은 contravariant functor이다.
위의 order isomorphism $C(X, 2) \to (\{A \mid A : X$의 clopen subset$\}, \subseteq)$에 의하여 두 집합

을 identify하면,

$C(f, 2) : \{B \mid B : Y\text{의 clopen subset}\} \to \{A \mid A : X\text{의 clopen subset}\}$ $(B \mapsto f^{-1}(B))$

로 된다.

2.7 (M. H. Stone) Functor hom(, 2) : **Bool** → **ZComp**과 C(, 2) : ZComp → Bool 에 의하여 **Bool**과 **ZComp**는 dually equivalent이다([35, 36]).

모든 Boolean algebra $(L, \vee, \wedge)$에 대하여,

$\eta : L \to C(\hom(L, 2), 2)$ $(a \mapsto \eta(a), \eta(a)(h) = h(a))$는 lattice isomorphism이고,

모든 zero-dimensional compact Hausdorff space X에 대하여,

$\varepsilon : X \to \hom(C(X, 2), 2)$ $(x \mapsto \varepsilon(x), \varepsilon(x)(f) = f(x))$는 homeomporphism이다.

위의 **2.7**을 Stone duality라 부르고, 이는 매우 큰 반응을 불러일으켰다. Stone duality는 최초의 서로 다른 구조사이의 duality이며, 후에 도입된 functor theory의 기초도 되었다. 1938년 Stone은 [37]에서 "A cardinal principle of modern mathematical research may be stated as a maxim: "One must always topologize""라고 말하고, 그 후 compact Hausdorff space X의 구조도 $C(X, \mathbf{R})$의 여러 종류의 대수적 구조에 의하여 결정되고, completely regular space X의 Stone-Čech compactification도 ring $C^*(X, \mathbf{R}) = \{f \mid f : X \to \mathbf{R}$은 bounded continuous map$\}$의 maximal ideal space로 characterize 되었다. 또 위의 Duality에 의하여, complete Boolean algebra는 extremally disconnected compact Hausdorff space (= 모든 open set의 closure가 다시 open인 compact Hausdorff space)에 대응되어 **Bool**에서 injective object는 complete Boolean algebra인 사실에서, **ZComp**의 projective object는 extremally disconnected compact Hausdorff임이 곧 증명된다. 이와 같이 Stone duality에 의하여 위상수학과 순서구조론은 새로운 전기를 맞게 되어, 두 분야의 연구가 활발하게 진행되었다.

또 모든 zero-dimensional Hausdorff space X에 대하여, X 의 maximal zero-dimensional compactification ζX (= Banaschewski compactification of X)는 X의 maximal clopen filter space이다. 물론 X의 maximal clopen filter는 Boolean algebra

$C(X, 2) = (\{A \mid A : X\text{의 clopen subset}\}, \subseteq)$

에서 maximal filter (dual of maximal ideal = the complement of maximal ideal(2.3 참조)) 이고, ζX의 위상은 2.5의 dual, 즉,

$\{\Sigma_A = \{\mathcal{F} \in \zeta X \mid A \in \mathcal{F}\} \mid A : X\text{의 clopen set}\}$

을 base로 갖는다.

2.8 1938년 Wallman은 이를 일반화하여, T_1 space X의 closed set lattice의 maximal filter space로 X의 compactification을 구성하였다([39]). 이를 X의 Wallman compactification 이라 부른다. 실제로 X가 normal space이면, X의 Wallman compactification은 X의 Stone-Čech compactification이다. 이 후에, 위상공간 X의 여러 종류의 lattice의 maximal filter space로 X의 compactification을 구성하였다. 이들을 통틀어 Wallman type compactification이라 부르고, locally compact space의 one point compactification, Stone-Čech compactification, Banaschewski compactification은 모두 Wallman type compactification이다. 실제로 모든 compactification이 Wallman type인가는 오래된 미해결 문제이다([15, 31]).

집합 X의 부분집합 전체 P(X)와 명제전체의 동치관계에 의한 상집합(quoteinet set)과 같이, Boolean algebra는 매우 자연스러운 격자이므로 이들에 대한 관심은 당연하다. 그러나 Wallman type compactification이 구성된 후, Boolean algebra가 아닌 격자도 위상수학에서 중요한 역할을 한다는 사실이 밝혀짐으로, 격자론의 연구에 중요한 계기가 마련되었다.

2.9 위상공간 X의 점 x, y에 대하여 다음은 서로 동치이다.

a) $x \in \mathrm{cl}\,\{y\}$ (cl A는 A의 closure를 나타낸다).

b) $\mathrm{cl}\,\{x\} \subseteq \mathrm{cl}\,\{y\}$.

c) $\Omega(x) \subseteq \Omega(y)$ ($\Omega(x)$는 x의 neighborhood filter를 나타낸다).

2.10 위상공간 X에서 $x \le_s y$를 $x \in \mathrm{cl}\,\{y\}$로 정의하면, 2.9에 의하여 $\le_s$는 X의 quasi order relation(=reflexive and transitive relation)이 된다. 이 때, $\le_s$를 X의 specialization order라 한다. 또 연속함수 $f : X \to Y$에 대하여, $f : (X, \le_s) \to (Y, \le_s)$는 증가함수이다. 따라서,

S : **Top** $\to$ **QOrd** ($S(X) = (X, \le_s)$; $S(f) = f$ (X는 위상공간, f는 연속함수))

는 functor이다(**Top**은 위상공간과 연속함수의 category이고, **Qord**는 quasi ordered set과 증가함수의 category이다).

2.9에 의하여, 위상공간 X가 T_0이기 위한 필요 충분조건은 $S(X) = (X, \le_s)$가 순서집합(partially ordered set)이고, T_1 공간 X에서, $\le_s$는 항등관계 Δ, 즉 discrete order이다. 따라서, S : $\mathbf{Top_0} \to$ **POSet**는 T_0 공간과 연속함수의 category $\mathbf{Top_0}$에서 순서집합과 증가함수의 category **POSet**으로의 functor이다.

2.11 Quasi ordered set $(X, \le)$에 대하여, $\mathfrak{I} = \{A \subseteq X \mid A = \uparrow A\}$로 놓으면, $\mathfrak{I}$는 임의의 union과 임의의 intersection에 대하여 닫혀있다. 따라서, $\mathfrak{I}$는 X의 위상이다. 앞으로,

$$U(X, \le) = (X, \mathfrak{I})$$

라 하자.

증가함수 $f : (X, \le) \to (Y, \le)$에 대하여, $B = \uparrow B \subseteq Y$이면, $f^{-1}(B) = \uparrow f^{-1}(B)$이므로, $f : U(X, \le) \to U(Y, \le)$는 연속함수이다. 따라서,

U : **QOrd** $\to$ **Top** ($U(f) = f$)

는 functor이다.

이 때, 모든 $x \in X \in$ **QOrd**에 대하여, $\uparrow x$는 $U(X)$에서 x를 포함하는 가장 작은 open set이므로, $\{\uparrow x\}$는 U(X)의 x에서 local base이다. U(X)에서 $x \le_s y \Leftrightarrow \Omega(x) \subseteq \Omega(y) \Leftrightarrow x \le y$, 즉 SU(X) = X이므로, SU = 1_{QOrd}이다. 따라서, U : **QOrd** → **Top**은 embedding functor가 되어,

QOrd은 **Top**의 부분 category로 볼 수 있다.

위상공간 X의 모든 open set V는 $(X, \le_s)$에서 $V = \uparrow V$이므로, 항등함수 1_X : US(X) → X는 연속함수이다. 따라서, $(1_X)_{X \in Top}$: US → 1_{Top} 은 natural transformation이고, U는 S의 left adjoint이다.

2.12 위상공간 X에 대하여 다음은 서로 동치이다.

a) X의 open set의 교집합은 open이다.

b) X의 closed set의 합집합은 closed이다.

c) 모든 $x \in X$에 대하여, x의 최소 근방이 존재한다.

d) X의 부분집합의 family $(A_i)_{i \in I}$에 대하여, $cl(\cup\{A_i \mid i \in I\}) = \cup\{cl(A_i) \mid i \in I\}$이다.

e) X의 부분집합 A에 대하여, $cl\ A = \cup\{cl\ \{x\} \mid x \in A\}$이다.

위상공간 X가 **2.12**의 a) - e)를 만족하면, X를 finitely generated space라 한다.

위상공간 X의 점 x에 대하여, $\uparrow x = \{a \mid x \le_s a\} = \cap\Omega(x)$라는 사실에서,

X = US(X) ⇔ X는 finitely generated이다.

또, Sierpinski two point space {0, 1}({1} is a non-trivial open set in the space)를 S로 나타내면, 함수 f : S → X가 연속이기 위한 필요충분조건은 $f(0) \in cl\ \{f(1)\}$이라는 사실에서, X는 finitely generated이기 위한 필요충분조건은 C(S, X)가 final sink인 것이다. 따라서, finitely generated space의 category **FGen**은 S의 coreflective hull이고, **2.10**, **2.11**, **2.12**의 결과와 종합하여 다음을 얻을 수 있다.

2.13 Category **FGen**과 **QOrd**는 S와 U에 의하여 서로 isomorphic이다. 또 **POSet**과 T_0 finitely generated space의 category $\mathbf{FGen_0}$도 서로 isomorphic이다. 따라서, 순서구조는 위상구조의 한 부분으로 된다. 실제로, 1935년에 Alexandroff는 finitely generated space를 discrete space라는 이름으로 도입하였고([2]), Alexandroff와 Hopf는 simplicial complex K에 K의 simplex를 원소로, K의 subcomplex를 closed set으로 하는 finitely generated space를 대응시켜, simplicial complex를 연구하였다([4]). 또 1937년에 Alexandroff는 finitely generated space에 대한 homology theory를 연구하면서, **2.10**, **2.11**의 S(X)와 U(X)를 구성하였다. 그리고, 그는 결론으로, "discrete space (= finitely generated space)의 개념과 quasi ordered set의 개념은 일치한다"고 하였다([3]). Specialization order를 통하여, 순서구조와 위상구조의 관계가 정립되었을 뿐 아니라, 이후에, 위상구조의 순서화를 가능하게 하여 많은 결과가 얻어 진다([21, 23, 27]).

2.14 1.6의 Heyting algebra L의 정의는, L의 모든 원소 a에 대하여, 함수

$$a \wedge \_ : L \to L \ (x \mapsto a \wedge x)$$

$$a \to \_ : L \to L \ (x \mapsto a \to x)$$

가 Galois correspondence ($a \wedge _$는 $a \to _$의 left adjoint)임을 뜻한다. 따라서 complete lattice L이 Heyting algebra이기 위한 필요충분조건은 $a \wedge _$이 임의의 join을 보존하는 것이다, 즉 모든 $S \subseteq L$와 $a \in L$에 대하여,

$$a \wedge (\vee S) = \vee\{a \wedge s \mid s \in S\}$$

를 만족하는 것이다. complete Heyting algebra를 frame 혹은 locale이라 한다.

따라서, 위상공간 X의 위상 $\mathfrak{T}$는 frame이다. Ehresmann과 그의 제자인 Bénabou는 1957-8년 frame 이론을 통한 위상구조의 연구가 가능하다는 사실을 처음 인지하고 frame을 local lattice라 하였다([8, 19]). 위상공간 X의 위상만 가지고 X의 위상구조를 연구함으로, frame을 generalized topological space, pointless topology 혹은 pointfree topology라 부르고 있다. 두 frame 사이의 함수가 임의의 join과 유한 meet를 보존할 때, 이를 frame homomorphism이라 한다. Frame과 frame homomorphism의 category를 **Frm**으로 나타낸다.

2.5, 2.6과 같이, contravariant functor

hom(, 2) : **Frm** → **Top** (Frame L에 대하여, hom(L, 2)는 Sierpinski space S의 적공간 S^L의 부분공간),

C(, S) : **Top** → **Frm** ($C(X, S) \cong$ X의 위상 $\mathfrak{T}$ ($f \mapsto f^{-1}(1)$))

가 정의되며, 2.7의 함수 η, ε이 같은 방법으로 정의된다. 이 때, $\varepsilon : X \to \hom(C(X, S), 2)$가 homeomorphism일 필요충분조건은 X가 sober space이고, $\eta : L \to C(\hom(L, 2), S)$가 isomorphism일 때, L을 spatial frame이라 한다. L이 spatial이기 위한 필요충분조건은 L이 위상공간 X의 위상 $\mathfrak{T}$의 frame과 isomorphic인 것이다. 한편, 대수적으로는 L이 spatial이기 위한 필요충분조건은 L의 모든 원소가 L의 prime element들의 meet로 나타나는 것이다. 1952년에 Büchi는 위상공간의 위상을 위의 사실로 characterize 하였다([13]). 또, 위의 두 functor에 의하여 sober space와 연속함수의 category **Sob**과 spatial frame의 category **SFrm**은 dually equivalent, 즉 두 category 사이에 duality가 존재한다. Stone duality는 zero-dimensional compact Hausdorff space와 같이 매우 제한된 위상공간에 관한 것이나, 모든 Hausdorff space는 sober이므로, 위의 duality는 Stone duality에 비하여, 대단히 큰 category를 다루고 있다. 또 frame은 complete lattice이므로, complete lattice의 역할의 중요성도 확인되는 계기가 마련되었다. 이 후 Johnstone은 선택공리와 Tychonoff 정리가 동치인데 반하여, **Frm**에서 Tychonoff 정리는 선택공리와 무관하게 증명됨을 보임으로, frame에 대한 관심이 크게 증대되어, frame에 대한 연구가 현재도 활발하게 진행되고 있다([26, 27, 38]).

Two point discrete space **2**, Sierpinski space **S**를 써서 위상구조와 순서구조의 관계를 구하였는데, 단위 폐구간 **[0, 1]**을 **2**와 **S**대신에 사용하여 이들 관계를 정립한 이론이 continuous lattice 이론이다([21]).

3. 결론

수학사의 기술 방법은 그 사건이 일어난 때로 돌아가 당시의 입장에서 기술하는 것과 현재의 입장에서 그 사건을 이해하고 또 그 파급 효과에 치중하여 기술하는 것으로 대별된다. 수학의 발전 과정의 연결 고리를 찾고, 또 현재 일어나고 있는 현상에 대한 역사적 동기를 찾아야 하므로 두 가지 방법은 모두 장단점을 가지고 있다. 사료 수집이 거의 이차적인 국내 사정으로 전자의 방법은 대단히 어려운 실정이다. 따라서 이 논문에서도 후자의 방법을 택하였음을 밝힌다.

순서구조의 발전 역시 20세기 전, 후로 나누어진다. 집합론이 정립되므로 추상화가 가능해진 20세기의 순서구조와 그 이전의 순서구조 - 주로 수체계의 순서구조 - 는 명백히 큰 차이가 있음을 확인할 수 있다. 형식논리와 관계되는 순서구조도 수체계의 순서구조로 이해되고 있다. 이는 Dedekind completion - 이 경우도 유리수의 Dedekind completion = **R** -이 completion보다 먼저 구성된 것으로 확인할 수 있다.

20세기 위상수학의 발전으로 순서구조와 위상구조가 서로의 연구에 필수적인 도구임이 밝혀지므로, 두 분야가 함께 발전되고, 또 서로 다른 구조를 비교하게 되므로 category theory (= functor theory)의 출발과 그 발전에도 크게 영향을 주었다.

참고문헌

1. J. Adámek, H. Herrlich, G.E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories,* Wiley, New York, 1990.
2. P. Alexandroff, Sur les espaces discrets, *Comptes Rendus Acad. Sci.* Paris 200(1935), 1649-1651.
3. P. Alexandroff, Discrete Räume, *Mat. Sbornik*, 2(1937), 501-519.
4. P. Alexandroff and H. Hopf, *Topologie I*, Springer Verlag, Berlin, 1935.
5. R. Balbes and P. Dwinger, *Distributive Lattices*, Univ. of Missouri Press, Columbia, 1974.
6. B. Banaschewski and G. Bruns, Categorical characterization of the MacNeille completion, *Arch. Math.*, 18(1967), 369-377.
7. B. Banaschewski and G. Bruns, Injective hulls in the category of distributive lattices, *J. Reine Angew. Math.*, 232(1968), 102-109.
8. J. Bénabou, *Treillis locaux et paratopologies*, Sém. Ehresmann, 1re année (1957-1958), exposé 2.
9. G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*, MacMillan, Cambridge, 1847.

10. G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought*, Walton and Maberley, London, 1854.
11. L.E.J. Brouwer, Intuitionism and formalism, Bull. *Amer. Math. Soc.*, 20(1913), 81-96.
12. L.E.J. Brouwer, Zur Begründung des intuitionistischen Mathematik, *Math. Ann.*, 93(1925), 244-257; 95(1926), 453-473; 96(1926), 451-458.
13. J.R. Büchi, Representation of complete lattices by sets, *Portugal Math*. 11(1952), 151-167.
14. G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I, *Math. Ann.*, 46(1895), 481-512.
15. R.E. Chandler, *Hausdorff Compactifications*, Marcel Dekker, New York, 1976.
16. R. Dedekind, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1872.
17. R. Dedekind, Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler, *Ver. Deutscher Natur. und Arzte*, 1897, 1-40.
18. R. Dedekind, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, *Math. Ann.*, 53(1900), 371-403.
19. C. Ehresmann, Gattungen von lokalen Strukturen, *Jber. Deutsch. Math.-Verein*, 60(1957), 59-77.
20. M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fontionnel, *Cir. Math. Palermo, Rend.* 22(1906), 1-72.
21. G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M. Mislove and D.S. Scott, *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
22. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig, 1914.
23. H. Herrlich and G.E. Strecker, A Categorical Topology, *Handbook of the History of General Topology*, Vol. 1, 255-341, Kluwer Academic Pub., 1997.
24. A. Heyting, Die formalen Reglen der intuitionistischen Logik, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Klasse*, Jahrgang, 1930, 42-71.
25. E.V. Huntington, Sets of independent postulates for the algebra of logic, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 5(1904), 288-309.
26. P.T. Johnstone, Tychonoff's theorem without the axiom of choice, *Fund. Math.*, 113(1981), 21-35.
27. P.T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
28. G.W. Leibniz, *Opuscules et fragments inédits*, edited by L. Courant, Alcan, Paris, 1903.
29. H.M. MacNeille, Partially ordered sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* 42(1937), 416-460.

30. C.S. Peirce, On the algebra of logic, *Amer. J. Math.*, 3(1880), 15-57.
31. J.R. Porter and R.G. Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces,* Springer-Verlag, New York, 1988.
32. E.L. Post, Introduction to a general theory of elementary propositions, *Amer. J. Math.*,3(1921), 163-185.
33. E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der logik, Vol. 1* Teubner-Verlag, Leipzig, 1890.
34. M.H. Stone, Subsumption of the theory of Boolean algebras under the theory of rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 20(1935), 103-105.
35. M.H. Stone, The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40(1936), 37-111.
36. M.H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math.* Soc., 41(1937), 375-481.
37. M. H. Stone, The representation of Boolean algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 44(1938), 807-816.
38. S. Vickers, *Topology via Logic,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
39. H. Wallman, Lattices and topological spaces, *Ann. Math.,* 39(1938), 112-126.
40. A.N. Whitehead, *A Treatise on Universal Algebra, with Applications, Vol. 1,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1898.
41. 홍성사, 홍영희, 선택공리와 19세기 수학, *Historia Math.*, 9 No.1(1996), 1-11.
42. 홍성사, 홍영희, Zermelo 이후의 선택공리, *Historia Math.* 9 No.2(1966), 1-9.