유전해법을 이용한 비선형최적화 문제의 효율적인 해법

- An Efficient Method for Nonlinear Optimization Problems using Genetic Algorithms -

임승환*
Lim, Shung-Hwan
이동춘**
Lee, Dong-Chwun

Abstract

This paper describes the application of Genetic Algorithms(GAs) to nonlinear constrained mixed optimization problems.

Genetic Algorithms are combinatorial in nature, and therefore are computationally suitable for treating discrete and integer design variables.

But, several problems that conventional GAs are ill defined are application of penalty function that can be adapted to transform a constrained optimization problem into an unconstrained one and premature convergence of solution.

Thus, we developed an improved GAs to solve this problems, and two examples are given to demonstrate the effectiveness of the methodology developed in this paper.

1. 서론

최적화 기법은 최적해를 구하기 위한 하나의 방법으로 많이 사용되고 있다. 즉 여러가지 제약조건들을 모두 만족해야 하는 설계변수들의 집합중에서 최적해를 구하는 방법의 경우에 대해서는 기존의 많은 연구들을 통해서 정형화된 기법들이 개발되어 왔다. 그러나 이러한 최적해 기법중에서 설계변수들이 정수(Integer), 실수(Real number) 또는 이산치(Discrete value)를 함께 가지며 제약조건과 목적함수에 서로 혼합되어 최적해를 구하는 조합 최적화 문제(Combinational optimal problem), 여러개의 국소최적점(Local optimum)이 존재하는 경우에 전범위의 최적점(Global optimum)을 효과적으로 구하는 문제, 그리고 다목적함수(Multi-objective function)의 설계시 최적해 집합의 효율적인 구현문제들에서는 아직까지 효과적으로 적용할 수 있는 해법은 개발되지 않고 있는 실정이다.

이러한 문제점을 비교적 쉽게 해결하여 줄 수 있는 인공지능(Artificial intelligence)의 한 기법인 유전알고리즘(Genetic algorithm)이 최근에 활발히 연구되고 있다.[4]

유전알고리즘은 생태계의 진화원리에 바탕을 둔 최적해에 대한 탐색 알고리즘의 하나로 다양한 종류의 문제들에 대해 효과적으로 적용가능하며 비교적 전범위의 최적점에 가까운 해를

* 경북 외국어 전문대학 국제통상과 교수
** 동아대학교 산업공학과 교수

구할 수 있다는 장점이 있다. 하지만 기존의 유전알고리즘은 설계시 고려되고 있는 여러가지 변수들, 즉 설계변수의 출발점, 탐색의 폭, 실행 종료조건, 외부위반함수법(Exterior penalty function method)의 도입에 대한 기법이 아직까지 정형화되지 않은 상태이며, 해의 탐색도중에 최적해에 도달하지 못하고 국소최적해(Local optimal solution)에 미성숙 수렴(Premature convergence)되어 전범위 최적해(Global Optimal solution)를 구하지 못하는 경우도 있다. 따라서 본 연구에서는 이러한 기존의 유전알고리즘 구축시 문제가 되고 있는 외부위반함수법의 도입문제와 미성숙 수렴현상을 개선한 유전알고리즘(Improved genetic algorithm ; IGA)을 제시하였으며, 이를 2가지의 비선형 최적화문제에 적용하여 본 연구에서 개발한 IGA의 유효성을 입증하고자 한다.

본 연구에서 개발된 IGA는 IBM 호환기종인 Pentium-100, RAM : 32M 에서 Visual Basic을 이용하여 프로그래밍(Programming)되었다.

2. 유전 알고리즘

유전 알고기즘은 생태계의 자연선택(Natural selection)과 적자생존(Survival of the fitness)의 원리를 이용한 최적화 기법의 한 방법으로 새로운 집단(New population)을 형성할 때에 이전 집단(Old population)에서 높은 목적함수값을 가지는 개체(String)가 하나 또는 그 이상의 후손(Offspring)을 만드는데에 더 높은 확률을 가지고 개체변이를 한다는 것이 기본적인 원리이다.[8]

이러한 유전알고리즘는 Holland[16]와 그의 연구진들이 유전알고리즘에 대한 연구를 종합, 체계화 시켰으며, 공학분야에서는 Goldberg[13]에 의해 가스 송수관문제에 대한 최적 설계가 최초로 시도된 이래 많은 발전이 되어 오고 있다.

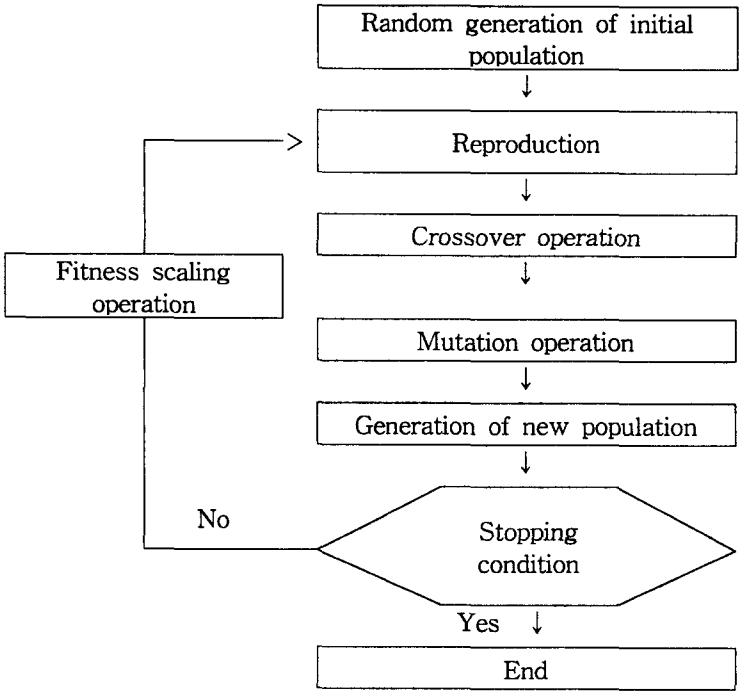
유전알고리즘는 2차원 이상의 복잡한 탐색공간에서 전범위의 최적해를 효율적으로 탐색하는 기법이기 때문에 많은 분야에서 아주 효과적이고 유연하다고 증명되어져 왔다.[9]

유전 알고리즘에 대한 기존의 연구를 살펴보면 Venkatachalan[20]은 유전 알고리즘의 기본적인 연산자인 복제 (Reproduction), 교차변이(Crossover), 돌연변이(Mutation)중에서 교차변이의 구조에 대해 연구 · 분석하였으며, Wu와 Chow[21]는 GA에서 사용되는 4가지 Parameter인 집단의 크기, 교차변이, 교차변이 확률, 돌연변이 확률 등을 개체 자체로 처리한 Meta-GA를 개발하여 최적의 Parameter 조합을 찾으려는 시도를 하였다.

Lin[18]은 이산치와 정수가 혼합된 최적설계문제(Mixed discrete-integer optimal design problem)에 적합한 유전알고리즘을 개발하였다. Grefenstette[14]는 유전알고리즘에 의한 최적설계시에 사용되는 설계상수의 여러가지 조합에 대해 몇몇 수학적 함수를 대상으로 최적화를 행하여 그 활용도에 관한 연구를 하였고, Gupta[15]는 GT(Group technology)에서의 셀제조(Cellular manufacturing) 설계문제에 대해 적용하였으며, Hon과 Chi[17]는 GT에서의 부품군(Part family) 형성문제에 대해서 연구하였고, Fang등[11]은 Job Shop Scheduling의 최적화문제에 대하여 유전알고리즘의 적용사례를 발표하였다.

이와같이 전통적인 최적화 기법들과 큰 차이를 보이고 있는 유전 알고리즘의 특성들로 인해 지금까지의 대규모 해결 불가능(NP-complete) 문제에 대한 최적해의 탐색방법으로서 가치가 있고, 생물학, 컴퓨터 공학, 이미지처리(Imege processing) 및 패턴인식(Pattern recognization), 기계학습(Machine learning), 엔지니어링(Engineering), Operation Research, 사회과학등의 광범위한 분야에 성공적으로 적용되고 있다.

<그림 1>은 일반적인 유전알고리즘의 흐름도를 나타내고 있다.



<그림 1> 일반적인 유전 알고리즘의 흐름도

3. 기존 유전 알고리즘의 문제점 및 수정된 유전알고리즘의 설계

본 연구는 다음의 2가지 측면에서 기존의 유전알고리즘을 개선하고 있다.

첫째, 기존의 유전알고리즘은 기본적으로 제약조건이 없는 최적화 문제에 적용되며 제약조건이 있는 최적화 문제를 해결하기 위해서는 제약조건을 비제약조건으로 만든 다음 유전알고리즘를 적용하여 해결하고 있다. 즉 기존의 유전알고리즘에서는 제약을 비제약으로 만들기 위해서 Goldberg[13]는 아래의 식(1), (2)과 같은 외부위반함수인 위반상관계수(Penalty coefficient) r을 사용하고 있으며, Lin[18]은 아래의 식(3), (4), (5), (6), (7)에서와 같이 위반한계함수(Bounded penalty function) r을 사용하였다.

$$F = f - r\sum_{j=1}^{p}\Gamma \tag{1}$$

$$\Gamma = (Max(g_j, 0))^2 \tag{2}$$

$$F = f + \overline{P} \tag{3}$$

$$\overline{P} = G \qquad \text{if } G \le \overline{L} \tag{4}$$

$$= \overline{L} + \alpha(G - \overline{L}) \qquad \text{if } G > \overline{L} \tag{5}$$

$$G = r\sum_{j=1}^{p}(g_j)^2 \tag{6}$$

$$\overline{L} = pF_{av} \tag{7}$$

<기호정의>
F : 적합도 함수
f : 목적함수
r : 위반상관계수(Penalty coefficient)
g_j : 부등제약함수
p : g_j의 개수
$\overline{P}$: 위반항(Penalty term)
F_{av} : 적합도함수의 평균
$\overline{L}$: 위반(Penalty)의 한계치(Limit value)
α : 선형으로 변환하는 기울기

그러나, 이러한 방법에서는 다음과 같은 문제점이 있다.
(1) 제약 조건에 위배된 값은 위반상관계수 혹은 위반한계함수 r에 의해서 제약조건에 접근하게 되는데 실제적인 문제에서 r은 명목적인 충분한 정도의 값으로 각 제약조건과 목적함수의 형태에 따라 대단히 큰 값을 선택적으로 정하고 있다.(예를들면 한용호 등[5]의 논문에서는 r의 값을 1000으로 주고 있다). [4] [7]
(2) α를 정하는 것에 어떤 특정한 규칙이 없으며 문제의 유형에 따라 다르게 주고 있다.

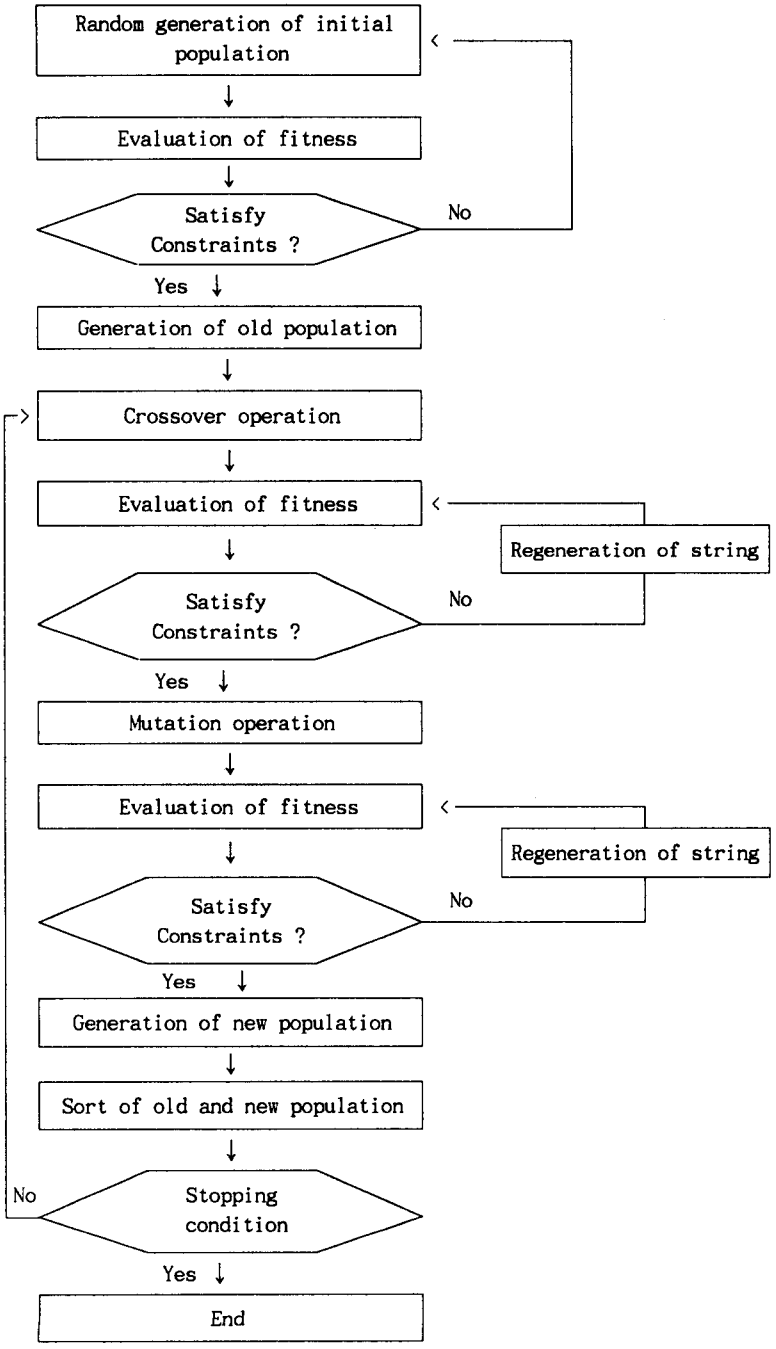
따라서 본 연구에서는 제약조건을 비제약조건으로 만들기 위해 실제 프로그래밍과정에서 제약조건을 모두 if 조건문으로 처리하여 비록 제약조건이 있는 최적화 문제이더라도 상관없이 최적해를 찾도록 하였다. 즉 일정한 규칙이 없는 위반상관계수 혹은 위반한계함수 r과 선형변환기울기 α를 제외시켰다.

둘째, 기존의 유전알고리즘에서는 해의 탐색중에 몇번의 적합도가 높은 경우에 구하고자 하는 개체가 전체 집단에서 아주 큰 비율을 차지하게 되며 이것이 미성숙수렴을 하게 되어 궁극적으로 구하고자 하는 최적해를 찾을 수 없는 경우가 생기며, 만일 최적해를 찾는다 하여도 그 최적해를 도출하는데 장기간에 걸쳐 수많은 세대가 흘러야 한다는 단점이 있다. 따라서 구하고자 하는 최적해의 개체가 되기 위해서는 특별히 개체에 대한 조정이 필요하며 본 연구에서는 이를 위해 적합도 변환(Fitness scaling)을 하였다. 즉 각각의 유전 연산을 거칠 때마다 개체를 평가하여, 제약조건을 만족하지 못한다면 개체를 무작위로 다시 발생시켜 재평가하는 단계를 반복하였고, 제약조건을 만족한다면 적합도 변환을 하지 않고 다음 단계로 진행하도록 하였다.

위와 같이 제약조건을 만족하지 못할 경우에 행하는 적합도 변환은 탐색공간에 대해 광범위한 탐색이 가능하며 따라서 해의 탐색에서 개체의 조기수렴현상을 방지하고, 다양성을 높여 수많은 세대를 거치지 않고서도 빠르게 최적해에 도달하도록 하였다.

셋째, 기존의 유전알고리즘은 확률적인 선택을 하기 때문에 자손(Offspring)을 생성하는데 있어 이전집단(Old population)에 높은 적합도를 지닌 개체가 존재하더라도 다음세대에서 랜덤하게 개체가 평가되어 새로운 개체가 선택됨으로 이전집단에서 구한 우수해가 다음 자손세대에 선택되지 않을 수도 있다. 이러한 단점을 해결하기 위해 기존의 유전알고리즘에서는 적합도 변환을 하는데 본 연구에서는 다음에 제시된 세가지 방법을 혼합·병행하여 사용하였다.
1) 이전집단에서 최고의 적합도를 갖는 하나의 개체를 의무적으로 다음 세대의 자손집단에서 선택되도록 하는 방법
2) 각 연산을 거칠 때마다 적합도를 재평가하여 제약조건을 만족할 때까지 반복하는 방법
3) 이전집단과 다음 세대의 자손집단에서 선택된 세대 전부를 정렬(Sorting)하고 높은 적합도를 가지는 순으로 세대를 선택하여 다음의 자손세대를 만드는 방법

<그림 2>는 본 연구에서 제시한 IGA의 구체적 절차를 흐름도를 통해 보여주고 있다.



<그림 2> 개선된 유전 알고리즘(IGA)의 흐름도

4. 사례연구

본 연구에서 제시하고자 하는 모델은 총 2개로서 첫번째 모델(Model 1)은Gen[6]등이 제시한 Sin함수를 적용한 모델로서 비교적 간단한 비선형문제이다. 두번째 제시한 모델(Model 2)는 압력용기(Pressure vessel)모델로서 최적설계를 위하여 설계변수들이 연속, 이산값으로 혼합된 조합최적화문제이다.

이와 같이 제약조건이 있는 비선형최적화 모델들을 이용해 기존에 개발된 최적화 기법, 유전알고리즘과 본 연구에서 개발한 IGA를 적용하여 그 결과를 비교 · 분석하였다.

(1) Model 1 : Sin 함수

$$\textit{Maximize} \quad f(x) = 21.5 + x_1 \sin(4\pi x_1) + x_2 \sin(20\pi x_2)$$

$$\textit{Subject to} \quad -3 \le x_1 \le 12.1$$

$$4.1 \le x_2 \le 5.8$$

위의 문제를 기존의 유전 알고리즘 연구와 IGA로 실행한 결과의 비교를 <표 1>에 나타내었다.

<표 1> Model 1의 실행결과비교

	Davis	Gen et. al.	김창은	This paper	Type of Variables
Algorithm	GA	GA	GA	IGA	
x_1	9.623693	11.6141	11.631407	11.632000	Contonuous
x_2	4.427881	5.7300	5.724824	5.728000	"
$f(x)$	35.477938	38.4539	38.818208	38.858776	
Population size	20	3	10	50	
Crossover rate	0.25	0.25	0.25	0.4	
Mutation rate	0.01	0.01	0.01	0.15	
Generation No.	1000	667	419	37	

<표 1>을 살펴보면 Davis[8], Gen등[6]과 김창은등[2]의 연구결과는 기존의 유전 알고리즘을 이용하여 해를 구하고 있지만 두 연구 모두 더 이상 해를 개선시키지 못하고 국소 최적점에 빠졌다. 그러나 IGA는 이러한 현상을 개선하였기 때문에 더 우수한 해를 도출하고 있음을 볼 수 있으며 집단의 크기(Population size)는 기존의 연구들보다 증가하였지만 세대수(Generation No.)에서는 Davis보다는 27배, Gen등의 연구보다 18배, 김창은 등의 연구보다는 11배정도로 더 빠르게 수렴하였다.

(2) Model 2 : *Design of a Pressure Vessel*

압력용기(Pressure Vessel) 구조는 Sandgren[19]이 제시했으며 설계변수는 용기의 사양에 필요한 치수이다. 편의상 설계변수를 다음과 같이 나타낸다.

$$Find \quad X = [T_s, T_h, R, L]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

이 모델에서는 모두 4개의 설계변수가 사용되며 설계변수 x_1, x_2는 0.0625 정수배수를 가지는 이산변수(Discrete variables)이고, x_3, x_4는 연속변수(Continuous variables)이다. 목표함수는 Pressure Vessel의 설계시 발생하는 총제조비용을 최소화하는 것이다.
이의 수리적 모델은 다음과 같다.

$$Minimize \quad F(x) = 0.6224\,x_1x_3x_4 + 1.7781\,x_2x_3^2 + 3.1661x_1^2x_4 + 19.84\,x_1^2x_3$$

Subject to

$$G_1(X) = x_1 - 0.0193x_3 \geq 0$$
$$G_2(X) = x_2 - 0.00954x_3 \geq 0$$
$$G_3(X) = \pi x_3^2x_4 + \frac{4}{3}\pi x_3^3 - 750 \times 1728 \geq 0$$
$$G_4(X) = -x_4 + 240 \geq 0$$
$$G_5(X) = x_1 - 1.1 \geq 0$$
$$G_6(X) = x_2 - 0.6 \geq 0$$

이상과 같은 이산·연속변수가 서로 혼합된 조합최적화 문제에 IGA를 적용하여 기존의 연구들과 비교·분석한 결과는 <표 2>와 같다.

<표 2> Model 2의 실행결과·비교

	Fu et al.	Sandgren	This paper	Type of Variables
Algorithm	IDCNLP	Branch and Bound	IGA	
x_1	1.125	1.125	1.125	discrete
x_2	0.625	0.625	0.625	discrete
x_3	48.3807	48.97	58.2901	continuous
x_4	111.7449	106.72	43.6930	continuous
F(X)	8048.619	7982.5	7197.73	

<표 2>의 Fu et al.[12]의 결과는 IDCNLP(Integer-discrete-continuous non-linear programming) 알고리즘을 이용하여 해결하였는데, 이 방법은 일반적인 비선형계획법의 해결절차에 근거를 두고 있으며 문제 해결과정에서 초기입력변수의 값을 선택하는데 어려움이 있다. Sandgren[19]의 결과는 분지한계법(Branch and bound)을 이용하여 해를 구하고 있지만 적용기법의 특성상 초기상태에서는 전체 마디(node)의 수를 알 수 없기 때문에 프로그램 작성시에 실제 필요한 저장공간보다 더 많은 저장공간을 미리 확보하여야 하며, 문제의 규모가 커질 경우 해법상 해결과정이 복잡하기 때문에 국소수렴이 되어 더 이상의 개선은 없었다.

반면에 본 연구의 IGA(집단의 크기 : 30, 교차변이율 : 0.4, 돌연변이율 : 0.15, 세대수 : 5000)에서는 세대수가 1721번째에서 F(x) : 7197.73으로 기존의 Fu등과 Sandgren이 구한 해보다 더 우수한 해를 구하였다.

이러한 현상은 기존의 두 연구 모두가 해의 탐색에 있어서 설계변수 x_1, x_2는 IGA와 같은 값을 가지지만 설계변수 x_3, x_4는 IGA보다 더 열등한 값을 가지고 있다. 즉 탐색에 있어 해를 다양하게 발생시키지 못하여 더 우수한 해가 있음에도 불구하고 이를 탐색하지 못하고 국부수

렴한 것으로 판단되며 이러한 결과로 인해 목적함수의 해가 IGA보다 열등한 해로 나타난 것이다. 즉 기존의 연구들은 전부 국부해로 수렴하였지만 IGA는 해의 다양성을 실현하고 미성숙 수렴현상을 방지하였기 때문에 비교적 수많은 세대를 거치지 않고서도 기존의 연구들보다 더 우수한 해를 구할 수가 있었다.

5. 결론

기존의 유전 알고리즘은 집단의 수, 반복수, 복제방법, 위반함수법, 적합도 변환방법, 교차변이법, 교차변이 확률, 돌연변이법, 돌연변이 확률 등에 대해 설계자가 경험적으로 지정해 주어 문제를 해결하고 있다. 즉 그 결정에 대해 정형화된 규칙이 없고, 문제에 따라 달리 적용하여야 한다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제점을 개선한 유전알고리즘(IGA)을 설계하였다.

즉 제약조건 자체를 if 조건문으로 처리하여 위반함수의 도입을 배제하였으며, 각 연산마다 개체를 평가하여 적합도 변환 없이 집단의 다양성을 시도하였다.

사례연구에서는 2가지의 비선형최적화 문제에 대한 기존의 최적화 기법 및 유전알고리즘과의 비교를 통해 본 연구에서 개발한 IGA의 유효성을 입증하였다.

하지만 IGA 역시 설계자가 경험적으로 정해 주는 반복수, 집단의 크기, 돌연변이율, 포복값 등의 범위를 어느 정도로 하느냐에 따라 개체의 다양성 및 그 최적해의 수렴속도 등에 영향을 주게된다. 이러한 이유로 유전 알고리즘에 관계된 모든 값들을 서로 조합적으로 연관을 시켜 실행할 수 있는 종합적인 체계를 구축하는 것이 앞으로 필요하다고 하겠다.

< 참고문헌 >

1) 김기화, "Genetic Algorithm에 의한 다목적함수 최적구조설계," 서울대학교 조선해양공학과 박사학위 논문, 1993.
2) 김창은, 주용준, "Apllication of Genetic Algorithm for Simple Parameter Optimization Problem," 추계 산업공학회 학술발표대회, pp. 27-34, 1994.
3) 류재구, "유전자 알고리즘의 개념과 프로그래밍", *Computer Magazine*, 1993.
4) 이동곤, 김수영, 이창억, "최적화의 효율향상을 위한 유전해법과 직접탐색법의 혼용에 관한 연구," 산업공학, Vol. 8, No. 1, 3, 1995.
5) 한용호, 류광렬, "기계-부품군 형성문제의 사례를 통한 유전 알고리즘의 최적화 문제에의 응용," 경영과학, Vol. 12, No. 2, 8, 1995.
6) 玄 光男, 田口雄章, 怒木望, "Mathematica による遺傳的 アルゴリズム: 非線形最適化その1 : geneOpt-1/math," ハ°ソコリテラシ, 第19卷, 第5號, pp. 34-49, 1994. 7
7) Amir, H., Hasegawa, T., "Nonlinear Mixed-Discrete Structural Optimization," *Journal of Structual Engineering*, Vol. 115, No. 3, pp. 626 - 646, 1989.
8) Davis. L., Handbook of Genetic Algorithms, New York : Van Nostrand Reinhold, 1981.
9) Davis, L. and Steenstrup, M., Genetic algorithms and simulated annealing : an overview, in L. Davis (ed.) (Morgan Kaufmann, Los Altos), 1987.
10) Dorndore U., and Pesch E., "Evolution Based Learning in a Jopshop Scheduling Environment," *Computers Ops. Res.*, Vol. 22, No. 1, pp. 25-40, 1995.

11) Fang, H. L., Ross, p. and Corne, D., "A Promising Genetic Algorithm Approach to Job-shop Scheduling, Re-Scheduling, and Open-Shop Scheduling Problems," *Proceeding of ICGA Conference*, pp. 375-382, 1993.
12) Fu J. F., Fenton, R. G., and Cleghorn, W. L., "A Mixed Integer - discrete - Continuous Programming Method and its Application to Engineering Design Optimization," *Engineering Optimization*, Vol. 17, pp. 263-280, 1991.
13) Goldberg, D. E., Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1989.
14) Grefenstette, J. J., "Optimization of control parameter for genetic algorithm," *IEEE Transactions of systems, man and cybernetics*, Vol. 16, No. 1, pp. 1231-1239, 1986.
15) Gupta, Y. P., Gupta, M. C., Kumar, A. K. and Sundram, C., "Minimizing total intercell and intracell moves in cellular manufacturing: a genetic alforithm approach," *INT. J. of Computer Integrated Manufacturing*, Vol. 8, No. 2, pp. 92-101, 1995.
16) Holland, J. H., Adaptation in Natural and Artificial Systems. Ann Arbor, Michigan, The University of Michigan Press, 1975.
17) Hon, K. K. B. and Chi, H., "A New Approach of Group Technology Part Families Optimization," *Annals of the CIRP*, Vol. 43, No. 1, pp. 234-242, 1994.
18) Lin, C. Y. and Hajela P., "Genetic Algorithms in Optimezation Problems with Discrete and Integer Design Variables", *Eng. Opt.*, Vol. 19, pp. 309-327, 1992.
19) Sandgran, E., "Nonlinear integer and discrete programming inmechanical design optimization," *ASME J. Mech. Des.*, Vol. 112, No. 2, pp. 223-229, 1990.
20) Venkatachalam A. R., "An Analysis of an Embedded Crossover Scheme on a GA-Hard Problem," *Computers Ops. Res.*, Vol. 22, No. 1, pp. 149-157, 1995.
21) Wu, S. J. and Chow, P. T., "Genetic Algorithms for Nonlinear Mixed Discrete-Integer Optimization Problems via Meta-Genetic Paremater Optimization," *Eng. Opt.*, Vol. 24, pp. 137-159, 1995.