

나카가미 페이딩 채널에서 선택성 다이버시티를 사용한 MPSK 신호의 평균 심벌 오류 확률

正會員 최 세 영*, 윤 동 원**, 한 영 열*

The Average SER of MPSK Signals with Selection Diversity in Nakagami Fading Channels

Se Yeong Choi*, Dong Weon Yoon**, Young Yearl Han* *Regular Members*

요 약

본 논문에서는 주파수 비선택적 느린 나카가미 m -분포의 페이딩을 겪는 MPSK 신호의 L -차 선택성 다이버시티에 대한 심벌 오류 확률을 정확한 수식으로 유도한다. 나카가미 페이딩 지수 m 이 정수일 경우 선택성 다이버시티 합성 기법을 적용시킨 MPSK 신호의 심벌 오류 확률을 유한급수의 형태로 나타낸다. 유도 과정에서 수신 신호의 확률 밀도 함수에 대한 새로운 전개가 소개되고 있으며 다양한 수학적 기법을 응용한다. 유도된 수식으로부터 변조 지수 m 이 1인 경우 레일리 페이딩 채널에서의 오류 확률이 됨을 확인한다. 다이버시티의 가짓수 L 과 페이딩 변조 지수 m 을 변화시켜가면서 성능을 분석하여 다이버시티 차수가 증가함에 따라 오류 확률이 감소함을 보인다.

ABSTRACT

An exact expression for the average symbol error rate(SER) of L -order selection diversity for MPSK signals in a frequency-nonselective slowly m -distributed Nakagami fading and additive white Gaussian noise(AWGN) is derived. For the integer values of fading index m , a closed-form expression of the average SER for MPSK signals in terms of finite sums is obtained. To derive the SER of MPSK signals with selection combining, the new expression of pdf is introduced and many other mathematical methods are used. When fading index m is 1, the derived expression lead to those of MPSK with selection combining in Rayleigh fading channels. The results show that the error probability decreases as the order of diversity increases.

*한양대학교 전자통신공학과

**대전대학교 정보통신공학과

論文番號:97268-0801

接受日字:1997年 8月 1日

I. 서 론

육상 이동 통신에서는 여러 지형 지물에 의해 전파가 산란(scattering)되거나 반사(reflection)되어 수신되는데, 이 경우 수신 신호의 크기와 위상이 원래 송신 신호와는 다르게 되어 시스템의 성능을 크게 저하시키게 된다. 이러한 신호의 왜곡 현상을 페이딩이라고 하는데, 이 페이딩에 의한 성능의 열화를 극복하려는 여러 가지 방법들이 제시되고 있다. 그 중에서 다이버시티(diversity) 기법은 가장 널리 알려진 방법중의 하나로 채널 페이딩에 의한 성능 저하를 보상해 주는데 효과적인 기술로 알려져 있다[1]. 다이버시티는 다중 경로로 전송된 신호의 통계적 특성을 이용한 수신 기법으로 그 원리는 여러 채널로 수신된 신호가 서로 독립적일 때 모든 채널의 신호 전력이 동시에 작게 떨어질 확률은 적다는 점을 이용한 것이다.

가장 널리 알려진 다이버시티 기법으로는 최대비 합성(Maximal ratio combining), 동일 이득 합성(Equal gain combining) 그리고 선택성 합성(Selection combining) 기법 등이 있다. 이 중 선택성 합성 기법의 주된 장점으로 시스템 구현의 간단함과 저렴함에 있다. 그 이유로는 서로 다른 L 개의 채널로부터 수신되는 신호 중 가장 큰 전력의 신호 하나만을 선택하는 선택성 합성에서는 사용된 안테나의 수에 상관없이 오직 한 개의 수신기만을 사용하기 때문이다.

나카가미 m-분포(Nakagami m-distribution)는 레일리(Rayleigh), 대수정규(Log-normal)나 라이시안(Rician) 분포에 비해 수학적 처리와 측정 데이터의 분석에 있어 훨씬 용이하며 보다 다양한 페이딩 환경을 제공해주는 도심 전파의 다중 경로 채널에 대한 페이딩 모델로 가장 포괄적인 분포로 알려져 있다[2]. 페이딩이 나카가미 분포를 따를 때 수신된 신호의 순간 신호대 잡음비(signal-to-noise ratio) γ 에 대한 확률 밀도 함수(probability density function)는 다음과 같다[2].

$$f(\gamma) = \frac{\gamma^{m-1}}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\gamma_0}\right)^m \exp\left(-\frac{m}{\gamma_0} \gamma\right), \quad \gamma \geq 0 \quad (1)$$

식 (1)에서 $\gamma_0 = E[\gamma]$ 는 평균 신호대 잡음비를 나타내며 $\Gamma(\cdot)$ 는 감마 함수이고[3] m은 페이딩의 심한 정도를 나타내는 페이딩 지수(fading index)이다. 나카가미 m-분포의 페이딩 채널에서 $m=0.5$ 이면 이 전송

채널은 단측 가우시안(half-Gaussian), $m=1$ 이면 레일리 페이딩 채널이 되며 m이 무한대가 되면 페이딩이 없는 상태가 된다. 그리고, m이 1보다 작다면 이 전송 채널은 레일리 페이딩보다 심각한 페이딩 채널을 나타내며 m이 1보다 커짐에 따라 페이딩 현상이 줄어들고 있는 전송 채널을 뜻한다.

레일리 페이딩 채널에서의 MPSK 신호의 다이버시티 성능에 대한 분석[4]과 나카가미 페이딩 채널에서의 MPSK 신호의 최대비 합성(MRC) 기법에 대한 성능 분석[5]은 이미 발표된 바 있으나 선택성 다이버시티 기법에 대한 MPSK 신호의 심벌 오류 확률은 아직 유도되지 않았다. 따라서 본 논문에서는 주파수 비선택적이고 느린 나카가미 페이딩 채널 하에서 MPSK 신호의 선택성 다이버시티의 심벌 오류 확률을 정확한 식으로 유도한다.

II. 해석 모델

동일한 정보를 가지고 있는 L 개의 다이버시티 채널을 가정한다. 각 다이버시티 채널의 신호는 주파수 비선택적이고 느린 나카가미 페이딩을 겪는 상호 독립(mutually independent)적인 통계적 특성을 갖는다. 이때 L 개의 다이버시티 경로 중 신호대 잡음비가 가장 큰 신호를 선택하는 선택성 다이버시티를 이용해 수신된 신호의 확률 밀도 함수는 다음과 같다[6].

$$f(\gamma) = \frac{L}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\gamma_0}\right)^m \gamma^{m-1} \exp\left(-\frac{m}{\gamma_0} \gamma\right) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{m}{\gamma_0} \gamma\right) \sum_{i=0}^{L-1} \left(\frac{m}{\gamma_0} \gamma\right)^i \frac{1}{i!}\right]^{L-1}, \quad \gamma \geq 0 \quad (2)$$

식(2)를 γ 에 대해 적분이 가능하도록 변형하여야만 나중에 나카가미 페이딩 채널에서 평균 오류 확률을 유도할 수 있다. 따라서 여기서는 식(2)를 적분이 가능하도록 새로운 형태로 표시한다. 식(2)를 변형하기 위해 이항 정리를 이용하여 정리하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left[1 - \exp\left(-\frac{m}{\gamma_0} \gamma\right) \sum_{i=0}^{L-1} \left(\frac{m}{\gamma_0} \gamma\right)^i \frac{1}{i!}\right]^{L-1} \\ &= \sum_{n_0=0}^{L-1} (-1)^{n_0} \binom{L-1}{n_0} \left[\sum_{i=0}^{L-1} \left(\frac{m}{\gamma_0} \gamma\right)^i \frac{1}{i!}\right]^{n_0} \exp\left(-\frac{m}{\gamma_0} n_0 \gamma\right) \end{aligned} \quad (3)$$

다시 식(3)을 변형하기 위해 식(4)와 같은 관계식을 이용한다.

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=0}^{n_0} \left(\frac{m}{\gamma_0} \gamma \right)^i \frac{1}{i!} \right]^{n_0} \\ &= \sum_{n_1=0}^{n_0} \sum_{n_2=0}^{n_1} \cdots \sum_{n_{m-1}=0}^{n_{m-2}} \binom{n_0}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \cdots \binom{n_{m-2}}{n_{m-1}} \cdot \\ & \quad \left(\frac{1}{1!} \right)^{n_1-n_2} \left(\frac{1}{2!} \right)^{n_2-n_3} \cdots \left(\frac{1}{(m-2)!} \right)^{n_{m-2}-n_{m-1}} \\ & \quad \left(\frac{1}{(m-1)!} \right)^{n_{m-1}} \cdot \left(\frac{m}{\gamma_0} \gamma \right)^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}} \\ &= \sum_{n_1=0}^{n_0} \sum_{n_2=0}^{n_1} \cdots \sum_{n_{m-1}=0}^{n_{m-2}} \left[\prod_{j=1}^{m-1} \binom{n_{j-1}}{n_j} \left(\frac{1}{j!} \right)^{n_j-n_{j+1}} \right] \\ & \quad \cdot \left(\frac{m}{\gamma_0} \right)^{n_1} \gamma^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}} \end{aligned} \quad (4)$$

최종적으로 식(2)는 식(3)과 식(4)를 이용하여 다음과 같은 새로운 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= \frac{L}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\gamma_0} \right)^m \sum_{n_0=0}^{L-1} (-1)^{n_0} \binom{L-1}{n_0} \sum_{n_1=0}^{n_0} \sum_{n_2=0}^{n_1} \cdots \\ & \quad \sum_{n_{m-1}=0}^{n_{m-2}} \left[\prod_{j=1}^{m-1} \binom{n_{j-1}}{n_j} \left(\frac{1}{j!} \right)^{n_j-n_{j+1}} \left(\frac{m}{\gamma_0} \right)^{n_j} \right] \\ & \quad \cdot \exp \left[-\frac{m}{\gamma_0} (1+n_0) \gamma \right] \gamma^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}} \quad , \gamma \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{m-1}$ 이고 $n_m = 0$ 이다.

Ⅲ. 평균 심벌 오류 확률과 성능 분석

위상의 확률 밀도 함수가 AWGN에만 영향을 받는다면 위상 오류 θ 의 조건부 확률 밀도 함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다[7][8].

$$\begin{aligned} f(\theta | \gamma) &= \frac{1}{2\pi} \left[\exp(-k\gamma) + \sqrt{4\pi k\gamma} \cos \theta \exp(-k\gamma \sin^2 \theta) \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{\pi k\gamma} \cos \theta \exp(-k\gamma \sin^2 \theta) \operatorname{erfc}(\sqrt{k\gamma} \cos \theta) \right] \\ & \quad - \pi \leq \theta \leq \pi \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\operatorname{erfc}(\cdot)$ 는 여오차 함수(complementary error function)[3] 이고 $k = \log_2 M$ 은 심벌 당 비트수, γ 는

비트 당 신호대 잡음비를 나타낸다.

페이딩 채널에서 균일한 심벌 발생 분포의 확률을 갖는 MPSK 신호의 선택성 다이버시티를 적용한 평균 심벌 오류 확률은 다음으로부터 구할 수 있다[7].

$$P_s(M) = 1 - \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \int_0^\infty f(\theta | \gamma) f(\gamma) d\gamma d\theta \quad (7)$$

식(5)를 식(7)에 대입하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_s(M) &= 1 - \frac{L}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\gamma_0} \right)^m \sum_{n_0=0}^{L-1} (-1)^{n_0} \binom{L-1}{n_0} \\ & \quad \cdot \sum_{n_1=0}^{n_0} \sum_{n_2=0}^{n_1} \cdots \sum_{n_{m-1}=0}^{n_{m-2}} \left[\prod_{j=1}^{m-1} \binom{n_{j-1}}{n_j} \left(\frac{1}{j!} \right)^{n_j-n_{j+1}} \left(\frac{m}{\gamma_0} \right)^{n_j} \right] \\ & \quad \cdot \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \int_0^\infty f(\theta | \gamma) \exp \left[-\frac{m}{\gamma_0} (1+n_0) \gamma \right] \gamma^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}} d\gamma d\theta \end{aligned} \quad (8)$$

그러므로 우리는 여기서 식(8) 중 이중 적분항만 계산하면 된다.

식(8)의 이중 적분식에 식(6)을 대입하면

$$\int_{-\pi/M}^{\pi/M} \int_0^\infty f(\theta | \gamma) \exp \left[-\frac{m}{\gamma_0} (1+n_0) \gamma \right] \gamma^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}} d\gamma d\theta = A + B - C \quad (9)$$

가 되며 여기서

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \int_0^\infty \exp \left[-\left(\frac{m}{\gamma_0} (1+n_0) + k \right) \gamma \right] \gamma^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}} d\gamma d\theta \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \int_0^\infty \sqrt{4\pi k\gamma} \cos \theta \exp(-k\gamma \sin^2 \theta) \\ & \quad \cdot \exp \left[-\frac{m}{\gamma_0} (1+n_0) \gamma \right] \gamma^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}} d\gamma d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sqrt{\frac{k\gamma}{\pi}} \cos \theta \exp(-k\gamma \sin^2 \theta) \right. \\ & \quad \left. \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{k\gamma} \cos \theta) d\theta \right] \exp \left[-\frac{m}{\gamma_0} (1+n_0) \gamma \right] \gamma^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}} d\gamma \end{aligned} \quad (12)$$

이다.

식(10)은 적분식[3, 3.351]을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A = \frac{\Gamma(n+m)}{M} \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0) + k\gamma_0} \right]^{n+m} \quad (13)$$

식(11)을 적분하기 위해 먼저 $x = \sqrt{k\gamma} \sin \theta$ 로 치환한 후 적분 순서를 바꿔 θ 에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \cos \theta \exp(-k\gamma \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_{\sqrt{k\gamma} \sin(-\pi/M)}^{\sqrt{k\gamma} \sin(\pi/M)} \frac{1}{\sqrt{k\gamma}} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\sqrt{k\gamma} \sin(\pi/M)} \frac{1}{\sqrt{k\gamma}} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{k\gamma}} \left[\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_{\sqrt{k\gamma} \sin(\pi/M)}^{\infty} e^{-x^2} dx \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{k\gamma}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{k\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{k\gamma}} \left[1 - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{k\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)를 식(11)에 대입한 후 다시 정리하여 풀면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sqrt{4\pi k\gamma} \sqrt{\frac{\pi}{k\gamma}} \left[1 - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{k\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \right] \gamma^{n+m-1} \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\gamma\right] d\gamma = \Gamma(n+m) \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)} \right]^{n+m} \\ &\quad - \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{k\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \gamma^{n+m-1} \exp\left[-\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\gamma\right] d\gamma \end{aligned} \quad (15)$$

위의 식에서 γ 에 대한 적분은 적분식[3, 6.286]을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{k\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \gamma^{n+m-1} \exp\left[-\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\gamma\right] d\gamma \\ &= 2 \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{k} t \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) t^{2(n+m)-1} \exp\left[-\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)t^2\right] dt \\ &= \frac{\Gamma(n+m+1/2)}{\sqrt{\pi}(n+m)(\sqrt{k} \sin(\pi/M))^{2(n+m)}} \\ &\quad \cdot {}_2F_1\left(n+m, n+m+\frac{1}{2}; n+m+1; -\frac{m(1+n_0)}{\mu^2}\right) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $\mu = \sqrt{k\gamma_0} \sin(\pi/M)$ 이고 ${}_2F_1(\cdot)$ 은 초기하 함수(hypergeometric function)이며 다음과 같은 관계가 있다[3, 9.131].

$${}_2F_1\left(n+m, n+m+\frac{1}{2}; n+m+1; -\frac{m(1+n_0)}{\mu^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\mu^2 + m(1+n_0)}{\mu^2}\right)^{-n-m-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot {}_2F_1\left(1, n+m+\frac{1}{2}; n+m+1; \frac{m(1+n_0)}{m(1+n_0)+\mu^2}\right) \quad (17)$$

다시 여기서

$${}_2F_1\left(1, p+\frac{1}{2}; p+1; x\right) = \frac{1}{\left(\frac{2p}{p}\right)\left(\frac{x}{4}\right)^p} \left[\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \sum_{s=0}^{p-1} \binom{2s}{s} \left(\frac{x}{4}\right)^s \right] \quad (18)$$

의 관계[9, 식(A11)]를 이용한 후 식(17)을 정리하여 식(16)에 대입하면 식(19)와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{k\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \gamma^{n+m-1} \exp\left[-\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\gamma\right] d\gamma \\ &= \Gamma(n+m) \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)} \right]^{n+m} \cdot \beta(m) \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{\beta(m)} - \sum_{s=0}^{n+m-1} \binom{2s}{s} \left[\frac{m(1+n_0)/4}{\mu^2 + m(1+n_0)} \right]^s \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 $\beta(m) = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + m(1+n_0)}}$ 이고 최종적으로 식

(15)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B &= \Gamma(n+m) \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)} \right]^{n+m} \\ &\quad \cdot \beta(m) \cdot \sum_{s=0}^{n+m-1} \binom{2s}{s} \left[\frac{m(1+n_0)/4}{\mu^2 + m(1+n_0)} \right]^s \end{aligned} \quad (20)$$

마지막으로 식(12)를 풀기 위해 다음과 같은 부분 적분을 적용한다.

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sqrt{\frac{k\gamma}{\pi}} \cos \theta \exp(-k\gamma \sin^2 \theta) \operatorname{erfc}(\sqrt{k\gamma} \cos \theta) d\theta \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\gamma\right] \gamma^{n+m-1} d\gamma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u \cdot v' d\gamma = \frac{1}{2} \left[u \cdot v \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u' \cdot v d\gamma \right] \end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 u &= \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sqrt{\frac{k\gamma}{\pi}} \cos \theta \exp(-k\gamma \sin^2 \theta) \operatorname{erfc}(\sqrt{k\gamma} \cos \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{\sqrt{k\gamma} \sin(-\pi/M)}^{\sqrt{k\gamma} \sin(\pi/M)} e^{-x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{k\gamma - x^2}) dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\sqrt{k\gamma} \sin(\pi/M)}^{\sqrt{k\gamma} \sin(\pi/M)} e^{-x^2} \operatorname{erfc}(\sqrt{k\gamma - x^2}) dx \right] \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$v' = \gamma^{n+m-1} \exp\left[-\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\gamma\right] \quad (23)$$

로 놓으면

$$\begin{aligned}
 u' &= -\frac{2k}{M} e^{-k\gamma} + \sqrt{\frac{k}{\pi\gamma}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \\
 &\quad \cdot \exp\left(-k\gamma \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{k\gamma} \cos\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v &= \Gamma(n+m) \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)}\right]^{n+m} \\
 &\quad \cdot \exp\left[-\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\gamma\right] \sum_{s=0}^{n+m-1} \left[\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\right]^s \frac{\gamma^s}{s!} \quad (25)
 \end{aligned}$$

가 되고 식(21)은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{2} \left[u \cdot v \Big|_0^\infty - \int_0^\infty u' \cdot v d\gamma \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty u' \cdot v d\gamma = C_1 + C_2 \quad (26)
 \end{aligned}$$

식(26)에서 C_1 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \\
 &= -\frac{k}{M} \Gamma(n+m) \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)}\right]^{n+m} \sum_{s=0}^{n+m-1} \left[\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\right]^s \\
 &\quad \cdot \frac{1}{s!} \int_0^\infty \exp\left[-\left(k + \frac{m(1+n_0)}{\gamma_0}\right)\gamma\right] \gamma^s d\gamma \\
 &= -\frac{k}{M} \Gamma(n+m) \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)}\right]^{n+m} \sum_{s=0}^{n+m-1} \left[\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\right]^s \\
 &\quad \cdot \left[\frac{\gamma_0}{k\gamma_0 + m(1+n_0)}\right]^{s+1} \\
 &= -\frac{\Gamma(n+m)}{M} \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)}\right]^{n+m} \left[\frac{k\gamma_0}{k\gamma_0 + m(1+n_0)}\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\cdot \sum_{s=0}^{n+m-1} \left[\frac{m(1+n_0)}{k\gamma_0 + m(1+n_0)}\right]^s \\
 &= -\frac{\Gamma(n+m)}{M} \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)}\right]^{n+m} \left\{ 1 - \left[\frac{m(1+n_0)}{k\gamma_0 + m(1+n_0)}\right]^{n+m} \right\} \quad (27)
 \end{aligned}$$

또한 식(26)에서 C_2 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \Gamma(n+m) \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)}\right]^{n+m} \\
 &\quad \cdot \sum_{s=0}^{n+m-1} \left[\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\right]^s \frac{1}{s!} \\
 &\quad \cdot \int_0^\infty \gamma^{s-\frac{1}{2}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{k\gamma} \cos\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \\
 &\quad \cdot \exp\left[-\left(k \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) + \frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\right)\gamma\right] d\gamma \quad (28)
 \end{aligned}$$

식(28)에서 γ 에 대한 적분을 $b = k \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) + \frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)$, $\sqrt{c} = \sqrt{k} \cos\left(\frac{\pi}{M}\right)$ 로 치환한 후 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \gamma^{s-\frac{1}{2}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{k\gamma} \cos\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \\
 &\quad \cdot \exp\left[-\left(k \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) + \frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\right)\gamma\right] d\gamma \quad (29) \\
 &= \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{c\gamma}}^\infty e^{-t^2} dt \cdot \gamma^{s-\frac{1}{2}} e^{-b\gamma} d\gamma
 \end{aligned}$$

다시 $t = \sqrt{c\gamma}$ y 로 치환하여 식(29)를 풀면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{c\gamma}}^\infty e^{-t^2} dt \cdot \gamma^{s-\frac{1}{2}} e^{-b\gamma} d\gamma \\
 &= \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty e^{-cy^2} \sqrt{c\gamma} d\gamma \cdot \gamma^{s-\frac{1}{2}} e^{-b\gamma} d\gamma \\
 &= \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_1^\infty \exp[-(b+cy^2)\gamma] \gamma^s dy d\gamma \quad (30) \\
 &= \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \int_0^\infty \exp[-(b+cy^2)\gamma] \gamma^s d\gamma dy \\
 &= \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \frac{s!}{(b+cy^2)^{s+1}} dy
 \end{aligned}$$

식(30)의 마지막 식에서 $\sqrt{b} \tan x = \sqrt{cy}$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \frac{s!}{(b+cy^2)^{s+1}} dy \\ &= \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \int_{\tan^{-1}(\sqrt{\frac{c}{b}})}^{\frac{\pi}{2}} \frac{s!}{(b \sec^2 x)^s (b \sec^2 x)} \sqrt{\frac{b}{c}} \sec^2 x dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{s!}{\sqrt{b}} \frac{1}{b^s} \int_{\tan^{-1}(\sqrt{\frac{c}{b}}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2s} x dx \end{aligned} \quad (31)$$

이 되며 식(31)을 풀기 위해 다음의 관계식[3, 2.513]을 이용한다.

$$\begin{aligned} & \int_{\tan^{-1}(\sqrt{\frac{c}{b}}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2s} x dx \\ &= \frac{1}{4^s} \left[\binom{2s}{s} x + 2 \sum_{l=0}^{s-1} \binom{2s}{l} \frac{\sin[2(s-l)x]}{2(s-l)} \right] \Big|_{\tan^{-1}(\sqrt{\frac{c}{b}}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4^s} \left[\binom{2s}{s} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \alpha(m) \right) \right. \\ & \quad \left. - 2 \sum_{l=0}^{s-1} \binom{2s}{l} \frac{\sin[2(s-l) \tan^{-1} \alpha(m)]}{2(s-l)} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

여기서 $\alpha(m) = \sqrt{\frac{k\gamma_0}{\mu^2 + m(1+n_0)}} \cos\left(\frac{\pi}{M}\right)$ 이다.

식(32)를 식(31)에 대입하여 식(29)를 풀 후 다시 식(28)에 대입하여 C_2 를 구하면 식(33)과 같다.

$$\begin{aligned} C_2 &= \beta(m) \Gamma(n+m) \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)} \right]^{n+m} \\ & \cdot \sum_{s=0}^{n+m-1} \left[\frac{m(1+n_0)/4}{\mu^2 + m(1+n_0)} \right]^s \\ & \cdot \left[\binom{2s}{s} \left(\frac{1}{2} - \frac{\tan^{-1} \alpha(m)}{\pi} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{s-1} \binom{2s}{l} \frac{\sin[2(s-l) \tan^{-1} \alpha(m)]}{(s-l)} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

식(27)과 식(33)으로부터 식(26)을 구하면 식(21)은 다음과 같다.

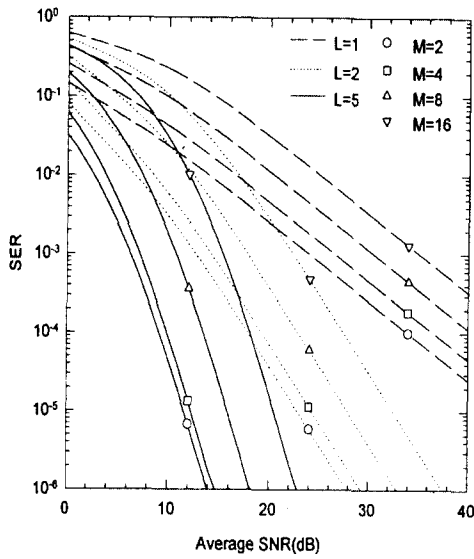
$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 \\ &= \frac{\Gamma(n+m)}{M} \left[\frac{\gamma_0}{k\gamma_0 + m(1+n_0)} \right]^{n+m} \\ & \quad - \Gamma(n+m) \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)} \right]^{n+m} \\ & \quad \cdot \left\{ \frac{1}{M} - \beta(m) \cdot \left[\sum_{s=0}^{n+m-1} \left(\frac{m(1+n_0)/4}{\mu^2 + m(1+n_0)} \right)^s \right. \right. \\ & \quad \cdot \left. \left. \left(\binom{2s}{s} \left(\frac{1}{2} - \frac{\tan^{-1} \alpha(m)}{\pi} \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{s-1} \binom{2s}{l} \frac{\sin[2(s-l) \tan^{-1} \alpha(m)]}{s-l} \right] \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

최종적으로 평균 오류 확률을 구하기 위해 식(13)과 식(20) 그리고 식(34)를 식(9)에 대입한 후 정리하면 우리가 구하고자 하는 식(8)은 다음과 같다.

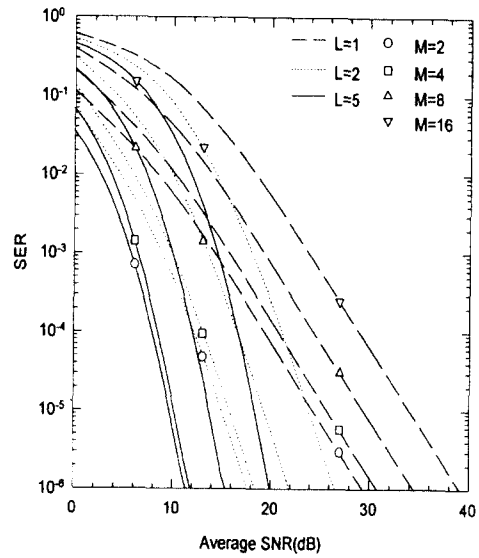
$$\begin{aligned} P_s(M) &= 1 - L \sum_{n_0=0}^{L-1} (-1)^{n_0} \binom{L-1}{n_0} \\ & \cdot \sum_{n_1=0}^{n_0} \sum_{n_2=0}^{n_1} \cdots \sum_{n_{L-1}=0}^{n_{L-2}} \left[\prod_{j=1}^{L-1} \binom{n_{j-1}}{n_j} \left(\frac{1}{j!} \right)^{n_j} \left(\frac{m}{\gamma_0} \right)^{n_j} \right] \\ & \cdot \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(m)} \left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)} \right]^n \left(\frac{1}{1+n_0} \right)^m \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{M} + \beta(m) \cdot \left[\sum_{s=0}^{n+m-1} \left(\frac{m(1+n_0)/4}{\mu^2 + m(1+n_0)} \right)^s \right. \right. \\ & \quad \cdot \left. \left. \left(\binom{2s}{s} \left(\frac{1}{2} + \frac{\tan^{-1} \alpha(m)}{\pi} \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{s-1} \binom{2s}{l} \frac{\sin[2(s-l) \tan^{-1} \alpha(m)]}{s-l} \right] \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

식(35)는 주파수 비선택적 느린 나카가미 m -분포의 페이딩을 겪는 MPSK 신호의 L-차 선택성 다이버시티에 대한 심벌 오류 확률의 일반식이다. 식(35)에서 $L=1$ 일 때는 나카가미 채널에서 다이버시티를 적용하지 않았을 경우의 심벌 오류 확률 식이 되며 이 경우는 참고 문헌 [5]의 식(12)와 일치한다.

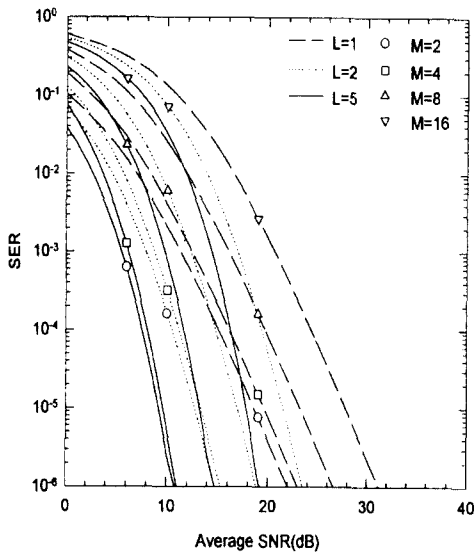
유도된 식의 검증을 위하여 식(35)에서 변조 지수 m 을 1로 하면 레일리 페이딩을 겪는 신호의 선택성 다이버시티에 대한 오류 확률 식이 다음과 같이 얻어



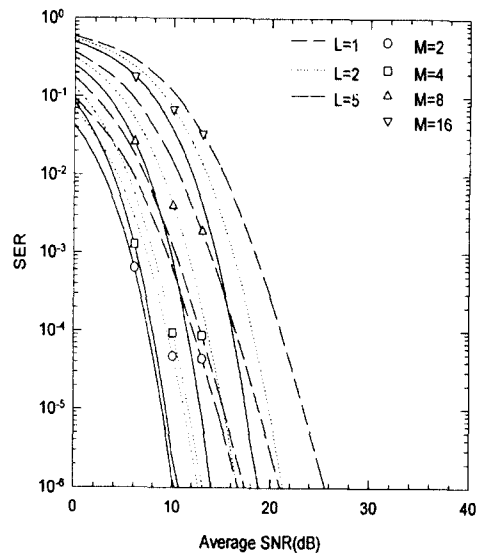
(a) $m = 1$



(b) $m = 2$



(c) $m = 3$



(d) $m = 5$

그림 1. L 의 변화에 따른 MPSK 신호의 심벌 오류 확률

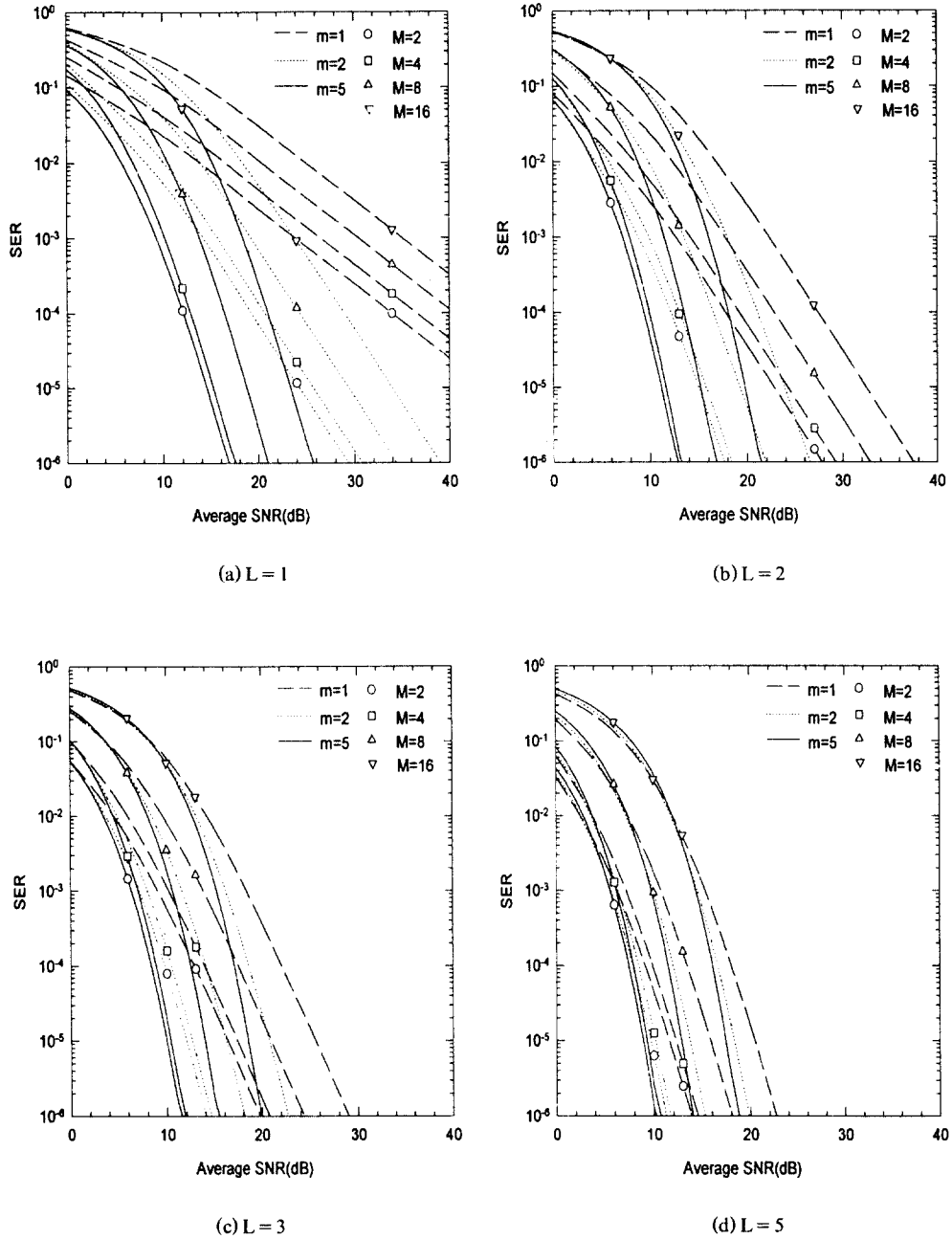


그림 2. m 의 변화에 따른 MPSK 신호의 심벌 오류 확률

지며 이는 참고 문헌 [4]의 식(26)와 일치한다.

$$P_s(M) = 1 - L \sum_{n_0=0}^{L-1} (-1)^{n_0} \binom{L-1}{n_0} \left(\frac{1}{1+n_0} \right) \cdot \left[\frac{1}{M} + \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + (1+n_0)}} \right] \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{k\gamma_0}{\mu^2 + (1+n_0)}} \cos\left(\frac{\pi}{M}\right) \right] \right) \quad (36)$$

식(35)에서 $m=1$ 이고 $L=1$ 인 경우에는 레일리 페이딩 채널에서 다이버시티를 사용하지 않는 MPSK 신호의 오류 확률 식 (37)이 됨을 확인할 수 있으며 [10, 식(7)]

$$P_s(M) = \frac{M-1}{M} - \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{k\gamma_0}{\mu^2 + 1}} \cos\left(\frac{\pi}{M}\right) \right] \right) \quad (37)$$

식(35)에서 $m=1$, $L=1$ 이고 $M=2$ 이면 잘 알려진 레일리 페이딩 채널에서 BPSK 신호의 오류 확률 식이 된다[7].

$$P_s(2) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1}} \right) \quad (38)$$

그림 1과 그림 2는 나카가미 페이딩 채널에서 선택성 다이버시티를 적용한 MPSK 수신 신호의 성능을 나타내고 있다. 그림 1에서 보면 다이버시티의 차수가 증가함에 따라 오류 확률이 감소함을 볼 수 있다. 그림 1로부터 페이딩이 심할수록 다이버시티의 차수가 1에서 2로 증가할 때의 성능 개선이 2에서 5로 증가할 때보다 훨씬 효율적임을 알 수 있다. 즉, 다이버시티 가지수의 증가가 시스템의 복잡성에 비해 성능 개선에 크게 기여하지 못함을 나타내는 것이다. 이러한 사실은 최대비 합성(MRC) 기법에 비해 선택성 합성(SC) 기법이 지닌 가장 큰 장점이라고 할 수 있다. 또한 그림 2에서 변조 지수 m 이 작을수록 페이딩의 영향을 크게 받고 있음을 확인할 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 주파수 비선택적 느린 나카가미 m -분포의 페이딩을 겪는 MPSK 신호의 L-차 선택성 다이버시티에 대한 심벌 오류 확률을 변조 지수 m 이 정수일 때 정확한 수식으로 유도하였다. 유도 과정에서 수신 신호의 확률 밀도 함수에 대한 새로운 전개가 소개되었으며 다양한 수학적 기법을 이용해 수식을 전개하였다. 유도된 식의 검증은 위하여 나카가미 페이딩 지수 m 이 1인 경우 레일리 페이딩 채널에서의 오류 확률 식이 됨을 확인하였다.

그림 1은 페이딩 지수 m 이 각각 1, 2, 3, 5 일 경우 다이버시티 가짓수 L을 변화시켜가면서 그런 성능 분석에 관한 그림이다. 그림 1을 통하여 다이버시티의 차수가 1에서 2로 증가할 때보다 2에서 5로 증가할 때가 성능 개선이 둔화됨을 확인할 수 있었다. 이러한 분석의 결과는 높은 차수의 선택성 다이버시티가 시스템의 복잡성에 비해 만족할만한 성능의 개선을 가져다주지 못한다는 사실을 입증하는 것이다. 그러나 이러한 성능 개선의 폭도 페이딩 지수가 커짐에 따라, 즉 페이딩 현상이 줄어든 전송 채널에서는 둔화됨을 확인할 수 있다. 다시 말해서 심한 페이딩을 겪는 전송 채널일수록 선택성 합성 기법이 효과적인 다이버시티 합성 방법으로 쓰일 수 있음을 말해주고 있는 것이다.

그림 2는 다이버시티 가짓수 L이 각각 1, 2, 3, 5 일 경우 페이딩 지수 m 을 변화시켜가면서 나타낸 그림이다. 그림 2에서 보면 낮은 차수의 다이버시티 가짓수 L에 비해 높은 차수의 L에서는 페이딩 지수 m 의 변화에 비해 그 성능 개선이 뚜렷한 양상을 보이지 않고 있는 것을 알 수 있다. 이러한 결과는 그림 1의 분석에서와 마찬가지로 높은 차수의 선택성 다이버시티가 페이딩의 심화에 비해서 성능 향상에 크게 기여하지 못함을 말해주는 것이다.

결론적으로 본 논문에서는 페이딩의 변화와 다이버시티 가짓수의 변화를 고려하여 적절한 다이버시티 가짓수를 찾고, 또한 유도된 결과로부터 디지털 육상 이동 통신에서 MPSK 신호의 성능을 분석하는데 유용한 도구가 되기에 충분히 일반적이라고 할 수 있다.

참 고 문 헌

1. W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*, New York: Wiley, 1974.
2. M. Nakagami, "The m-distribution - A general formula of intensity distribution of rapid fading," in *Statistical methods in radio wave propagation*, W. G. Hoffman, Ed., Oxford, England: Pergamon Press, pp. 3-36, 1960.
3. I. S. Gradshteyn, and I. M. Ryzhik, *Tables of integral, series and product*, New York: Academic Press, 1980.
4. S. Chennakeshu, and J. B. Anderson, "Error rates for Rayleigh fading multi-channel reception of MPSK signals," *IEEE Trans. Comm.*, COM-43, (1), pp. 338-346, 1995.
5. V. Aalo, and S. Pattaramalai, "Average error rate for coherent MPSK signals in Nakagami fading channels," *Electron. Lett.*, 32, (17), pp. 1538-1539, 1996.
6. A. Annamalai, "Analysis of selection diversity on Nakagami fading channel," *Electron. Lett.*, 33, (7), pp. 548-549, 1997.
7. J. G. Proakis, *Digital communications* 3rd Ed., McGraw-Hill, 1995.
8. N. Ekanagake, "Performance of M-ary PSK in slow Rayleigh fading channels," *Electron. Lett.*, 26, (10), pp. 618-619, 1990.
9. T. Eng, and L. B. Milstein, "Coherent DS-CDMA performance in Nakagami fading multipath channel," *IEEE Trans. Comm.*, COM-43, no. 2-4, pt. 2, pp. 1134-1143, 1995.
10. C. K. Pauw, D. L. Schilling, "Probability of Error for M-ary PSK and DPSK on a Rayleigh Fading Channel," *IEEE Trans. Comm.*, COM-36, no. 6, pp. 755-756, 1988.



최 세 영(Se-Yeong Choi) 정회원
 1971년 2월 13일생
 1996년 2월: 한양대학교 전자통신공학과 졸업(공학사)
 1996년 3월~현재: 한양대학교 전자통신공학과 석사과정

윤 동 원(Dong-Weon Yoon) 정회원
 1966년 1월 22일생
 1989년 2월: 한양대학교 전자통신공학과 졸업(공학사)
 1992년 2월: 한양대학교 전자통신공학과 대학원 졸업(공학 석사)
 1995년 8월: 한양대학교 전자통신공학과 대학원 졸업(공학 박사)
 1995년 3월~1997년 8월: 동서대학교 정보통신과 전임강사
 1997년 9월~현재: 대전대학교 정보통신과 전임강사

한 영 열(Young-Yearl Han) 정회원
 한국통신학회논문지 제22권 제5호 참조