

양자화 제약 집합에 투영을 이용한 벡터 양자화된 영상의 후처리

正會員 김 동 식*, 박 섭 형**, 이 중 석***

Post-processing of Vector Quantized Images Using the Projection onto Quantization Constraint Set

Dong Sik Kim*, Seop Hyeong Park**, Jong Seok Lee*** *Regular Members*

요 약

블록 집합에의 투영(projection onto convex sets) 이론 또는 제약 최소화(constrained minimization) 기법을 응용하여 벡터 양자화된 영상을 후처리하기 위해서는 양자화된 영상의 블록 경계에서의 불연속을 줄이기 위한 일종의 저역 통과 여과 과정과 더불어 양자화 제약 집합(QCS: quantization constraint set)으로의 투영에 대한 고찰이 선행되어야 한다. 이 중 QCS로의 투영은 후처리 과정 중에 데이터를 항상 해당되는 양자화 영역에 머무르도록 하는 것으로 후처리 중 저역 통과 여과로 인해 발생하는 과도한 뭉뚱화 등의 부작용을 줄이려 하는 것으로 이것이 QCS에의 투영을 통해 얻고자 하는 기본 목표이다. 그러나 벡터 양자화의 경우 QCS에의 투영 과정은 부호책이 구조적으로 되어 있지 않는 한 각 Voronoi 영역이 임의의 형태를 가지므로 매우 복잡하다. 본 논문에서는 MSE(Mean Square Error)를 최소화시킨다는 관점에서 후처리 과정 중의 여과와 QCS에의 투영을 이론적으로 분석하여서 QCS에의 투영보다는 QCS의 어떤 부분 집합으로 투영하는 것이 MSE를 더 줄일 수 있다는 사실을 밝혔다. 그런데 최적 부분 집합의 형태는 전적으로 원 영상과 여과된 영상 간의 통계적 특성에 따라 달라지기 때문에 그 형태를 구하는 것이나 그것으로의 투영 과정은 매우 복잡하므로 대신에 간단한 투영이 가능한 입방체 형태의 새로운 제약 집합을 제시하였다. 아울러 적절한 여과 기법과 제안된 제약 집합을 사용하여 왜곡값을 후처리 이전보다 줄일 수 있음을 이론적으로 보였으며, 실 영상에 대한 실험도 시행하였다.

ABSTRACT

In order to post-process the vector-quantized images employing the theory of projections onto convex sets or the

*School of Electrical and Computer Engineering, Purdue University

** 한국통신 통신망연구소 초고속망연구실 네트워크서비스팀장

*** LG전자 기술원 지능 정보 부문

論文番號: 96316-1005

接受日字: 1996年 10月 5日

constrained minimization technique, the projector onto QCS(quantization constraint set) as well as the filter that smoothes the block boundaries should be investigated theoretically. The basic idea behind the projection onto QCS is to prevent the processed data from diverging from the original quantization region in order to reduce the blurring artifacts caused by a filtering operation. However, since the Voronoi regions in the vector quantization are arbitrarily shaped unless the vector quantization has a structural codebook, the implementation of the projection onto QCS is very complicate. This paper mathematically analyzes the projection onto QCS from the viewpoint of minimizing the mean square error. Through the analysis, it has been revealed that the projection onto a subset of the QCS yields lower distortion than the projection onto QCS does. Searching for an optimal constraint set is not easy and the operation of the projector is complicate, since the shape of optimal constraint set is dependent on the statistical characteristics between the filtered and original images. Therefore, we proposed a hyper-cube as a constraint set that enables a simple projection. It will be also shown that a proper filtering technique followed by the projection onto the hyper-cube can reduce the quantization distortion by theory and experiment.

I. 서 론

벡터 양자화(VQ: vector quantization)는 손실 데이터 압축에서 영상 데이터 양을 효율적으로 줄여 주는 데 사용되는 기법으로, 기존에 사용되고 있는 스칼라 양자화(scalar quantization)를 대신하여 여러 영상 전송 기법에 적용하는 방법이 연구되고 있다. VQ를 공간 영역(spatial domain)에 적용하는 경우에는, 하나의 영상을 여러 개의 작은 블록으로 나누어 이를 하나의 벡터로 보고 각각 독립적으로 양자화를 한다. 그런데 블록 간의 독립적 양자화로 인하여 블록화 현상이라 하는 블록과 블록 간에 불연속 현상이 발생하는 단점을 가지고 있다. 이 중 모서리 부근이 손상을 입어서 계단 형태가 되는 것은 잘 알려진 블록화 현상 중의 하나다[8]. 반면에 모서리가 없는 영역에서는 블록과 블록 간의 불연속으로 인하여 모자이크한 것과 같은 왜곡이 발생한다. 이러한 단점을 보완하기 위해 흔히 후처리(post-processing) 기법이 사용되고 있다. Ramamurthi와 Gersho는 공간 영역에서 모서리의 방향에 기초한 분류기를 제안하여 복호된 영상을 후처리하였다^[7]. 한편, 블록 DCT(discrete cosine transform)에 기초한 영상 부호화에서도 VQ 기법을 변환 영역(transform domain)에 적용할 수 있는데^[9], 이때도 역시 블록화 현상이 발생한다. 이를 줄이기 위한 방법으로 블록 DCT 기법을 변형하여 블록화 현상을 줄이는 방법^[5, 6]과, 일단 부호화 이후 다시 복호된 영상을 후처리하는 방법이 사용되고 있다. 이 중

후자의 경우, 최근에 볼록 집합에의 투영(POCS: projections onto convex sets) 이론^[4, 11] 또는 제약 최소화(constrained minimization) 기법^[10, 12]에 기초한 영상 복원(image restoration) 기법이 VQ의 경우에 확장 사용될 수 있을 것이다.

후처리 기법은 양자화가 공간 영역이든 변환 영역에서 이루어지든 간에 관계 없이 영상 부호화의 기본 구조를 변화시키지 않고 복호기만을 변형해도 적용이 가능하다는 이점을 가지고 있다. 일반적으로 POCS 이론이나 제약 최소화 기법에 기초한 양자화된 영상의 복원 기법에서의 각 반복 과정은, 여과(filtering) 과정과 양자화 제약 집합(QCS: quantization constraint set)에 투영하는 과정으로 나눌 수 있다^[20]. 여과 기법은 영상의 화질을 개선하는 데 결정적인 역할을 하는 것으로서, 간단하면서도 고성능인 여과 기법의 고안을 위한 많은 연구가 수행되고 있다^[10, 11, 14, 18]. 그러나 이러한 여과도 일종의 제약이며, 이와 같이 여러 가지 제약을 설정하여 그들의 공통 부분에 후처리된 데이터가 놓이도록 하는 것이 앞에서 언급한 두 가지 방법의 기본 원리이다^[4, 12]. 이렇게 양자화에 기초한 부호화된 영상의 후처리에서는 공통적으로 QCS를 사용하므로 앞의 POCS 이론이나 제약 최적화 기법에 기초한 알고리즘을 'QCS 기반 후처리 기법'이라고 포괄적으로 부르기로 하자^[20, 21].

복호된 영상이 주어지면 이때의 QCS는 양자화된 이후에 주어진 복호된 영상이 되는 모든 영상의 집합으로 정의된다^[10]. 이 집합 안으로 후처리된 영상을

제한시키는 것은 여과 과정 중에 원 영상으로부터 결과가 멀리 벗어나지 못하도록 하는 역할을 한다. 영상 데이터 압축을 위한 알고리즘에는 반드시 양자화 과정이 포함되므로, 부호화된 데이터를 역변환을 통해 원래의 데이터로 환원하는 것이 불가능하다. 그러나 양자화된 데이터, 즉 복호된 영상으로부터 최소한 원 영상의 값이 어떤 영역에 있었는지는 양자화 영역을 알고 있으므로 추측할 수 있다. 따라서 이러한 집합을 하나의 제약 집합으로 설정하고, 더불어 원 영상이 가질 수 있는 또 다른 여러 제약 집합을 설정하여, 결국에는 원 영상에 보다 가까운 영상을 얻어 내는 것이 QCS에 기초한 알고리즘을 이용한 영상 복원 기법의 원리이다.

언급한 바와 같이 QCS에의 투영은 단순히 영상 복원 과정 중에서 여과된 영상이 원 영상으로부터 멀어지는 것을 방지해 준다. 예를 들어, 블럭 DCT 부호화에서 블럭화 현상을 제거하기 위해서는 흔히 단순한 저역 통과 여과 기법(low-pass filtering)을 복호된 영상에 적용할 수 있다. 그러나 이렇게 단순히 저주파 성분만을 통과시키고 고주파 성분을 제거하게 되면 블럭화 현상은 어느 정도 줄일 수 있겠지만 원 영상이 가지고 있는 모서리 부근 등의 고주파 성분까지도 같이 손상을 받게 된다¹⁰⁾. 이때, 손상된 데이터를 다시 QCS에 투영시키면 어느 정도는 저대역 통과 여과로 인한 손상을 보상할 수 있으리라 사료된다. 이러한 관점에서 이제까지 QCS에의 투영 기법이 사용되어 왔다. 그러나 최근에는 MSE를 최소화시키는 관점에서 QCS 대신에 NQCS(narrow quantization constraint set)를 사용해야 한다는 결과가 실험적으로 입증되었으며^{13, 20)}, 아울러 확률 이론을 도입하여 이론적으로 분석하였다^{15, 20)}. 스칼라 양자화에서 QCS의 형태는 M 을 한 영상의 화소의 개수라고 할 때 M 차원의 입방체(hyper-cube)가 되며, 그것으로의 투영은 양자화 구간이 1차원이므로 간단히 수행될 수 있다. 그러나 VQ에서 QCS는 각각의 임의의 형태를 가진 Voronoi 영역의 closure로 구성되어 있으므로, 어느 영상을 이러한 QCS로 투영하는 것은 간단한 작업이 아니다. 따라서 벡터 양자화된 영상을 QCS에 기초한 알고리즘으로 후처리하기 위해서는 이러한 QCS로의 투영에 대한 연구가 선행되어야 한다. 따라서 본 논문에서는 여과 기법의 연구보다 먼저 VQ에서의 QCS

로의 투영에 대해 고찰해 보았으며, 투영 과정의 단순화를 위해 새로운 제약 집합을 제안하였다¹⁷⁾. 그리고 [20]에서 언급한 바와 같이 QCS에 기초한 알고리즘의 초기 영상은 항상 QCS의 무게 중심이므로 제약 집합으로의 투영에 기초한 반복이 필요없는 단순화된 후처리 기법을 정리하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 II장에서는 VQ와 QCS에의 투영을 수식으로 정리하였고 이론적으로 고찰해 보았다. 제 III장에서는 투영 과정의 구현을 간단히 하기 위해 입방체를 새로운 제약 집합으로 제안하고 이론적 분석을 소개하였으며, 제 IV장에서는 최적 배율 값을 찾는 것에 대해 간단히 언급하였다. 제 V장에서는 벡터 양자화된 영상에 대한 모의 실험 결과를 제시하였으며 마지막 장에 결론을 내렸다.

II. 벡터 양자화 제약 집합으로의 투영

본 장에서는 먼저 이론적 전개를 위하여 VQ와 관련된 수학적 표기들을 정리하였으며, 원 영상과 여과시킨 복호된 영상 간의 관계를 나타내는 조인트 확률 분포 함수도 언급하였다. 이러한 수학적 표기를 사용하여 임의의 형태를 가지는 벡터 양자화 영역으로의 투영을 고찰해 보았다.

$\mathbf{X} = (X_1 \dots X_k)^T$ 를 k 차원 \mathbf{R}^k 에서의 확률 벡터라 하자. \mathbf{X} 의 확률 분포 함수를 $F_{\mathbf{X}}$ 로 표기하는데, 이는 연속적이고 $E\|\mathbf{X}\|^2 < \infty$ 을 만족한다고 하자. 여기서 $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ 이며 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$ 이다. \mathbf{X} 를 벡터 양자화해 보자. 부호책(codebook) $\mathbf{C} = \{\hat{\mathbf{x}}_i\}$ 를 N 개의 부호단어(codeword)의 집합이라 하고 $F_{\mathbf{X}}$ 에 최적 또는 준최적이라 가정하자. 즉 $\hat{\mathbf{x}}_i = P_i^{-1} \int_{S_i} \mathbf{x} dF_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ 가 성립된다고 하자²¹⁾. 여기서 $P_i = \int_{S_i} dF_{\mathbf{X}}$ 이다. 또한 $\{S_i\}$ 를 부호책 \mathbf{C} 에 의해 구성된 Voronoi 영역의 집합이라 하면 벡터 양자화는 다음과 같은 사상이 된다.

$$Q_c(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{x}}_i I_{S_i}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

이 식에서 $\mathbf{x} \in S_i$ 일 때 $I_{S_i}(\mathbf{x}) = 1$ 이고 그렇지 않으면 $I_{S_i}(\mathbf{x}) = 0$ 이다. 이때 전개를 단순화하기 위하여 모든 S_i 는 bound 되어 있다고 가정하자. 양자화 왜곡의 측정을 위해

MSE 측정값을 사용한다고 하면 부호책 C 를 사용해서 확률 분포 함수 F_X 를 가지는 신호를 양자화할 때 평균 양자화 왜곡(average quantization distortion)은

$$D(C, F_X) \triangleq E\|X - Q_C(X)\|^2 = \sum_{i=1}^N P_i d_i \quad (2)$$

가 된다. 이 식에서 $P_i d_i$ 는 i 번째 부분 평균 왜곡(partial average distortion)이며 d_i 는 i 번째 평균 왜곡으로 다음과 같이 정의된다.

$$d_i = \frac{1}{P_i} \int_{S_i} \|x - \hat{x}_i\|^2 dF_X(x) \quad (3)$$

이론적 전개를 간단히 하기 위하여 각 양자화 영역별로 다음과 같은 확률 밀도 함수(pdf: probability density function)를 정의하자. X_i 를 i 번째 양자화 영역의 확률 벡터라고 하고 그의 pdf는 다음과 같이 정의된다.

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} f_X(x)/P_i & (x \in S_i) \\ 0 & (x \notin S_i) \end{cases} \quad (4)$$

이 식에서 $f_{X_i}(x)$ 는 $F_X(x)$ 의 pdf이다.

\hat{x}_i , 즉 i 번째 부호단어에 해당되는 데이터를 여과시켜 얻은 데이터를 확률 벡터로 보고 이를 Y_i 로 표기하자. 그러면 i 번째 부호단어에 해당되는 원 영상 X_i 와 Y_i 간에 통계적 관계를 나타내는 조인트 확률 분포 함수(joint probability distribution function)를 정의할 수 있다. 이를 F_{X_i, Y_i} 로 표기하고 연속이라고 가정하자. 그러면 pdf f_{X_i, Y_i} 는 F_{X_i, Y_i} 를 미분해서 얻을 수 있다. 이러한 조인트 확률 분포 함수는 여과 과정과 밀접한 관계를 가지고 있다. 그러므로 이러한 조인트 확률 분포 함수에 부가되는 조건의 성립 여부는 어떠한 여과 기법을 사용하느냐에 달려있다. 본 논문에서는 이론적 분석을 단순화시키기 위하여 이러한 불규칙 벡터를 사용한 POCS 또는 제약 최적화 기법에서의 반복 알고리즘의 구체적인 표기는 생략하였으며, 반복 알고리즘에서 임의의 l 번째의 반복 과정만을 고려하기로 하자. 그러면 Y_l 는 l 번째의 반복 과정에서 여과 과정을 거친 영상을 나타내는 확률 벡터가 된다. 확률 벡터를 이용한 POCS 또는 제약 최적화 기법의 반복 알고리즘에 대한 구체적인 수식 전개는 참고 문헌 [20] 또는 [21]을 참조하기 바란다.

이제 l 번째 반복 과정에서 여과된 영상 Y_l 를 임의의 형태를 갖는 VQ의 Voronoi 영역으로 투영하는 것에 대해서 고찰해 보자. 어떠한 볼록 집합 S 에 어떤 값을 투영하는 투영 함수(projection function)를 다음과 같이 정의하자.

$$c_S(x) = \begin{cases} x & (x \in S) \\ \inf_{z \in S}^{-1} \|z - x\|^2 & (x \notin S) \end{cases} \quad (5)$$

이 식에서 \bar{S} 는 S 의 closure이다. 그러면 l 번째 반복해서 얻어진 확률 벡터 Y_l 가 μ 배율된 S_l 로 투영된 값과 원 데이터인 X_l 간의 왜곡은, QCS가 S_l 들의 Cartesian product 이므로 해당되는 각 Voronoi 영역 S_i 로의 투영 형태인

$$E \sum_{i=1}^N P_i \|X_i - c_{\mu_i S_i}(Y_i)\|^2 = \sum_{i=1}^N P_i \delta_i(\mu_i) \quad (6)$$

로 정의되는데 이를 투영된 평균 왜곡(projected average distortion)이라 부른다. 이때 배율 계수 μ_i 는 음수가 아닌 실수이고 i 번째 투영된 평균 왜곡은

$$\delta_i(\mu_i) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S_i} \|x - c_{\mu_i S_i}(y)\|^2 dF_{X_i, Y_i}(x, y) \quad (7)$$

로 정의된다. 이때 μ_i 로 배율된 S_i 를 $\mu_i S_i$ 로 표기하는데, 집합 $\mu_i S_i$ 는 S_i 와 같은 중심인 \hat{x}_i 를 가지며 그의 경계까지의 거리가 μ_i 배이다. 따라서 $\mu = 1$ 일 때 $S_i = \mu S_i$ 가 성립된다. 또한 S_i 가 볼록 집합이므로 $\mu_i S_i$ 도 볼록 집합이다. 본 논문에서 관심을 가지고 있는 것은, 어떤 주어진 여과 과정에서 식 (7)의 왜곡이 최소가 되도록 적절한 μ_i 값을 찾는 것이다.

이제 여러 μ_i 값에서 식 (7)의 왜곡이 서로 어떠한 관계를 가지는가를 고찰해 보자. $x \in S_i$ 와 $y \in \mathbb{R}^n$ 을 만족시키는 모든 x 와 y 에 대해

$$\|x - c_{\mu S_i}(y)\|^2 \geq \|x - c_S(y)\|^2, \mu > 1 \quad (8)$$

이 성립된다. 그러므로

$$\delta_i(\mu) \geq \delta_i(1), \quad \mu > 1 \quad (9)$$

이라는 관계식을 얻는데, 이것은 $\mu > 1$ 인 집합 μS_i 에 투

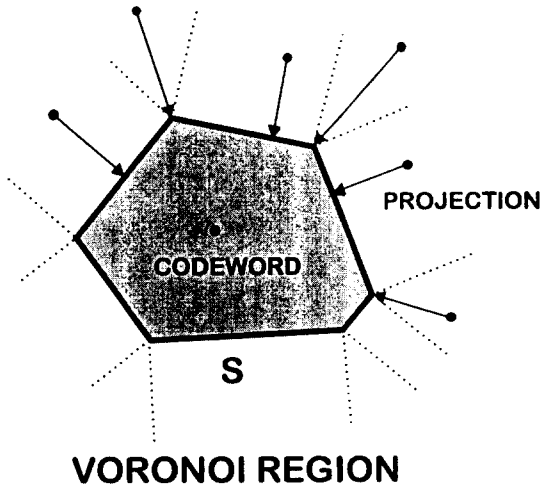


그림 1. Voronoi 영역으로의 투영.
Fig. 1 Projection onto Voronoi region.

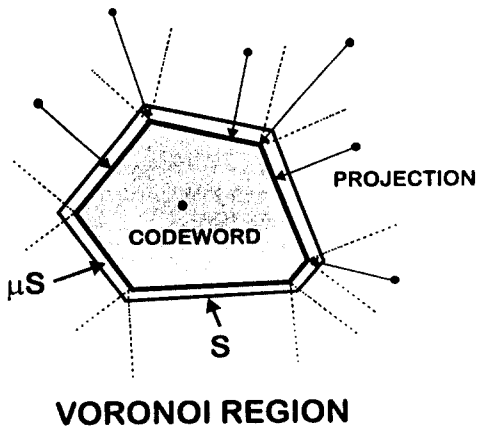


그림 2. Voronoi 영역의 부분 집합으로의 투영.
Fig. 2 Projection onto a subset of Voronoi region.

영하는 경우는 왜곡값을 $\mu=1$ 인 경우보다 낮출 수 있다는 것을 의미한다. 여기서 주의할 것은 $\delta_i(1)$ 은 $\delta_i(0)$ 보다, 즉 원래의 양자화 왜곡인 d_i 보다 작을 수도 있고 클 수도 있다는 점이다. 그림 1에는 이러한 $\mu=1$ 인 경우, 즉 Voronoi 영역으로의 투영을 예로 도시하였다. 한편 $0 \leq \mu \leq 1$ 인 경우를 생각해 보자. 이때의 투영은 그림 2와 같은 형태가 되는데, $\mu S_i \subset S_i$ 의 관계식

이 성립된다.

Y_i 의 확률 분포 함수가 0이 되지 않는 값들의 집합에서 S_i 를 제한했을 때 공집합이 되지 않는, 즉 $|\mathbf{r}^* - S_i|, dF_{Y_i} > 0$ 인 경우에는

$$\delta_i(\mu) < \delta_i(1) \tag{10}$$

의 부등식이 어떤 $\mu \in [0, 1]$ 값에서 성립된다. 이 부등식의 증명은 부록에 기술하였다. 이 부등식은 일반적으로 S_i 로의 투영이 MSE를 최소화시킨다는 관점에서는 최적이지 아니라는 사실을 의미하고 있다. 즉 최적의 양자화 제약 집합은 S_i 보다 작으면서 S_i 에 포함되는 부분 집합, 즉 일종의 협집합이 되어야 한다는 사실을 언급하고 있다. 이러한 결과는 스칼라 양자화 경우에서 제시된 양자화 협집합에 대한 결과^{16, 20}와 일맥 상통하는 것이다. 아울러 [20]에서 언급한 바와 같이 원 영상은 QCS의 경계보다는 내부에 있다는 사실을 뒷받침하고 있다. 따라서 주어진 F_{X_i}, Y_i 에 대해 최적의 제약 집합은 S_i 가 아니며 그 모양도 S_i 가 아니라 F_{X_i}, Y_i 에 전적으로 달려 있다. 그러나 최적의 모양을 가진 제약 집합을 찾는 것과 그것으로 투영시키는 과정은 간단하지 않다. 그러므로 본 논문에서는 실시간 동작 가능한 VLSI 구현의 측면에서 투영 과정을 단순하게 구현하면서도 MSE를 줄일 수 있는 새로운 제약 집합을 제안하였다.

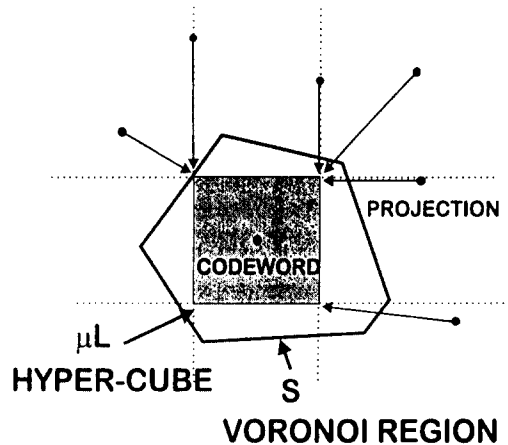


그림 3. 입방체로의 투영.
Fig. 3 An example of projection onto a hyper-cube.

III. μ 배율된 입방체로의 투영

본 장에서는 벡터 양자화된 데이터를 위한 k 차원에
서의 μ 배율된 입방체라는 새로운 제한 집합을 제안하
였다^[7]. 아울러 이것을 제안하게 된 이론적 배경도 첨부
하였다. 입방체는 블록 집합이며 그것으로의 투영은
그림 3에서 보는 바와 같이 벡터의 각 원소 값을 서로
독립적으로 투영시켜 줌으로써 구현할 수 있다. 즉
투영 과정이 매우 단순하므로 실시간 VLSI 구현이
매우 용이하다. 이와 더불어 입방체로 투영하면서 얻
어지는 투영된 평균 왜곡은 양자화 왜곡 d_i 보다 더 낮
아질 수 있다. 이에 대한 이론적 근거는 다음과 같다.
중심이 $\hat{\mathbf{x}}_i$ 인 기준 입방체를 다음과 같이 정의하자.

$$L_i = [\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{1}, \hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{1}] \quad (11)$$

이 식에서 $\mathbf{1}$ 은 원소가 모두 1인 k 차수의 벡터, 즉 $\mathbf{1} = (1 \dots 1)^T$ 이다. 참고로 이 기준 입방체의 체적은 $V(L_i) = 2^k$ 이며, $k=2$ 일 때는 정사각형, $k=3$ 일 때는 정육면체가 된다. 그러면 μ 배율된 입방체를 다음과 같이 정의하자.

$$\mu L_i = [\hat{\mathbf{x}}_i - \mu \mathbf{1}, \hat{\mathbf{x}}_i + \mu \mathbf{1}] \quad (12)$$

그러면 복호된 영상을 여과시키고 배율 집합 $\{\mu_i\}$ 에 의해 각각 배율된 입방체들로 구성된 제약 집합에 투영시킨 데이터의 투영된 평균 왜곡은 다음과 같다.

$$E \sum_{i=1}^N P_i \|\mathbf{X}_i - \mathbf{c}_{\mu_i, L_i}(\mathbf{Y}_i)\|^2 = \sum_{i=1}^N P_i \delta'_i(\mu_i) \quad (13)$$

이 식에서 i 번째 양자화 영역에 해당되는 i 번째 투영된 평균 왜곡은 다음과 같다.

$$\delta'_i(\mu_i) = \int_{\mathbf{R}^k} \int_{S_i} \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_{\mu_i, L_i}(\mathbf{y})\|^2 dF_{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (14)$$

이 식은 다음과 같이 전개될 수 있다. 이때 기호 표기를 단순화하기 위해 μ_i 대신에 μ 를 쓰기로 한다.

$$\begin{aligned} \delta'_i(\mu) &= \int_{S_i} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2 f_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{j=1}^k \int_{\mathbf{R}^k} [c_{\mu, L_i}(\mathbf{y})_j - \hat{x}_{i,j}]^2 f_{\mathbf{Y}_i}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- 2 \sum_{j=1}^k \int_{S_i} (x_j - \hat{x}_{i,j}) \int_{\mathbf{R}^k} (c_{\mu, L_i}(\mathbf{y})_j - \hat{x}_{i,j}) \\ &f_{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $\int_{S_i} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2 f_{\mathbf{X}_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ 는 식 (3)에서 언급한 i 번째 평균 왜곡값 d_i 이며 $c_{\mu, L_i}(\mathbf{y})_j$ 는 $c_{\mu, L_i}(\mathbf{y})$ 의 j 번째 원소이다. 식 (15)는

$$\delta'_i(\mu) = d_i + \lambda_i(\mu) \quad (16)$$

와 같이 쓸 수 있는데, 여기서 $\lambda_i(\mu) = \alpha_i(\mu) - \beta_i(\mu)$ 이며

$$\alpha_i(\mu) \triangleq \sum_{j=1}^k \int_{\mathbf{R}^k} [c_{\mu, L_i}(\mathbf{y})_j - \hat{x}_{i,j}]^2 f_{\mathbf{Y}_i}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (17)$$

이고

$$\begin{aligned} \beta_i(\mu) &\triangleq 2 \sum_{j=1}^k \int_{S_i} (x_j - \hat{x}_{i,j}) \int_{\mathbf{R}^k} (c_{\mu, L_i}(\mathbf{y})_j - \hat{x}_{i,j}) \\ &f_{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (18)$$

이다. 결국 식 (13)의 투영된 평균 왜곡은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\sum_{i=1}^N P_i \delta'_i(\mu_i) = D(C, F_X) + \sum_{i=1}^N \lambda_i(\mu_i) \quad (19)$$

식 (16) 또는 (19)를 보면, 투영된 왜곡은 $\lambda_i(\mu_i)$ 에 따라서 벡터 양자화 왜곡보다 작아질 수도 있음을 알 수 있다.

이제부터 이러한 경우에 대해서 고찰해 보자. 식 (17)로부터 $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_i(\mu) = \sum_{j=1}^k \text{Var}(Y_{i,j})$ 이므로 $\alpha_i(\mu)$ 는 \mathbf{Y}_i 의 분산과 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다. 식 (15)에서 투영 함수 $c_{\mu, L_i}(\mathbf{y})_j$ 는 \mathbf{y} 의 j 번째 원소에만 관련되어 있으므로 식 (17)을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_i(\mu) &= \sum_{j=1}^k \left[\int_{\hat{x}_{i,j}-\mu}^{\hat{x}_{i,j}+\mu} (y_j - \hat{x}_{i,j})^2 f_{Y_{i,j}}(y_j) dy_j \right. \\ &\left. + \mu^2 \left\{ \int_{\hat{x}_{i,j}+\mu}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\hat{x}_{i,j}-\mu} \right\} f_{Y_{i,j}}(y_j) dy_j \right] \end{aligned} \quad (20)$$

먼저 $\alpha_i(\mu)$ 의 μ 에 대한 미분치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}\alpha_i(\mu) &= \frac{d\alpha_i(\mu)}{d\mu} \\
 &= \sum_{j=1}^k [\mu^2 f_{Y_{i,j}}(\hat{x}_{i,j} + \mu) + \mu^2 f_{Y_{i,j}}(\hat{x}_{i,j} - \mu) \\
 &\quad + 2\mu \left\{ \int_{\hat{x}_{i,j} + \mu}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\hat{x}_{i,j} - \mu} \right\} f_{Y_{i,j}}(y_j) dy_j \\
 &\quad + \mu^2 \{-f_{Y_{i,j}}(\hat{x}_{i,j} + \mu) - f_{Y_{i,j}}(\hat{x}_{i,j} - \mu)\}] \quad (21)
 \end{aligned}$$

다시 쓰면,

$$\mathbf{D}\alpha_i(\mu) = 2\mu \sum_{j=1}^k \left\{ \int_{\hat{x}_{i,j} + \mu}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\hat{x}_{i,j} - \mu} \right\} f_{Y_{i,j}}(y_j) dy_j \quad (22)$$

이 된다. 따라서 $\mu=0$ 에서의 우측 미분값은 $\mathbf{D}\alpha_i(0) = 0$ 이 된다. 한편 식 (18)은 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned}
 \beta_i(\mu) &= 2 \sum_{j=1}^k \int_{S_i} (x_j - \hat{x}_{i,j}) \int_{\hat{x}_{i,j} - \mu}^{\hat{x}_{i,j} + \mu} (y_j - \hat{x}_{i,j}) \\
 &\quad f_{X_i, Y_{i,j}}(\mathbf{x}, y_j) dy_j d\mathbf{x} \\
 &\quad + 2 \sum_{j=1}^k \int_{S_i} (x_j - \hat{x}_{i,j}) \int_{\hat{x}_{i,j} + \mu}^{\infty} \mu f_{X_i, Y_{i,j}}(\mathbf{x}, y_j) dy_j d\mathbf{x} \\
 &\quad - 2 \sum_{j=1}^k \int_{S_i} (x_j - \hat{x}_{i,j}) \int_{-\infty}^{\hat{x}_{i,j} - \mu} \mu f_{X_i, Y_{i,j}}(\mathbf{x}, y_j) dy_j d\mathbf{x} \quad (23)
 \end{aligned}$$

여기서 marginal pdf는 다음과 같다.

$$f_{X_i, Y_{i,j}}(\mathbf{x}, y_j) = \int_{\mathbf{R}^{k-1}} f_{X_i, \mathbf{Y}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dy_1 \cdots dy_{i-1} dy_{i+1} \cdots dy_k \quad (24)$$

$\beta_i(\mu)$ 를 μ 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}\beta_i(\mu) &= 2 \sum_{j=1}^k \int_{S_i} (x_j - \hat{x}_{i,j}) \left\{ \int_{\hat{x}_{i,j} + \mu}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\hat{x}_{i,j} - \mu} \right\} \\
 &\quad f_{X_i, Y_{i,j}}(\mathbf{x}, y_j) dy_j d\mathbf{x} \quad (25)
 \end{aligned}$$

따라서 $\mu=0$ 일 때의 우측 미분값은

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}\beta_i(0) &= 2 \sum_{j=1}^k \int_{S_i} (x_j - \hat{x}_{i,j}) \left\{ \int_{\hat{x}_{i,j}}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\hat{x}_{i,j}} \right\} \\
 &\quad f_{X_i, Y_{i,j}}(\mathbf{x}, y_j) dy_j d\mathbf{x} \quad (26)
 \end{aligned}$$

이다. 여기서 확률 벡터 \mathbf{X}_i 와 \mathbf{Y}_i 의 상관 분산 행렬을 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{C}_i \triangleq E(\mathbf{X}_i - E\mathbf{X}_i)(\mathbf{Y}_i - E\mathbf{Y}_i)^T \quad (27)$$

이 식에서 $\hat{\mathbf{x}}_i = E\mathbf{X}_i$ 이며 $E\mathbf{Y}_i = \hat{\mathbf{x}}_i$ 라 가정하자. 그런데 $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \beta_i(\mu) = 2\text{tr}(\mathbf{C}_i)$ 이므로 $\beta_i(\mu)$ 는 \mathbf{X}_i 와 \mathbf{Y}_i 간의 상관 분산과 밀접한 관계를 가지고 있음을 알 수 있다. 상관 분산 $\text{tr}(\mathbf{C}_i)$ 의 t 까지의 부분 상관 분산을 나타내는 함수를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) &\triangleq \sum_{j=1}^k \int_{S_i} (x_j - \hat{x}_{i,j}) \int_{-\infty}^t (y_j - \hat{x}_{i,j}) \\
 &\quad f_{X_i, Y_{i,j}}(\mathbf{x}, y_j) dy_j d\mathbf{x} \quad (28)
 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \text{tr}(\mathbf{C}_i)$ 이다. 여기서 $\text{tr}(\mathbf{C}_i)$ 는 불규칙 변수 $X_{i,j}$ 와 $Y_{i,j}$ ($j=1, \dots, k$) 간의 상관 분산의 합이므로, 만일 사용한 여과 기법이 원 데이터를 잘 예측한다고 하면 $\text{tr}(\mathbf{C}_i)$ 는 최소한 양수가 되어야 한다. 더욱이 \mathbf{X}_i 값이 모든 \mathbf{Y}_i 값에서 일정하게 잘 예측된다고 하면, 즉 부분 상관 함수인 $\sigma(t)$ 가 t 에 대해 증가 함수라고 가정하자. 그러면 식 (26)으로부터 $\mu=0$ 에서 우측 미분치는 $\mathbf{D}\beta_i(0) > 0$ 을 만족하므로

$$\mathbf{D}\lambda_i(0) < 0 \quad (29)$$

라는 관계식을 얻는다. 이 결과는 $\lambda_i(\mu)$ 는 μ 가 0에서 증가함에 따라 처음에는 감소하기 시작한다는 것으로 $\lambda_i(0) = 0$ 이므로 이때 $\lambda_i(\mu)$ 는 음수가 된다. 그러므로 식 (17)로부터 $\delta'_i(\mu)$ 는 어떤 $\mu \neq 0$ 에서 d_i 보다 작아질 수 있다는 것을 의미한다. 식 (28) 이하에서 언급한 조건은 식 (29)의 관계를 유도하기 위한 충분 조건이므로, 식 (29)를 만족하는 다른 조건을 찾을 수도 있다. 식 (29)가 성립되는 또 다른 조건을 고찰해 보자. 식 (26)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}\beta_i(0) &= 2 \sum_{j=1}^k \int_{\mathbf{R}^{k-1}} \left\{ \int_{\hat{x}_{i,j}}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\hat{x}_{i,j}} \right\} \int_{\mathbf{R}^{k-1}} \int_{S_i} (x_j - \hat{x}_{i,j}) \\
 &\quad f_{X_i, Y_{i,j}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} f_{Y_i}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (30)
 \end{aligned}$$

식 (30)에서 $\int_{S_i} (x_j - \hat{x}_{i,j}) f_{X_i, Y_{i,j}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x}$ 는 '퇴화 곡면

(regression surface)^[1]이라 불리는 조건부 기대값 $E\{X_i | Y_i = y\}$ 의 j 번째 원소이다. 후처리하는 과정은, 불규칙 벡터 X_i 를 또 다른 불규칙 벡터 Y_i 의 함수로 예측한다는 문제라고 생각할 수가 있으므로, 다음과 같이 MSE를 최소화시키는 함수 $g(y)$ 를 결정하는 일종의 비선형 예측(non-linear estimation) 문제를 고찰해 보자^[1].

$$E\|X_i - g(Y_i)\|^2 \quad (31)$$

식 (31)의 MSE는 잘 알려진 바와 같이 $g(y) = E\{X_i | Y_i = y\}$ 일 때 최소가 된다. 그러므로

$$E\|X_i - g(Y_i)\|^2 \leq E\|X_i - Y_i\|^2 \quad (32)$$

이 성립된다. 여기서 $E\|X_i - Y_i\|^2$ 는 본 논문에서 관심을 가지고 있는 값이다. 그러므로 당연히 $E\{X_i | Y_i = y\}$ 는 Y_i 보다 X_i 를 더 잘 예측한다고 말할 수 있다. 만일 Y_i 가 X_i 의 좋은 예측이라 한다면 당연히 $g(Y_i)$ 는 더 좋은 예측이 된다. 이는 Y_i 가 양수일 때의 $g(Y_i)$ 의 원소들의 적분값들의 합이 같은 부호인 양수가 되고 음수일 때도 마찬가지로 같은 부호를 가진다고 하는 것을 정당화시킬 수 있다. 따라서 이는 식 (29)의 관계를 얻기 위한 또 다른 충분 조건이 될 수 있다.

식 (29)에서 고찰한 바와 같이 μ 배율된 입방체 μL_i 에 투영함으로 양자화 왜곡값을 줄일 수 있음을 증명하였다. 그런데 $\delta'_i(\mu)$ 의 최소값과 μS_i 에 투영시의 왜곡값인 $\delta_i(\mu)$ 의 최소값과의 상호 관계는 전적으로 조인트 확률 분포 함수 F_{X_i, Y_i} 에 연관되어 있으므로 어떠한 방법이 MSE를 최소화 시킨다고는 말할 수가 없다. 따라서 실시간 구현이 용이한 μL_i 에로의 투영 기법을 사용하는 것이 보다 타당하리라 사료된다.

IV. 입방체로의 투영에서 최적 μ 값을 찾기 위한 범위 결정

본 장에서는 앞 장에서 언급한 최적의 배율 집합 $\{\mu_i^*\}$ 를 찾는 것에 대해서 논하였다.

i 번째 투영된 평균 왜곡값 $\delta'_i(\mu_i)$ 는 다른 μ 값($l \neq i$)과는 무관하고 μ_i 에만 관련되어 있으므로 최적 μ_i 를 각각의 S_i 에서 독립적으로 찾아 나가면 집합 $\{\mu_i^*\}$ 를

구할 수 있다. 그러나 조인트 확률 분포 함수인 F_{X_i, Y_i} 는 영상 처리와 같은 응용 분야에서 일반적으로 잘 알려져 있지 않다. 그러므로 훈련 집합(TS: training set)이나 검증 집합(VS: validating set)을 사용하여 μ_i 의 최적값이 존재할 만한 범위내에서, μ_i 를 변화시키면서 $\delta'_i(\mu_i)$ 가 최소가 되는 배율 계수를 찾는 방법이 있다. 구조적 부호책을 가지고 있지 않은 VQ에서는 각 Voronoi 영역의 크기가 일정치 않으므로 μ_i 의 범위 설정이 쉽지는 않다.

그러면 μ_i 의 범위를 구하는 방법에 대해 논해 보자. 먼저, $\delta'_i(\mu_i)$ 를 d_i 보다 줄이기 위해서는 μ 값은 양수가 되어야 한다. 그리고 μ_i 의 상한 경계값은 다음과 같다. 모든 $x \in S_i$ 와 $y \in R$ 에 대해

$$\|x - c_{S_i}(y)\|^2 \leq \|x - c_{\mu_i L_i}(y)\|^2, \quad \mu_i \geq \mu_i^* \quad (33)$$

가 만족되므로

$$\delta_i(1) \leq \delta'_i(\mu_i^*) \quad (34)$$

이 성립된다. 여기서 $\mu_i^* = \inf_{\mu L_i \supset S_i} \mu$ 이다. 또한 $\mu_i \geq \mu_i^*$ 에서 $\delta'_i(\mu_i) \geq \delta'_i(\mu_i^*)$ 이므로 최적의 μ_i^* 는 반드시 $(0, \mu_i^*)$ 영역에 놓여야 한다. 이제 어떤 S_i 에 대해 VQ 설계에 사용한 TS로 μ_i^* 를 간단히 찾아 보자. 먼저, 부호단어 \hat{x}_i 와 S_i 에 속한 훈련 벡터 간의 maximum norm을 구하자. 그러면 그 중에서 가장 큰 maximum norm값이 μ_i^* 를 근사하는 것이 된다. 다시 설명하면 $\{z_i\}$ 을 훈련 벡터라 할 때,

$$\mu_i^* \approx \max_{z_i \in S_i} \|\hat{x}_i - z_i\|_\infty \quad (35)$$

식을 얻을 수 있다. 이 식에서 maximum norm은 $\|\hat{x}_i - z_i\|_\infty = \max\{|\hat{x}_{i,j} - z_{i,j}|\}$ 이며 $z_i = (z_{i,1}, \dots, z_{i,k})^T \in R^k$ 이다.

V. 모의 실험 결과

본 장에서는 제안한 입방체로의 투영에 대한 이론을 실험적으로 확인하기 위해 공간 영역에서 벡터 양자화된 영상을 사용하여 투영해 보았다. 공간 영역에서의 VQ는 영상을 4×4 의 여러 작은 블록으로 나누

고 이를 $k=16$ 의 원소를 가지는 벡터로 구성하여 수행하였다. VQ 부호책의 설계는 서로 다른 다섯 장의 영상을 TS로 하여 설계하였고 최적 배율 집합 $\{\mu_i^*\}$ 도 구하였다. 구체적인 설계 과정은 다음과 같다. 먼저 GLA(generalized Lloyd algorithm)^[3]를 사용하여 TS를 군집화하여 1024개의 부호단어를 가지는 부호책을 설계하였다. 이렇게 만든 부호책으로 TS를 다시 양자화하고 다음과 같은 3×3 의 선형 저역 통과 여과기^[4]로 양자화된 영상을 여과시킨다. 3×3 여과기의 kernel은

$$h(i, j) = h_a(i) h_a(j), \quad i, j = -1, 0, 1 \quad (36)$$

인데 여기서 $h_a(-1) = h_a(1) = 0.2741$ 이며 $h_a(0) = 0.4529$ 이다.

이렇게 여과된 영상의 각 화소들을 그에 해당되는 입방체로 투영시키면서 최적의 집합 $\{\mu_i^*\}$ 를 찾는 데, 먼저 i 번째 Voronoi 영역에서 식 (35)로부터 μ_i 의 상한 경계치 μ_i^u 를 구하여 최적의 μ_i 가 존재하는 범위를 얻은 뒤에 이 범위 안에서 μ_i 를 변화시키면서 $\delta_i(\mu_i)$ 가 최소가 되는 μ_i 를 찾는다. 이때 $\delta_i(\mu_i)$ 는 TS를 사용하여 시간 평균값(time-average)으로 근사하여 구하였다^[4]. 그림 4에는 어떤 두 개의 부호단어에서 μ_i 값에 대한 $P_i \delta_i(\mu_i)$ 곡선을 도시하였다. μ_i 가 0에서 증가함에 따라 a_i 에서 출발하여 감소하기 시작하다가 다시 증가하게 된다. TS에 포함되지 않은 LENA와 BABOON을 각각 다른 VS로 하여 설계된 부호책과 $\{\mu_i^*\}$ 의 성능을 검증하였다. TS 내에 LENA나 BABOON과 같은 성격(통계적 특성)을 가진 데이터가 포함되어 있어야만 LENA나 BABOON에 적합한 부호책 설계가 가능하므로^[4], 본 모의 실험에서는 TS로 사용된 영상에 그러한 성격이 포함되어 있다고 가정하고 설계된 부호책과 $\{\mu_i^*\}$ 를 두 가지 VS로 검증하였다. 표 1에는 TS와 각각의 VS에 대해 벡터 양자화했을 때 그리고 VQ된 영상을 여과하였을 때 그리고 이렇게 여과된 영상을 제안한 입방체로 구성된 제약 집합으로 투영했을 때의 PSNR을 각각 정리하였다. 이때 PSNR은 다음 식으로 구해진다.

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \frac{M \cdot 255^2}{\sum_j (x_j - y_j)^2} \text{ dB} \quad (37)$$

표 1. 입방체로 투영된 영상의 PSNR (dB).

Table 1. PSNR's of the images that are projected onto the hyper-cubes (dB).

$k=16, N=1024, \text{TS size}=81,920 \text{ vectors.}$

Images	VQ	Filtered	Projected
TS	30.17	29.56	30.30
LENA	31.65	31.77	31.98
BABOON	23.75	23.07	23.74

이 식에서 $\{x_j\}$ 는 원 영상, $\{y_j\}$ 는 처리된 영상이다.

제 III장에서 분석한 바와 같이 표 1에서 TS의 경우는 입방체로의 투영으로 0.13 dB가 증가함을 알 수 있다. LENA 영상은 가장자리 성분이 BABOON보다 적은 경우로 식 (36)의 간단한 여과로도 블러화 현상을 어느 정도 완화시킨다. 즉 (36)의 여과가 식 (18) 이하의 가정에 부합된다고 할 수 있는데 여과 과정만으로 PSNR이 0.12 dB 정도 증가되었음을 알 수 있으며 입방체로의 투영 후 결국 0.33dB 증가하였다. 또한 LENA는 TS의 평균적인 영상보다 가장자리 성분이 많은 편으로 $\{\mu_i^*\}$ 의 값들을 일률적으로 2 정도 크게 해줄 때 32.23dB로 커지는데 이는 식 (28)의 여과기가 잘 작동된다는 것을 의미한다. 한편 BABOON은 가장자리 성분을 상당히 많이 가지고 있는 경우로 식 (36)의 간단한 여과기는 원 영상의 가장자리 성분까지 상하게 만들므로 표 1에서 보는 바와 같이 0.68 dB의 PSNR 감소가 있으며 투영으로 어느 정도 보완됨을 알 수 있다. 또한 LENA의 경우와는 반대로 $\{\mu_i^*\}$ 의 값들을 일률적으로 1 정도 줄일 때 23.76 dB로 PSNR이 증가된다.

최소값이 얻어지는 $\{\mu_i^*\}$ 를 최대값 μ_i^u 를 기준으로 백분율로 환산하여 나타낸 dots 분포도를 그림 5에 제시하였는데 약 15% 이내에 모두 몰려 있음을 알 수 있다. 이러한 현상은 스칼라 양자화의 경우에도 관찰이 되는 것으로^[20, 21] 좁은 입방체로 투영을 해야 한다는 결론이 나온다. 그러나 표 1의 실험에서 LENA의 경우 여과만으로도 PSNR이 올라가는 것은 [21]에서 전송률이 낮은 경우에 대해 언급한 바와 같이 좁은 입방체 외부로 벗어난 데이터가 거의 없으므로 투영할 데이터가 없다는 것을 의미하기도 한다. 또한 한 부호책의 각 부호단어에 해당되는 Voronoi 영역의 크

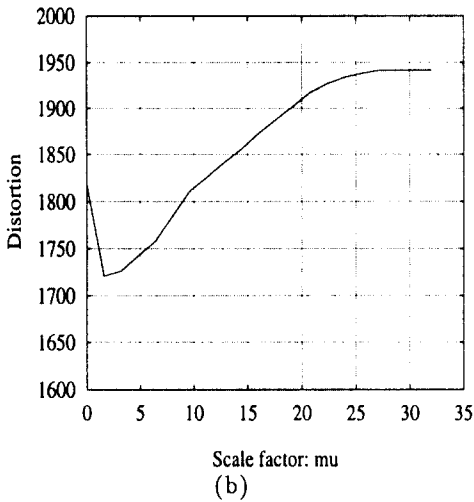
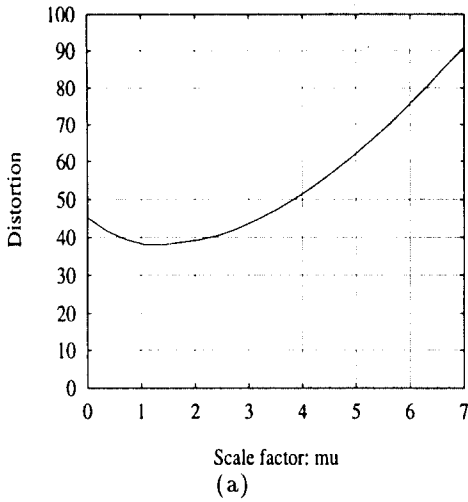


그림 4. 부분 투영된 평균 왜곡 $P_i \delta_i(\mu_i)$.

(a) 1번째 부호단어, $\mu_1^* = 7.0$.

(b) 38번째 부호단어, $\mu_{38}^* = 32.0$.

Fig. 4 Partial projected average distortions $P_i \delta_i(\mu_i)$.

(a) The 1st codeword, $\mu_1^* = 7.0$.

(b) The 38th codeword, $\mu_{38}^* = 32.0$.

기는 다양하므로 여과를 통해서 Voronoi 영역을 벗어나는 데이터가 많은 영역이 있는 반면 그 크기가 큰 경우에는 거의 벗어나는 경우가 드물다. 이에 대한 보다 구체적인 실험과 토론은 참고 문헌 [20]이나 [21]을 참조하기 바란다.

POCS 이론 또는 제약 최소화 기법에 기초한 반복

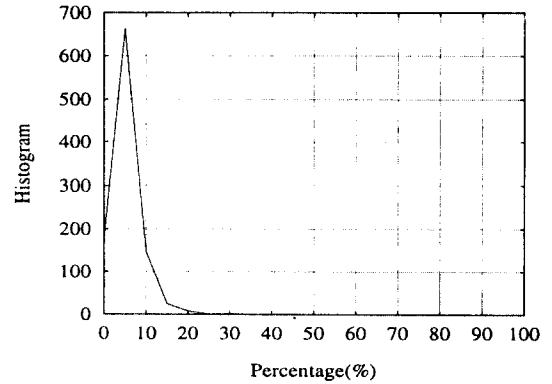


그림 5. μ_i^* 의 백분율 값 뜻수 분포도.

Fig. 5 Histogram of μ_i^* 's in percentage.

알고리즘은 앞에서 언급한 여과와 투영 과정을 반복 해서 수행되는 것으로 최적 $\{\mu_i^*\}$ 는 매 반복 때마다 구해야 되는데 반복 알고리즘이 진행되면서 $\{\mu_i^*\}$ 가 그리 많이 변하지 않음을 알 수 있다. 따라서 처음에 구한 집합 $\{\mu_i^*\}$ 만을 사용하여 반복 알고리즘을 구현할 수 있다. 그런데 이러한 반복 알고리즘의 수렴 특성을 보면 QCS에 기초한 알고리즘에서 스칼라 양자화의 경우와 마찬가지로 초기 영상이 항상 Voronoi 영역의 무게 중심이므로 한 번의 여과 과정 또는 그 다음의 투영에서 얻어지는 영상이 수렴된 영상에 거의 근접해 있다^[20, 21]. 결국 계산 시간과 성능을 고려해 볼 때 반복해서 수행할 필요가 없다는 이야기가 되며, 따라서 수렴을 위한 POCS 또는 제약 최적화 이론, 그리고 이에 수반되는 여러 조건들이 필요없다.

VI. 결 론

본 논문에서는 MSE를 최소화시킨다는 관점에서 임의의 형태를 가지는 양자화 영역으로의 투영을 이론적으로 고찰해 여과된 데이터가 양자화 영역을 벗어나 있는 경우에는 양자화 영역보다 좁은 영역으로 투영하면 왜곡값을 더 줄일 수 있다는 사실을 보였다. 또한 임의의 형태를 가지는 벡터 양자화 영역으로의 난해한 투영 대신에 단순한 μ 배율된 입방체로의 투영을 제안하였다. 입방체로의 투영은 벡터의 각 원소를 서로 독립적으로 투영시켜 주기만 하면 되므로 실시간 VLSI 구현이 가능하다. 더불어 여과 과정을

거친 데이터와 원 영상 간의 조인트 pdf에 대한 단순한 충분 조건을 제안하였으며, 이때 μ 배율된 입방체로의 투영이 양자화 왜곡을 후처리 이전보다 더 낮출 수 있다는 사실을 이론적 분석으로 보였다. 이러한 사실은 벡터 양자화된 실제 영상에의 모의 실험을 통해서도 확인해 보았다. 그런데 QCS나 제안된 입방체로 구성된 제약 집합의 무게 중심이 QCS에 기초한 반복 알고리즘에서는 항상 초기 영상이 되므로 반복 알고리즘의 수렴이 매우 빠르게 이루어진다. 전송률이 낮은 경우에는 QCS로의 투영 과정 없이 한 번의 여과 과정만으로도 수렴하게 되며^{11, 18} 그렇지 않은 경우라도 QCS의 경계에 바로 수렴하게 된다. 그러나 원 영상은 QCS의 경계보다는 그 내부에 있는 경우가 지배적이므로 제안된 μ 배율된 입방체로의 투영이 보다 유리함을 알 수 있다. 그러므로 본 논문에서는 VQ의 경우에도 [20]에서 언급한 바와 같이 반복적 알고리즘 대신에 비반복 여과와 μ 배율된 입방체로의 투영 과정만으로 구성되는 비반복 알고리즘으로 단순화가 가능하다는 결론을 내릴 수 있다. 이는 반복 알고리즘의 수렴을 위한 POCS 이론 또는 제약 최적화 이론과 이로부터 요구되는 여러 조건들이 필요 없다는 사실을 의미한다. 이러한 비반복 형태의 알고리즘은 적용하려 하는 부호화 기법에 따라서 구체적인 알고리즘들이 제안되고 연구되어야 할 것이다.

부록: 식 (10)의 증명

식 (7)의 정의로부터 어떤 값 $0 < \epsilon < 1$ 에 대해

$$\begin{aligned} & \delta_f(1) - \delta_f(1 - \epsilon) \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \int_{S_i} [\|\mathbf{x} - c_{S_i}(\mathbf{y})\|^2 - \|\mathbf{x} - c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y})\|^2] dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \left[\int_{(1-\epsilon)S_i} + \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} + \int_{\mathbf{R}^d - S_i} \right] \\ & \quad \int_{S_i} [\|\mathbf{x} - c_{S_i}(\mathbf{y})\|^2 - \|\mathbf{x} - c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y})\|^2] dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \int_{(1-\epsilon)S_i} \int_{S_i} [\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2] dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & \quad + \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} \int_{S_i} [\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y})\|^2] dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_{\mathbf{R}^d - S_i} \int_{S_i} [\|\mathbf{x} - c_{S_i}(\mathbf{y})\|^2 - \|\mathbf{x} - c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y})\|^2] dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} \int_{S_i} [\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y})\|^2] dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & \quad + \int_{\mathbf{R}^d - S_i} \int_{S_i} [\|\mathbf{x} - c_{S_i}(\mathbf{y})\|^2 - \|\mathbf{x} - c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y})\|^2] dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \tag{A1}$$

로 전개된다. 마지막 등호식의 첫 번째 항은 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} \int_{S_i} [\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2 - 2(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i)^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_i) + \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2 \\ & \quad - (\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2 - 2(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i)^T (c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - \hat{\mathbf{x}}_i) \\ & \quad + \|c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2)] dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} \int_{S_i} [2(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i)^T [c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}] + \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2 \\ & \quad - \|c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2] dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \tag{A2}$$

$\mathbf{y} \in S_i - (1-\epsilon)S_i$ 에서 $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2 \geq \|c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2$ 의 관계식과 $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i)^T [c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}] \geq -\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\| \|c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\|$ 의 관계식으로부터 부등식

$$\begin{aligned} & \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} \int_{S_i} [2(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i)^T [c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - \hat{\mathbf{y}}] + \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2 \\ & \quad - \|c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - \hat{\mathbf{x}}_i\|^2] dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & > 2 \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} \int_{S_i} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i)^T [c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}] dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & > -2 \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} \int_{S_i} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\| \|c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\| dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & > -2 \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} \int_{S_i} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\| (1 - \epsilon) \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_i\| \\ & \quad dF_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ & > -\epsilon M \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} dF_{\mathbf{y}} \end{aligned} \tag{A3}$$

를 얻는다. 여기서 $M = 2 \max_{\mathbf{y} \in S_i - (1-\epsilon)S_i, \mathbf{x} \in S_i} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\| \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}_i\|$ 이다.

한편, 어떤 값 $\mathbf{x} \in S_i$ 와 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k - S_i$ 에서, a 는 $\|\mathbf{x} - c_{S_i}(\mathbf{y})\|$, θ 는 벡터 $\mathbf{x} - c_{S_i}(\mathbf{y})$ 와 $c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - c_{S_i}(\mathbf{y})$ 간의 각도라고 하고, b 는 $\|\hat{\mathbf{x}}_i - c_{S_i}(\mathbf{y})\|$, γ 는 벡터 $\hat{\mathbf{x}}_i - c_{S_i}(\mathbf{y})$ 와 $c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - c_{S_i}(\mathbf{y})$ 간의 각도라고 하자. 여기서 $0 \leq \cos \theta \leq 1$ 이며 $0 \leq \cos \gamma \leq 1$ 이 성립된다. 또한 a 와 θ 는 \mathbf{x} 와 \mathbf{y} 의 함수이며 b 와 γ 는 \mathbf{y} 의 함수이다. 그러면 식 (A1)의 마지막 식의 두 번째 항에서

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x} - c_{S_i}(\mathbf{y})\|^2 - \|\mathbf{x} - c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y})\|^2 \\ &= a^2 - \|\mathbf{x} - c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y})\|^2 \\ &= \|c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - c_{S_i}(\mathbf{y})\| [2a \cos \theta - \|c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y}) - c_{S_i}(\mathbf{y})\|] \\ &= \epsilon b \cos \gamma (2a \cos \theta - \epsilon b \cos \gamma) \end{aligned} \quad (A4)$$

가 만족되므로, 두 번째 항은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^k - S_i} \int_{S_i} [\|\mathbf{x} - c_{S_i}(\mathbf{y})\|^2 - \|\mathbf{x} - c_{(1-\epsilon)S_i}(\mathbf{y})\|^2] dF_{\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \epsilon \int_{\mathbf{R}^k - S_i} \int_{S_i} b \cos \gamma (2a \cos \theta - \epsilon b \cos \gamma) dF_{\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\triangleq \epsilon \xi(\epsilon) \end{aligned} \quad (A5)$$

$\xi(\epsilon)$ 는 $\epsilon \rightarrow 0$ 함에 따라 증가한다. 그리고 $(\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k - S_i)$ 에서 $c_{S_i}(\mathbf{y})$ 는 S_i 의 closure의 경계에 있는 값이며 $F_{\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i}$ 가 연속이므로 당연히 $(0, 1)$ 에 존재하는 어떤 ϵ 에 대해서

$$\epsilon \xi(\epsilon) > 0 \quad (A6)$$

이 성립한다.

이제 식 (A1)은 식 (A3)과 (A5)로부터 다음과 같은 부등식을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \delta_i(1) - \delta_i(1-\epsilon) &> -\epsilon M \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} dF_{\mathbf{V}_i} + \epsilon \xi(\epsilon) \\ &= \epsilon [\xi(\epsilon) - M \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} dF_{\mathbf{V}_i}] \end{aligned} \quad (A7)$$

그러므로

$$\epsilon [\xi(\epsilon) - M \int_{S_i - (1-\epsilon)S_i} dF_{\mathbf{V}_i}] > 0 \quad (A8)$$

을 만족시키는 ϵ 값이 존재함을 알 수 있다. 이는 $(0,$

$1)$ 에 존재하는 어떤 ϵ 에 대해서 부등식 $\delta_i(\mu) - \delta_i(1)$ 이 성립한다는 것을 의미한다.

참고 문헌

1. A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, New York: McGraw-Hill, Inc., 1991, 3rd. ed.
2. S. P. Lloyd, "Least squares quantization in PCM," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, no. 2, pp. 129-137, 1982.
3. Y. Linde, A. Buzo, and R. M. Gray, "An algorithm for vector quantizer design," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-28, pp. 84-95, Jan. 1980.
4. D. Youla and H. Webb, "Image restoration by the method of convex projections: Part I-theory," *IEEE Trans. Medical Imaging*, vol. MI-1, no. 2, pp. 81-94, Oct. 1982.
5. D. Pearson and M. Whybray, "Transform coding of images using interleaved blocks," *IEE Proceedings*, vol. 131, no. 8, pp. 466-472, Aug. 1984.
6. P. Farrelle and A. Jain, "Recursive block-coding-a new approach to transform coding," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-34, no. 2, pp. 161-179, Feb. 1986.
7. B. Ramamurthi and A. Gersho, "Nonlinear space-variant post-processing of block coded images," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-34, no. 5, pp. 1258-1267, Oct. 1986.
8. D. S. Kim and S. U. Lee, "Image vector quantizer based on a classification in the DCT domain," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-39, no. 4, pp. 549-556, Apr. 1991.
9. J. W. Kim and S. U. Lee, "A transform domain classified vector quantizer for image coding," *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, vol. CASVT-2, no. 1, pp. 3-14, Mar. 1992.
10. R. Rosenholtz and A. Zakhor, "Iterative procedures for reduction of blocking effects in transform image coding," *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, vol. CASVT-2, no.

- I, pp. 91-95, Mar. 1992.
11. Y. Yang, N. P. Galatsanos, and A. K. Katsaggelos, "Regularized reconstruction to reduce blocking artifacts of block discrete cosine transform compressed images," *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, vol. CASVT-3, no. 6, pp. 421-432, Dec. 1993.
 12. S. J. Reeves and S. L. Eddins, "Comments on iterative procedures for reduction of blocking effect in transform image coding," *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, vol. CASVT-3, no. 6, pp. 439-440, Dec. 1993.
 13. S. H. Park and Y. Yashima, "Iterative reduction of blocking artifacts in transform coding by using a narrow quantization constraint," in *Proc. 1994 ITE Annual Convention*, pp. 201-202, Japan, 1994.
 14. Y. Yang, N. P. Galatsanos, and A. K. Katsaggelos, "Projection-based spatially adaptive reconstruction of block-transform compressed images," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. IP-4, no. 7, pp. 896-908, July 1995.
 15. D. S. Kim and S. H. Park, "Projection onto the narrow quantization constraint set for postprocessing of scalar quantized images," in *Proc. SPIE VCIP'96 Symposium*, pp. 1473-1483, Orlando, USA, March 1996.
 16. 김동식, 박섭형, "양자화 제약 집합에 여과된 테이터를 투영하는 기법의 이론적 고찰," 한국통신학회 논문지, 제 21권, 제 7호, pp. 1685-1695, 1996년 7월.
 17. S. H. Park, D. S. Kim, and J. S. Lee, "Projection onto the narrow vector quantization constraint set for postprocessing of vector quantized images," in *Proc. IEEE ICIP'96*, vol. II of III, pp. 57-60, Lausanne, Switzerland, Sep. 1996.
 18. H. Paek and S. U. Lee, "A projection-based post-processing technique to reduce blocking artifact using a priori information on DCT coefficients of adjacent blocks," in *Proc. IEEE ICIP'96*, vol. II of III, pp. 53-56, Lausanne, Switzerland, Sep. 1996.
 19. D. S. Kim, T. Kim, and S. U. Lee, "On testing trained vector quantizer codebooks," to be published in *IEEE Trans. Image Processing*, 1996.
 20. S. H. Park and D. S. Kim, "Theory of projection onto narrow quantization constraint set and its application," submitted to *IEEE Trans. Image Processing*, 1996.
 21. 박섭형, 김동식, 이상훈, "협 양자화 제약 조건을 이용한 부호화된 영상의 후처리," 한국통신학회 논문지, 제22권 제4호, 1997년 4월.

김 동 식(Dong Sik Kim)	정회원
현재: Purdue University Post Doctor 연구원	
한국통신학회논문지 제21권 제7호 참조	
박 섭 형(Seop Hyeong Park)	정회원
한국통신학회논문지 제21권 제7호 참조	
이 종 석(Jong Seok Lee)	정회원
한국통신학회논문지 제20권 제12호 참조	