⊠응용논문

비모수적 근사를 이용한 수정된 정기검사정책의 결정 *

정해성
서원대학교 응용통계학과

Determination of the Modified Periodic Inspection Policy Using Nonparametric Approximation

Hai Sung Jeong
Dept. of Applied Statistics, Seowon University

Abstract

A modified periodic inspection policy is examined. It is troublesome to know the life distribution and burdensome to compute an optimum planned inspection time numerically as well. A nonparametric approximation is used so that equations for the optimum inspection time are expressed as closed forms. To show that the approximation can be used in practice, simulations are conducted in the case of Weibull failure times.

1. 서론

거의 모든 시스템들은 어떤식으로든 보전(maintenance)을 거치면서 작동되도록 디자인된다. 보전이란 청소와 같이 일상적으로 실시되는 것으로부터 부분적인 수리라든가 부품교환, 나아가서는 사전에 세워진 계획아래 행해지는 조정과 같이 시스템의 기능회복을 위해 실시되는 모든 작업의 총칭이다. 보전정책(maintenance policy)은 주어진 간격으로 고장여부를 점검하여 보전을 할 것인지 여부를 결정하는 검사정책(inspection policy), 주어진 간격으로 부품을 교환하거나 상태를 바로잡는 등 검사없이 보전하는 교체정책(replacement policy) 그리고 이 두가지를 병용하는 정책 등 3종류가 있다.

* 이 논문은 1996년도 서원대학교 응용과학연구소 연구비 지원에 의한 연구 결과임.

이 연구는 검사정책에 관한 것으로 기존의 연구들의 문제점인 수명분포(life distribution)의 가정과 검사정책 결정과정의 복잡성을 해결하여 현장에서 편리하게 사용할 수 있는 검사정책을 제공할 것이다.

이 연구에서의 가정은 다음과 같다.

1) 시스템의 고장은 검사에 의해서만 알 수 있다.
2) 검사자체에 걸리는 시간은 시스템의 수명에 비해 무시할 수 있을 정도로 작다.
3) 고장은 한 번의 검사에 의하여 오류없이 탐지된다.

사용되는 기호의 정의는 다음과 같다.

$F(t)$ 시스템의 수명분포함수,

$f(t)$ 시스템의 수명확률밀도함수,

μ 시스템의 평균수명,

c_1 1회당 검사비용,

c_2 고장방치로 인하여 수반되는 단위시간당 비용,

τ c_1/c_2 .

2. 여러가지 검사정책들

2.1 비정기 검사정책

k번째 검사시점을 x_k, $k=1,2,\cdots$(단, $x_0=0$)라 할 때 고장이 k번째 검사에서 발견되는 경우, 고장발견 때까지의 검사비용은 다음과 같다.

비용 $= c = k\cdot c_1 + c_2(x_k - t)$, 여기서 t는 고장시간.

Barlow와 Proschan(1965)는 고장발견 때까지의 기대검사비용

$$C = \sum_{k=o}^{\infty}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[(k+1)c_1 + c_2(x_{k+1}-t)]\,dF(t)$$

를 최소로 하는 검사일정 $\underline{x}=\{x_1, x_2, \cdots\}$을 다음과 같이 구했다.

$\dfrac{\partial C}{\partial x_k}=0$, $k=1,2,\cdots$으로부터, 축차식

$$x_{k+1}-x_k = \frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{f(x_k)} - \tau \qquad (1)$$

을 얻은 후 x_1의 초기값이 주어지면 아래와 같은 과정을 통해 최적검사일정을 구한다.

1) 식 (1)을 이용하여 $x_2, x_3, \cdots$를 구한다.
2) $(x_{k+1} - x_k) > (x_k - x_{k-1})$인 k가 있으면 현재의 x_1을 감소시키고, $x_2, x_3, \cdots$를 다시 구한다.
3) $(x_{k+1} - x_k) < 0$인 k가 있으면 현재의 x_1을 증가시키고, $x_2, x_3, \cdots$를 다시 구한다.

Keller(1974)는 검사비용이 상대적으로 작아서 검사가 자주 이루어질 때, t시점에서의 단위시간당 검사회수(이하 검사비율) $n(t)$를 정의하여 다음과 같은 검사일정을 제안하였다.

$$x_{k+1} = x_k + n(x_k)^{-1}, \quad (k = 0, 1, \cdots)$$

Kaio와 Osaki(1984)는 Keller(1974)의 검사비율 $n(t)$를 이용하여 고장발견 때까지의 기대검사비용을 최소로 하는 검사일정을 다음과 같은 방법을 이용하여 찾을 것을 제안하였다.

$$k = \int_0^{x_k} n(t)\,dt, \qquad k = 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

여기서 $n(t) = \{\frac{\lambda(t)}{2\tau}\}^{1/2}$, 단, $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ 즉, 고장률함수이다.

2.2 정기검사정책

비정기검사정책은 비용효과면에서는 최적이지만 검사시점을 찾는 절차가 꽤 복잡할 뿐만 아니라, 현장에서 적용하기가 어렵다. 따라서 정기검사정책이 현실적으로 필요하게 된다. 정기적인 검사간격 I를 유지하는 정기검사정책에서 고장발견 때까지의 기대비용 $C(I)$는 다음과 같다.

$$C(I) = \sum_{k=o}^{\infty} \int_{kI}^{(k+1)I} [c_1(k+1) + c_2\{(k+1)I - t\}]\,dF(t) \tag{3}$$

이 기대비용을 최소로 하는 정기검사간격 I^*는 다음 식의 해로 구할 수 있다(Munford (1981)).

$$\frac{f(0)}{6} I^3 + \{\frac{1}{2} + \frac{f(0)}{12} \tau\} I^2 - \tau\mu = 0$$

특히 $f(0) = 0$일 때, 위의 식의 해는 아래와 같이 간명하게 표현될 수 있다.

$$I^* = (2\mu\tau)^{1/2} \tag{4}$$

Nakagawa와 Yasui(1979)는 다음과 같은 $F(t)$의 근사성질 즉,

$$F(y+kI) = F(kI) + (y/I)\{F(kI+I) - F(kI)\},\ 0 \le y < I \tag{5}$$

을 가정하여 식 (3)과 같은 기대비용을 최소로 하는 정기검사간격이 식 (4)와 같음을 보였다.

2.3 수정된 정기검사정책

정기검사정책은 현실적으로 유용하나 비용효과면에서 비정기검사정책에 크게 뒤진다. Senna와 Shahani(1986)는 정기검사정책을 비용효과면에서 크게 개선시킬 수 있는 수정된 정기검사정책 - 첫 번째 검사시점 I_1을 먼저 잡아주고 그 이후에는 검사간격 I를 일정하게 유지하는 정책 - 을 제안하고 와이블분포에서의 고장발견 때까지의 기대비용을 최소로 하는 검사간격 (I_1^S, I^S)을 탐색적으로 구했다.

3. 비모수적 근사를 이용한 수정된 정기검사정책

수정된 정기검사정책은 비용효과면에서 정기검사정책보다 효율적이지만 Senna와 Shahani(1986)의 탐색적 방법은 시스템의 수명분포를 알고 있어야 할 뿐만 아니라 최적검사 시점을 구하기까지의 절차가 매우 번거롭다는 문제점이 있다. 따라서 최적검사시점 결정과정이 간단한 비모수적 방법이 요구되어진다. 수정된 정기검사정책에서 첫번째 검사시점을 I_1, 그 이후의 검사간격을 I이라 할 때 고장발견 때까지의 기대비용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C(I_1, I) &= c_1\Big[\int_0^{I_1} dF(t) + \sum_{k=o}^{\infty}\int_{I_1+kI}^{I_1+(k+1)I}(k+2)\,dF(t)\Big] \\ &\quad + c_2\Big[\int_0^{I_1}(I_1-t)\,dF(t) + \sum_{k=o}^{\infty}\int_{I_1+kI}^{I_1+(k+1)I}\{I_1+(k+1)I-t\}\,dF(t)\Big] \end{aligned} \tag{6}$$

우리는 기대비용을 최소화하는 검사간격 (I_1^A, I^A)를 식 (5)와 유사한 $F(t)$의 다음과 같은 근사성질을 가정하여 구할 것이다. 즉,

$$F(y+I_1+kI) = F(I_1+kI) + (y/I)\{F(I_1+kI+I) - F(I_1+kI)\}, \; 0 \le y < I$$

으로부터

$$\sum_{k=o}^{\infty} \int_{I_1+kI}^{I_1+(k+1)I} \{I_1+(k+1)I-t\} dF(t) = \frac{I}{2}\{1-F(I_1)\}$$

가 됨을 이용하면 식 (6)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} C(I_1, I) = & \frac{c_1}{I}\left[\int_0^{I_1} F(t)\,dt + \frac{I}{2}\{1-F(I_1)\} - I_1 + I + \mu\right] \\ & + c_2\left[\int_0^{I_1} F(t)\,dt + \frac{I}{2}\{1-F(I_1)\}\right] \end{aligned}$$

첫 번째 검사시점 I_1^A은 Kaio와 Osaki (1984)의 식 (2)를 이용하여 다음식의 해로써 구할 수 있다.

$$\int_0^{I_1^A} \{\frac{\lambda(t)}{2\tau}\}^{1/2} dt = 1 \tag{7}$$

첫 번째 검사시점 I_1^A 이후의 정기검사간격 I^A는 $\dfrac{\partial C(I_1^A, I)}{\partial I} = 0$의 해로써 다음과 같이 구할 수 있다.

$$I^A = \sqrt{2\tau \cdot \frac{\int_0^{I_1^A} F(t)dt - I_1^A + \mu}{1 - F(I_1^A)}} \tag{8}$$

4. 모의실험

가정된 근사법이 실질적으로 유용한가를 보기 위해 시스템의 고장시간이 와이블분포를 따르는 경우에 대하여, Senna와 Shahani(1986)의 탐색적 방법에 의한 검사간격

과 모의실험을 이용하여 이 연구에서 제시한 근사법을 이용한 검사간격을 구해 근사법을 이용한 검사간격의 경험적 편의, 분산, 절대오차, 상대오차를 구하였다.

다음과 같은 와이블분포의 확률밀도함수를 고려하자.

$$f(t) = (\frac{m}{\eta})(\frac{t}{\eta})^{m-1} \exp\{-(\frac{t}{\eta})^{m}\}, \quad m, \eta > 0 \text{ , } t \geq 0$$

우리는 일반성을 잃지않고 척도모수 η = 1로 놓을 수 있다.

Senna와 Shahani (1986)의 탐색적 방법을 적용할 경우 첫 번째 검사시점 I_1^S은 식 (2)로부터

$$I_1^S = \{\frac{\tau(m+1)^2}{2m}\}^{\frac{1}{m+1}}$$

으로 구하고 첫 번째 검사시점 I_1^S이후의 정기검사간격 I^S는 다음 식을 최소화하는 I를 탐색적으로 구함으로써 얻을 수 있다.

$$\tau + I_1 - \Gamma(1+\frac{1}{m}) + (\tau + I)\sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-(I_1 + kI)^m\}$$

이 연구에서 제시한 근사법을 이용한 검사간격 (I_1^A, I^A)을 구하기 위하여, 형상모수 m = 1., 2., 3., 4. 그리고 5.로 변화시키면서 각각의 모수를 갖는 와이블분포로부터 n = 200개의 난수를 1000번 발생시켰으며, τ = .50, .20, .10, .05, .01로 변화시켰다. 와이블분포로부터 발생시킨 n = 200개의 난수 t_i , $i = 1, 2, \cdots, n$ 의 순서 통계량 $t_{(i)}$, $i =$ 1, 2, $\cdots, n$으로부터, 식 (7)의 I_1^A를

$$\int_0^{t_{(i)}} \lambda(u)^{1/2} du \approx \sum_{j=1}^{i} \{\frac{t_{(j)} - t_{(j-1)}}{n+1-j}\}^{1/2} \qquad \text{단, } t_{(0)} = 0 \qquad (9)$$

를 이용하여 구하고, 식 (8)에서는 $F(t_{(i)})$ 를 $\hat{F}(t_{(i)}) = \frac{i}{n}$ 로 또한 μ 은 $\hat{\mu}$ = $\sum_{i=1}^{n} t_i / n$ 로 추정하였으며, 그 사이값은 보간법을 이용하였다.

<표 1>에서는 척도모수 η=1일 경우에 대하여 τ와 형상모수 m의 변화에 따른 검사간격 (I_1^A, I^A)의 편의와 분산을 구했다. 이로부터 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

1) I_1^A와 I^A의 편의는 τ가 작아짐에 따라 점점 작아진다.

2) I^A의 분산은 τ가 작아짐에 따라 점점 작아진다.

3) I_1^A의 분산은 m = 1., 2. 일 때 τ가 작아짐에 따라 점점 작아지고 m = 3., 4., 5.일 때 τ가 작아짐에 따라 점점 커진다.

첫 번째 검사시점을 검사비용이 상대적으로 작을 때의 검사비율 $n(t)$를 이용하여 구했고, 그 이후의 정기검사간격 또한 첫 번째 검사시점에 의존되므로 τ가 작아짐에 따라 검사간격 (I_1^A, I^A)의 편의와 분산이 작아짐이 타당하다. 그러나 m=3., 4., 5.일 때 I_1^A의 분산의 경우는 m이 커짐에 따라 와이블분포의 왼쪽 꼬리부분이 얇아지고 따라서 왼쪽 꼬리부분의 자료수가 적어지고, 또한 τ가 작아짐에 따라 첫 번째 검사시점이 작아짐으로 인하여 비모수적인 방법인 식 (9)의 효율이 떨어지는 것에 기인한다.

< 표 1 > 검사간격 (I_1^A, I^A)의 편의와 분산

τ	m	1.		2.		3.		4.		5.	
		I_1^A	I^A	I_1^A	I^A	I_1^A	I^A	I_1^A	I^A	I_1^A	I^A
.50	편 의	-.1270	-.1413	-.0818	-.1007	-.0599	-.0917	-.0460	-.0885	-.0370	-.0866
	분 산	.0026	.0038	.0010	.0011	.0006	.0007	.0004	.0006	.0002	.0005
.20	편 의	-.0796	-.0607	-.0588	-.0361	-.0446	-.0303	-.0350	-.0314	-.0280	-.0307
	분 산	.0013	.0010	.0008	.0003	.0006	.0002	.0004	.0001	.0003	.0001
.10	편 의	-.0567	-.0312	-.0456	-.0148	-.0352	-.0116	-.0271	-.0109	-.0213	-.0121
	분 산	.0009	.0004	.0008	.0001	.0006	.0001	.0005	.0001	.0004	.0001
.05	편 의	-.0404	-.0161	-.0349	-.0060	-.0267	-.0041	-.0197	-.0034	-.0142	-.0048
	분 산	.0006	.0002	.0007	.0001	.0007	.00004	.0006	.00003	.0005	.00003
.01	편 의	-.0176	-.0035	-.0157	-.0003	-.0078	-.0004	.00003	-.0008	.0066	-.0010
	분 산	.0002	.00003	.0006	.00001	.0009	.00001	.0010	.00001	.0009	.00001

<표 2>에서는 척도모수 η=1일 경우에 대하여 τ와 형상모수 m의 변화에 따른 검사간격 (I_1^A, I^A)의 경험적 절대오차와 상대오차를 구했다. 이로부터 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

1) I_1^A와 I^A의 절대오차는 τ가 작아짐에 따라 점점 작아진다. 단, τ = .01, m = 5.에서 I_1^A의 절대오차의 경우는 제외된다.

2) $\tau \le .10$이고 $m \ge 2.$일 때의 상대오차로부터 이 연구에서의 근사법이 꽤 괜찮다는 것을 알 수 있다. 즉, 이 연구에서 암시적으로 τ는 작은 것으로 가정하였고 보

전정책이 의의를 갖기 위하여 증가고장률(Increasing Failure Rate ; IFR) 수명분포를 가정하는 경우가 많으므로 $\tau \leq .10$이고 $m \geq 2.$는 의미있는 범위가 된다. 이 경우에서의 오차는 대략 8%이내가 된다.

< 표 2 > 검사간격 (I_1^A, I^A)의 경험적 절대오차와 상대오차.

τ	m	1.		2.		3.		4.		5.	
		I_1^A	I^A	I_1^A	I^A	I_1^A	I^A	I_1^A	I^A	I_1^A	I^A
.50	절대오차	.1271	.1416	.0819	.1007	.0600	.0917	.0461	.0885	.0371	.0866
	상대오차	.1271	.1651	.0787	.2042	.0558	.2614	.0421	.3292	.0337	.4046
.20	절대오차	.0800	.0613	.0592	.0363	.0452	.0305	.0357	.0314	.0287	.0307
	상대오차	.1265	.1071	.0772	.0963	.0529	.1029	.0392	.1298	.0303	.1490
.10	절대오차	.0571	.0321	.0468	.0156	.0371	.0123	.0296	.0116	.0239	.0125
	상대오차	.1277	.0771	.0770	.0526	.0517	.0508	.0373	.0557	.0284	.0691
.05	절대오차	.0414	.0174	.0371	.0077	.0307	.0061	.0252	.0055	.0210	.0061
	상대오차	.1308	.0579	.0768	.0339	.0509	.0318	.0366	.0328	.0279	.0406
.01	절대오차	.0191	.0050	.0229	.0025	.0247	.0024	.0250	.0026	.0253	.0027
	상대오차	.1347	.0365	.0811	.0215	.0611	.0239	.0500	.0281	.0440	.0316

5. 연구결과에 대한 기대효과

이제까지의 검사정책에 관한 대부분의 연구는 시스템의 수명분포를 안다는 가정하에 이루어졌을 뿐만 아니라 최적검사일정을 찾기까지의 절차가 간단하지않다. 그러므로 현장에서 이러한 검사정책을 적용하기는 어렵다. 이 연구에서의 근사계산법은 이러한 문제를 극복하여 현장에서 실제 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

[1] Barlow, R.E. and Proschan, F(1965), *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Kaio, N. and Osaki, S.(1984), "Some Remarks on Optimum Inspection Polices," *IEEE Transactions on Reliability* 33, No.4, pp. 277-279.

[3] Keller, J.B.(1974), "Optimum Checking Schedules for Systems Subject to Random Failure," *Management Science* 21, No. 3, pp. 256-260.

[4] Munford, A.G.(1981), "Comparision among Certain Inspection Policies," *Management Science* 27, No. 3, pp. 260-267.

[5] Nakagawa, T. and Yasui, K.(1979), "Approximate Calculation of Inspection Policy with Weibull Failure Times," *IEEE Transactions on Reliability* 28, No.5, pp. 403-404.

[6] Senna, V. and Shahani, A.K.(1986), "A Simple Inspection Policy for the Dection of Failure," *European Journal of Operational Research* 23, No. 2, pp. 222-227.