한국통계학회논문집 제4권 3호
1997년 12월 pp. 765 - 774

반복이 없는 이원배치에서 분포의 동일성 검정에 대한 비모수적 검정법[1)]

이 기 훈[2)]

요 약

본 논문에서는 반복이 없는 이원배치에서 교호작용의 존재를 가정하고 처리수준간의 모집단 분포의 동일성을 검정하는 비모수적 검정법을 제안하였다. 검정통계량의 구성을 위하여 순위벡터를 그 구조의 형태별로 정리한 순위위치벡터를 제안하고, 이의 특성과 응용가능성을 연구하였다. 또한 모의 검정력 연구를 통하여 기존의 비모수적 방법이 갖는 약점과 제안한 통계량의 우수함을 실증하였다.

1. 서 론

$X_{ij}, i=1,\dots,n; j=1,\dots,k$가 연속인 확률분포함수 $F_{ij}(x)=F(x-\beta_i-\tau_j-\gamma_{ij})$에서 얻은 확률표본이라 가정하자. 여기서 β_i는 i블록효과, τ_j는 j처리효과, γ_{ij}는 i블록과 j처리의 교호작용이라 하고, F는 중앙값 μ을 갖는 연속분포함수이다. 이때 우리가 관심을 갖고 검정하고자 하는 가설은 다음과 같다.

$$H_o: \ F_{i1}(x) = F_{i2}(x) = \cdots = F_{ik}(x), \ i=1,\dots,n, \tag{1}$$

$$H_1: \ \text{모든 } i=1,\dots,n\text{에서 } \{F_{i1}(x)=\cdots=F_{ik}(x)\}\text{는 아니다.}$$

일반적으로 이원배치모형에서는 처리효과나 교호작용에 관한 검정을 하지만, 반복이 없는 경우에는 교호작용효과가 오차항과 교락되어 교호작용에 대한 검정은 어려움을 갖고있다. Tukey (1949)가 교호작용의 형태가 product interaction($\gamma_{ij} = i \cdot \tau_j$)일 때, 자유도 1을 분리하여 이를 위한 검정통계량을 제안한 뒤로, Mandel(1961), Johnson & Graybill(1972) 등이 이러한 가정 하에서 모수적 방법을 제안하였다. 그후로 교호작용의 형태를 가정하지 않은 모수적 검정법들이 Milliken & Rasmuson(1977), Milliken & Johnson(1989), Piepho(1994)들에 의해 제안되었으나, 여전히 검출할 수 없는 형태의 교호작용은 존재하였다. 또한 이에 관한 비모수적 방법은 거의 없는데, 그중 rank interaction이라는 개념을 정의하고 이를 검정한 De Kroon & Van der Laan(1981), 라틴스퀘어를 이용한 Wolfe, Dean & Hartlaub(1990)의 방법이 있을 뿐이다. 그런데 이들은 모두 모수적 방법보다도 더 강한 제약조건을 갖는다.

---

1) 본 논문은 1996년도 전주대학교 학술연구비 연구소 지원과제에 의하여 연구되었음.
2) (560-759) 전라북도 전주시 완산구 효자동 전주대학교 응용통계학과 부교수.

또한 처리효과에 관한 비모수검정으로는 블록내 순위(within-block ranks)를 이용한 Friedman (1937), Brown & Mood(1951)의 방법 등이 있고, 블록간 정보(inter-block information)를 이용한 Quade (1979), 적합도 검정을 이용한 Sharma & Wolfe(1992)의 방법 등이 있는데, 이들은 교호작용을 가정하지 않는다.

본 논문의 2장에서는 교호작용의 존재가 처리효과 검정에 어떤 영향을 주는가를 살펴보고, 우리가 제안하는 가설의 검정 형태의 필요성에 대하여 설명하겠다. 3장에서는 순위벡터를 각 순위의 패턴 형태에 따라 분류한 순위위치벡터(rank position vector)에 관하여 논의한다. 4장에서 이에 기초한 검정통계량을 제안하며, 5장에서는 제안한 검정법의 모의 검정력을 살펴보았다.

2. 예 제

반복이 없는 이원배치에서 처리효과를 검정할 때 교호작용은 없다고 가정하지만, 이러한 가정이 위배될 때 처리효과에 대한 검정이 다른 결과를 가져올 수 있다. 또한 처리효과가 없을지라도 교호작용의 존재 때문에 각 처리수준의 모집단의 분포가 다를 수 있지만, 이를 반영하는 검정방법은 존재하지 않고 있다. 다음의 처리수준이 4이고 블록수준이 9인 경우의 예를 들어 교호작용이 처리효과에 어떤 영향을 주는지 설명하겠다. A의 경우 두 개의 처리수준에서 처리효과가 존재하고, B에서는 A의 처리효과와 더불어 각 블록의 모퉁이에서 상승·하강하는 corner interaction이 존재한다고 하자. 이때는 각 블록 내에서 처리수준간 모집단의 분포가 동일하지 않게 되므로 (1)과 같은 가설의 검정이 필요하다.

<표 1> 처리효과와 교호작용의 형태

A: $\tau_1=\tau_4=0,\ \tau_2=\tau_3=1$, $\gamma_{11}=\gamma_{12}=\cdots=\gamma_{94}=0$

처리 / 블록	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	1	1	0
3	0	1	1	0
4	0	1	1	0
5	0	1	1	0
6	0	1	1	0
7	0	1	1	0
8	0	1	1	0
9	0	1	1	0

B: $\tau_1=\tau_4=0,\ \tau_2=\tau_3=1$
$\gamma_{11}=\gamma_{21}=\gamma_{31}=\gamma_{41}=\gamma_{64}=\gamma_{74}=\gamma_{84}=\gamma_{94}=3$
$\gamma_{61}=\gamma_{71}=\gamma_{81}=\gamma_{91}=\gamma_{14}=\gamma_{24}=\gamma_{34}=\gamma_{44}=-3$
나머지 교호작용은 0

처리 / 블록	1	2	3	4
1	3	1	1	-3
2	3	1	1	-3
3	3	1	1	-3
4	3	1	1	-3
5	0	1	1	0
6	-3	1	1	3
7	-3	1	1	3
8	-3	1	1	3
9	-3	1	1	3

<표 2> <표 1> 자료의 가상 블록내 순위표

A

처리 / 블록	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	1	4	3	2
3	1	3	4	2
4	1	4	3	2
5	1	3	4	2
6	2	4	3	1
7	2	3	4	1
8	2	4	3	1
9	2	3	4	1
순위합	13	31	32	14

B

처리 / 블록	1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	4	2	3	1
3	4	3	2	1
4	4	2	3	1
5	1	3	4	2
6	1	3	2	4
7	1	2	3	4
8	1	3	2	4
9	1	2	3	4
순위합	21	23	24	22

<표 2>의 순위표를 보면 굳이 Friedman(1937)과 같은 검정통계량을 계산하지 않더라도 기존의 검정법으로는 A의 경우에 처리효과가 존재하는 것으로, B의 경우에는 서로 상쇄되는 효과로 인하여 처리효과는 없는 것으로 판정될 것이 분명하다. 그러나 직관적으로 B에는 감소하는 순위벡터가 4개의 블록에서, 반대로 증가하는 순위벡터가 4개의 블록에서 나타남으로 교호작용효과가 존재함을 알 수 있다. 이는 블록내의 정보를 개별적으로 인식하지 않고 전체적으로 합하는 기존의 검정방법에 의하여는 정확한 결론을 유도할 수 없음을 의미한다. 본 논문에서는 블록이 갖는 개별적 정보를 이용한 통계량을 제안할 것이고, 이를 위하여 다음절에서 순위벡터를 분류하는 위치벡터의 개념을 소개한다.

3. 순위위치벡터

우리가 검정법의 도구(tool)로 사용할 순위벡터의 분류에 관한 연구는 Kendall(1938)이 순위벡터들의 구조의 연관성에 관심을 가진 후로 여러 분야에서 순위벡터들의 동일성이나 유사성에 따라 분류하는 형태로 계속되어 왔다. 이러한 연구는 순위벡터의 구조에 관한 일반적인 측도를 유도하는 것이 아니고, 어떤 특수한 문제를 해결하기 위하여 순위벡터를 분류하거나 변형하는 기법들이 개발되고 응용되는 형태로 행해지고 있다.

Kendall & Babington(1939)과 Kendall(1970) 등은 동일그룹내의 여러 순위벡터들의 유사성(agreement)에 관한 연구를 하였고, 두 그룹이 각각 여러 개의 순위벡터를 포함할 때, 그룹간 모수벡터들의 유사성에 관한 검정법을 Schucany & Frawley(1973)와 Li & Schucany(1975) 등이 순위합의 순위상관을 이용해 제안하였다. Hollander & Sethurman(1978)은 순열검정(permutation test)을 이용해, 그리고 Costello & Wolfe(1985)는 순위합의 거리개념을 이용해 유사성에 대한 검정법을 제안하였다.

이원배치에서 Kannemann(1976)은 순위벡터를 k×k 분할표(contingency table)로 분류하여 처리

효과에 관한 적합도검정을 실시하였고, Sharma & Wolfe(1992)는 블록내 순위벡터를 거리측도를 통해 분류하여 분포무관검정법을 제안하였다.

기존의 방법들은 순위벡터들의 상관계수나 거리 등을 이용해서 유사군으로 분류하였으나 본 논문에서는 Horn, Lee & Wolfe(1997)의 방법을 이용해 순위벡터의 구조(structure 또는 pattern)를 이용하여 분류하는 방법을 제안한다. 우선 다음과 같은 k개의 원소를 가진 순위벡터를 고려하자.

$$\boldsymbol{R}=(R_1, R_2, \cdots, R_k)$$

이를 (k-1)개의 0 또는 1의 원소를 가진 다음과 같은 위치벡터로 변환한다.

$$\boldsymbol{P}=(P_1, P_2, \cdots, P_{k-1})$$

여기서, $P_m=\begin{cases}1, & \max(R_1, R_2, \ldots, R_m) < \min(R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots, R_k) \text{ 일때}, \\ 0, & \text{그외 경우}.\end{cases} \quad , m=1, \ldots, k-1$

이는 자신의 오른편에 자신과 자신의 왼편보다 작은 값이 없으면 1, 있으면 0이 된다는 의미이다. 또한 1 사이에 떨어지는 값들로 이루어진 부분순위벡터를 축소부분순위벡터(reduced sub-rank vector partition), RSVP ($\boldsymbol{R}$)라 하자. 예를 들어 r=(2 1 3 5 4 6)의 위치벡터는 (0 1 1 0 1)이 되며, 이에 의한 축소부분순위벡터는 RSVP(r)=(2,1), (3), (5,4), (6)이다. 또한 r=(6 1 2 3 4 5)의 위치벡터는 (0 0 0 0 0)이 되며, 이에 의한 축소부분순위벡터는 RSVP(r)=(6 1 2 3 4 5)이다. 즉, 부분순위벡터가 오름차 크기 순서대로 정리되도록 하고, 그러한 묶음이 성립되는 위치에 1을 배치한 것이 위치벡터이다. 위에서 k개 원소의 순위벡터가 (k-1)개의 원소인 위치벡터 값을 갖는 이유는 k번째의 값은 항상 확정적이기 때문이다.

그런데 앞의 축소부분순위벡터를 이용한 분류방법은 오름차순으로만 정리한 것이므로, 위치벡터의 원소가 모두 0이면 단지 증가하지 않는 형태, 즉 이들은 감소 또는 증가도 감소도 아닌 형태를 의미한다. 우리는 증가형태의 패턴 외에도 감소 형태에도 관심이 있으므로, 순위위치벡터가 0벡터인 경우 원래의 순위를 역순으로 정리한 다음, 같은 방법으로 위치벡터를 구하고 (-)부호를 붙인다. 예를 들어 r=(4 3 2 1)의 위치벡터는 (0 0 0)이므로 이를 역순(1 2 3 4)으로 하여 위치벡터를 구하면 -(1 1 1)이 된다. 또한 (2 4 1 3)의 위치벡터는 (0 0 0)이나, 이의 역순(3 1 4 2)도 (0 0 0)이므로 증가도 감소도 아닌 형태로 분류한다. 이렇게 생긴 위치벡터의 수는 증가군 $2^{k-1}-1$, 감소군 $2^{k-1}-1$, 0벡터 1, 모두 2^k-1이 된다. 예를 들어 k=4인 경우에 (001),(010),(011),(100),(101),(110),(111),(000),-(001),-(010),-(011),-(100),-(101),-(110),-(111) 등의 15개의 위치벡터로 분류된다. <표 3>에서 k=3,4,5인 경우에 순위벡터에 대응되는 위치벡터의 값과 개수에 관하여 예시하였다.

4. 적합도 검정통계량

<표 3>에서 각 위치벡터에 대응하는 순위벡터의 수가 매우 불균형적이고, k가 늘어남에 따라 위치벡터의 수가 기하급수적으로 증가함을 알 수 있다. 이는 적합도 검정 등과 같은 실제적인 분석도구의 사용을 어렵게 하기 때문에, 2^k-1개로 나누어진 범주를 좀더 적은 수의 범주로 분류, 정리하는 작업이 필요하다.

<표 3> 순위벡터에 대응하는 위치벡터 (k=3, 4, 5)

위치벡터*	순위벡터의 경우의 수	순위벡터 증가군	순위벡터 감소군
		k=3	
0 0	0		
0 1	2	213	312
1 0	2	132	231
1 1	2	123	321
		k=4	
0 0 0	2	3142	2413
0 0 1	6	2314 3124 3214	4123 4213 4132
0 1 0	2	2143	3412
0 1 1	2	2134	4312
1 0 0	6	1342 1423 1432	2341 3241 2431
1 0 1	2	1324	4231
1 1 0	2	1243	3421
1 1 1	2	1234	4321
		k=5	
0 0 0 0	22	24153 31452 31524 31542 34152 41253 41352 41523 41532 42153 43152	24513 42513 25413 35142 32514 25314 35214 25143 25134 35124 23514
0 0 0 1	26	23415 24135 24315 31425 32415 34125 34215 41235 41325 42135 42315 43125 43215	52413 51342 53142 51432 53214 51243 52143 51423 52134 51324 53124 52314 51234
0 0 1 0	6	23154 31254 32154	45123 45213 45132
0 0 1 1	6	23145 31245 32145	54123 54213 54132
0 1 0 0	6	21453 21534 21543	34512 43512 35412
0 1 0 1	2	21435	53412
0 1 1 0	2	21354	45312
0 1 1 1	2	21345	54312
1 0 0 0	26	13452 13524 13542 14253 14352 14523 14532 15234 15243 15324 15342 15423 15432	35241 24531 42531 25431 43251 23541 32541 25341 32451 24351 42351 34251 23451
1 0 0 1	6	13425 14235 14325	52341 53241 52431
1 0 1 0	2	13254	45231
1 0 1 1	2	13245	54231
1 1 0 0	6	12453 12534 12543	34521 43521 35421
1 1 0 1	2	12435	53421
1 1 1 0	2	12354	45321
1 1 1 1	2	12345	54321

* 감소군의 위치벡터는 (-)부호

우리는 위치벡터 또는 순위벡터는 다음과 같은 패턴을 갖는다고 가정한다.

1. 증가형(일반적 증가, 오목우산형(convex umbrella)증가, 볼록우산형(concave umbrella)증가)
2. 감소형(일반적 감소, 오목우산형(convex umbrella)감소, 볼록우산형(concave umbrella)감소)
3. 무경향(no pattern)

즉, 위치벡터의 형태를 3개에서 7개까지 관심에 따라 분류할 수 있고, 또는 이외에도 연구의 목적에 따라 RSVP의 개수 등으로 분류할 수 있을 것이다.

<표 4>에서는 각 위치벡터를 다시 모수의 형태와 연관시켜 단순 증가, 단순감소, 오목형 증가, 오목형 감소, 볼록형 증가, 볼록형 감소, 무경향 등의 7가지로 분류하는 방법을 제안하였다. 이러한 분류방법을 따를 때, 각 범주의 경우의 수가 무경향범주 A_7만 제외하고 균형 있게 분포함을 알 수 있다.(<표 5> 참조)

모수의 패턴에 따라 대응하는 위치벡터를 분류한 근거는 그 모수패턴이 사실일 때, 그 위치벡터가 출현할 확률이 가장 높다는 것이다. 예를 들어 위치벡터 $\boldsymbol{P}$가 A_1에 속할 확률은 다음과 같다.

$$\Pr(\boldsymbol{P} \in A_1) = \max_{1\le l\le 7} \Pr(\boldsymbol{P} \in A_l) \text{ under } F_{i1}(x) \ge \cdots \ge F_{ik}(x)\,(F_{i1}(x) \ne F_{ik}(x)).$$

이제 처리수준간의 모집단 분포의 동일성을 검정하는 귀무가설 (1)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H_0\colon \Pr(\boldsymbol{P} \in A_l) = N_l/N,\ l=1,\dots,7,$$

단, N은 전체 경우의 수, N_l는 l범주의 경우의 수로 <표 5>에서 얻을 수 있다.

<표 4> 모수의 패턴과 위치벡터의 분류

모수의 패턴	패턴의 형태	위치벡터	위치벡터분류군	
$F_{i1}(x)\ge F_{i2}(x)\ge\cdots\ge F_{ik}(x)$ $(F_{i1}(x)\ne F_{ik}(x))$	단조증가	(11...1)의 연 또는 3개 이상의 연	(증가군)	A_1
$F_{i1}(x)\ge\cdots\ge F_{ip}(x)\le\cdots\le F_{ik}(x)$ $(F_{i1}(x)>F_{ik}(x))$	볼록형 증가 (increasing concave)	(1...1)(0...0)의 두 연	(증가군)	A_2
$F_{i1}(x)\ge\cdots\ge F_{ip}(x)\le\cdots\le F_{ik}(x)$ $(F_{i1}(x)<F_{ik}(x))$	볼록형 감소(decreasing concave)	-(1...1)(0...0)의 두 연	(감소군)	A_3
$F_{i1}(x)\le\cdots\le F_{ip}(x)\ge\cdots\ge F_{ik}(x)$ $(F_{i1}(x)>F_{ik}(x))$	오목형 증가(increasing convex)	(0...0)(1...1)의 두 연	(증가군)	A_4
$F_{i1}(x)\le\cdots\le F_{ip}(x)\ge\cdots\ge F_{ik}(x)$ $(F_{i1}(x)<F_{ik}(x))$	오목형 감소(decreasing convex)	-(0...0)(1...1)의 두 연	(감소군)	A_5
$F_{i1}(x)\le F_{i2}(x)\le\cdots\le F_{ik}(x)$ $(F_{i1}(x)\ne F_{ik}(x))$	단조 감소	-(11...1)의 연 또는 3개 이상의 연	(감소군)	A_6
기 타	무경향	(00...0)의 연		A_7

<표 5> 패턴에 의해 분류한 위치벡터의 수

	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7
A_1	1	3	15	83	495
A_2	1	4	17	88	549
A_3	1	4	17	88	549
A_4	1	4	17	88	549
A_5	1	4	17	88	549
A_6	1	3	15	83	495
A_7	0	2	22	202	1854
합계	6	24	120	720	5040

앞의 가설을 검정하는 적합도검정 통계량은 다음과 같다.

$$P=\sum_{l=1}^{7}\frac{(O_l-E_l)^2}{E_l},$$

여기서 O_l은 l번째 범주에 속하는 위치벡터들의 관측수이고, $E_l=nN_l/N$ 이다. 이 통계량은 분포무관 검정법을 만들며, n이 무한대로 감에 따라 자유도 6인 카이제곱 분포에 수렴한다.

여기서 만약 검정이 모수의 증가에만 관심이 있다면, 패턴은 3가지 즉, 증가 (A_1, A_2, A_4), 감소 (A_3, A_5, A_6), 기타 (A_7)로 축소될 수 있을 것이다. 또는 증가, 감소에 관계없이 우산형에만 관심 있다면, 증가 (A_1), 볼록우산형 (A_2, A_3), 오목우산형 (A_4, A_5), 감소형 (A_6), 기타 (A_7) 등의 5가지 범주로 분류할 수 있을 것이다.

5. 모의검정력 연구

현재 처리수준간의 모집단 분포의 동일성을 검정하는 기존의 비모수적 검정법이 존재하지 않으므로, 단순히 처리효과에 대하여 검정하는 Friedman(1937)과 제안한 통계량의 모의검정력만을 비교하겠다. Friedman 검정통계량은 다음과 같다.

$$S=\frac{12n}{k(k+1)}\sum_{j=1}^{k}\left(R_{.j}-\frac{k+1}{2}\right)^2$$

단, $R_{.j}=\sum_{i=1}^{n}R_{ij}/n$, 여기서 R_{ij}는 블록내 순위이다. S는 $n\to\infty$일 때, $\chi^2(k-1)$에 수렴한다.

제안한 통계량의 위치벡터를 모수의 패턴별로 분류하였기에 교호작용도 무작위적인 것보다 경향이 있는 것을 가정하고자 하였는데, 그중 Product 교호작용보다는 조건이 약한 코너 교호작용을 이용하여 모의실험하였다. 코너 교호작용은 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma_{ij}=\begin{cases}+\gamma, & i\le i_1,\ j\le j_1,\\ \quad 또는 & i\ge n-i_1+1,\ j\ge k-j_1+1\\ -\gamma, & i\le i_1,\ j\ge k-j_1+1,\\ \quad 또는 & i\ge n-i_1+1,\ j\le j_1,\\ 0, & 그외의\ 경우\end{cases}$$

모의실험에서 고려한 모집단 분포는 정규분포, 지수분포, 코쉬분포이며, FORTRAN IMSL패키지에서 난수를 얻어 각 경우에 10,000회 반복하였다. 여기서는 $k=4, n=10, l=7$일 때 여러 처리효과와 교호작용의 조합에 대한 모의검정력이 <표 6>에 주어져 있다. 여기서 유의 수준은 5%(괄호 안은 10%)이며, 기각역은 두 검정법 모두 극한분포에 의해 구하였다.

귀무가설하에 즉 처리효과와 교호작용이 없을 때($\tau=(0\ 0\ 0\ 0)$, $\gamma=0$), 제안한 검정법이 모의유의수준(empirical significance level)을 0.0423, 0.0419, 0.0395($\alpha=5\%$) 등으로 잘 맞추고 있음을 알 수 있다. 교호작용이 없고($\gamma=0$), 처리효과만 존재할 때는 제안한 검정법보다 Friedman 검정법의 검정력이 약간 우수하지만, 코너 교호작용의 크기가 점점 커짐에 따라 제안한 검정법이 매우 우수함을 볼 수 있다. 처리효과는 존재하지 않고, 양극단 처리의 상하 4개 블록에서 코너 교호작용만이 존재하는 $\tau=(0\ 0\ 0\ 0)$, $\gamma=2$, $i_1=4$, $j_1=1$의 경우를 보면, Friedman 검정은 유의수준보다도 적은 검정력을 보여주지만 제안한 검정은 0.41, 0.51 등의 높은 검정력을 보여준다. 교호작용의 크기가 작아지거나($\gamma=1$), 교호작용이 발생하는 블록의 비율이 적어지면($i_1=2$) 제안한 검정법도 검정력이 유의수준을 조금 넘는 정도이지만 여전히 Friedman 검정보다는 높은 검정력을 보인다. 처리효과가 존재하는 벡터는 두 가지를 고려해보았다. $\tau=(0\ 1\ 1\ 0)$에 교호작용이 없을 때는 Friedman 검정의 검정력이 0.55정도로 높지만, 여기에 2나 3 정도의 코너 교호작용이 더해지면 검정력이 급격히 떨어진다. 이에 반해 제안한 통계량은 검정력이 우수함을 알 수 있고, 이는 처리효과 벡터가 $\tau=(0\ .5\ 1\ 1.5)$일 때도 마찬가지의 결과를 보인다.

$k=4, 5$와 $n=10, 20$인 경우와 $l=5$인 경우에도 모의검정력실험을 행하였지만, 표본의 크기가 커짐에 따라 유의수준이 정밀하게 맞는 등의 일반적인 결과와 더불어 비슷한 검정력 행태를 보이므로 이의 제시는 생략하도록 한다.

표 6. 제안한 적합도 검정과 프리드만 검정의 모의 검정력(×10,000)
(α = 5%(10%), $n=10$, $k=4$)

처리효과		$\tau=(0\ 0\ 0\ 0)$		$\tau=(0\ 0\ 0\ 0)$		$\tau=(0\ 0\ 0\ 0)$	
교호작용		$\gamma=0$, $i_1=0$, $j_1=0$		$\gamma=2$, $i_1=3$, $j_1=1$		$\gamma=3$, $i_1=2$, $j_1=1$	
통계량		P	S	P	S	P	S
분포	정규분포	423(789)	476(976)	1840(2856)	16(70)	1167(1998)	32(165)
	지수분포	412(779)	459(908)	2227(3442)	20(87)	1111(1904)	47(183)
	코쉬분포	395(753)	419(920)	458(858)	205(506)	434(844)	202(548)

표 6. (계속) 제안한 적합도 검정과 프리드만 검정의 모의 검정력(×10,000)
(α = 5%(10%), $n=10$, $k=4$)

처리효과		$\tau=(0\ 0\ 0\ 0)$		$\tau=(0\ 0\ 0\ 0)$		$\tau=(0\ 1\ 1\ 0)$	
교호작용		$\gamma=2,\ i_1=4,\ j_1=1$		$\gamma=1,\ i_1=4,\ j_1=1$		$\gamma=0,\ i_1=0,\ j_1=0$	
통계량		P	S	P	S	P	S
분포	정규분포	4096(5716)	5(17)	577(1013)	107(305)	3007(4731)	5548(6899)
	지수분포	5066(6681)	1(16)	1150(1936)	52(182)	4413(6548)	7756(8716)
	코쉬분포	541(1010)	168(409)	326(706)	292(647)	921(1649)	1782(2850)

처리효과		$\tau=(0\ 1\ 1\ 0)$		$\tau=(0\ 1\ 1\ 0)$		$\tau=(0\ 1\ 1\ 0)$	
교호작용		$\gamma=2,\ i_1=3,\ j_1=1$		$\gamma=2,\ i_1=4,\ j_1=1$		$\gamma=3,\ i_1=4,\ j_1=1$	
통계량		P	S	P	S	P	S
분포	정규분포	1321(2591)	1016(2089)	5171(6278)	171(561)	7305(8341)	6(25)
	지수분포	1833(3167)	695(1803)	6133(7139)	138(488)	7594(8424)	3(15)
	코쉬분포	563(1134)	697(1374)	944(1481)	450(990)	1107(1785)	190(467)

처리효과		$\tau=(0\ 0\ 0\ 0)$		$\tau=(0\ .5\ 1\ 1.5)$		$\tau=(0\ .5\ 1\ 1.5)$	
교호작용		$\gamma=3,\ i_1=4,\ j_1=1$		$\gamma=0,\ i_1=0,\ j_1=0$		$\gamma=2,\ i_1=3,\ j_1=1$	
통계량		P	S	P	S	P	S
분포	정규분포	8666(9596)	0(1)	3972(5322)	6544(7772)	3980(4780)	716(1649)
	지수분포	8184(9293)	0(3)	6212(7432)	8466(9218)	5260(6039)	794(1938)
	코쉬분포	1151(1923)	80(226)	1266(1974)	2051(3279)	908(1462)	685(1386)

참 고 문 헌

[1] Brown, G. W. and Mood, A. M. (1951) On Median Tests for Linear Hypotheses, *Proceedings of Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* Berkeley: University of California Press, 159-166.

[2] Costello, P. S. and Wolfe, D. A. (1985) A New Nonparametric Approach to the Problem of Agreement between Two Groups of Judges, *Communications in Statistics-Simulation and Computation,* B14(4), 791-805.

[3] De Kroon, J. and Van der Laan, P. (1981) Distribution-Free Test Procedures in Two-Way Layouts; A Concept of Rank-interaction, *Statistica Neerlandica*, 35, 189-213.
[4] Friedman, M. (1937) The Use of Ranks to Avoid the Assumption of Normality Implicit in the Analysis of Variance, *Journal of the American Statistical Association*, 32, 675-701
[5] Hollander, M. and Sethurman, J. (1978) Testing for Agreement between Two Groups of Judges, *Biometrika*, 65, 403-411.
[6] Johnson, D. E. and Graybill, F. A. (1972) An Analysis of Two-way Model with Interaction and No Replications, *Journal of the American Statistical Association*, 67, 878-888.
[7] Kannemann, K. (1976) An Incidence Test for K Related Samples, *Biometrische Zeitschrift*, 18, 3-11.
[8] Kendall, M. G. and Babington Smith, B. (1939) The Problem of m Rankings, *Annals of Mathematical Statistics*, 10, 257-287.
[9] Kendall, M. G. (1938) A New Measure Rank Correlation, *Biometrika*, 30, 81-93.
[10] Kendall, M. G. (1970) *Rank Correlation Methods*. Griffin, London.
[11] Horn, P. S., Lee, K. H. and Wolfe, D. A. (1997) A Rank Based Goodness-of-Fit Approach to Testing for Equality of Treatment-Effect Patterns for Several Groups, *Journal of Nonparametric Statistics*(to appear)
[12] Li, L. and Schucany, W. R. (1975) Some Properties of a Test for Concordance of Two Groups of Rankings, *Biometrika*, 62, 417-423.
[13] Mandel, J. (1961) Non-additivity in Two-way Analysis of Variance, *Journal of the American Statistical Association*, 56, 878-888.
[14] Milliken, G. A. and Johnson, D. E. (1989) *Analysis of Messy Data. Vol. 2 : Nonreplicate Experiments*. New York; Van Nostrand Reinhold.
[15] Milliken, G. A. and Rasmuson, D. (1977) A Heuristic Technique for Testing for the Presence of Interaction in Nonreplicated Factorial Experiments, *Australian Journal of Statistics*, 19, 32-38.
[16] Piepho, H. (1994) On Tests for Interaction in a Nonreplicated Two-way Layout, *Australian Journal of Statistics*, 26, 363-369.
[17] Quade, D. (1979) Using Weighted Rankings in the Analysis of Complete Blocks With Additive Block Effects, *Journal of the American Statistical Association*, 74, 680-683
[18] Schucany, W. R. & Frawley, W. H. (1973) A Rank Test for Two Group Concordance, *Psychometrika*, 38, 249-258
[19] Sharma, A. and Wolfe, D. A. (1992) A Distribution-Free Goodness-of fit Approach for Two-way Layout Data, *Order Statistics and Nonparametrics-Theory and Application*, 225-235.
[20] Tukey, J. W. (1949) One Degrees of Freedom for Non-additivity, *Biometrics*, 5, 232-242.
[21] Wolfe, D. A. , Dean, A. M. and Hartlaub, B. A. (1990) Nonparametric Rank-Based Test Procedure for Non-additive Models in the Two-way Layout I. No Replications, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, A19(11), 4355-4382.