한국통계학회논문집 제4권 2호
1997년 8월 pp. 549 - 556

이변량 지수모형의 독립성검정[1)]

김 정 일[2)]

요 약

본 논문에서는 Block과 Basu (1974)가 제안한 절대연속이변량지수분포(absolutely continuous bivariate exponential distribution : ACBVED)의 독립성검정에 대한 Score검정과 이 검정의 점근성을 높이기 위하여 Cordeiro와 Ferrari (1991)가 제시한 Bartlett수정항과 유사한 형태의 수정된 Score검정을 유도하였다. 그리고 수정된 Score검정의 점근성의 효과와 주변분포가 동일하다는 가정하에서 Gupta, Mehrotra와 Michalek (1984)가 제안한 우도비검정을 모의실험으로 비교하였다.

1. 서 론

Marshall과 Olkin (1967)은 종속관계에 있는 두 부품의 수명시간 (X, Y)에 대한 모형으로 이변량지수분포(BVED)를 제안하였으며, 이는 LMP(loss of memory property)를 만족하고 주변분포가 지수분포인 좋은 성질을 가지고 있으나 분포함수가 연속이 아니라는 특성 때문에 이를 적용하기 어려운 경우가 발생할 수 있다. 그러나, 연속성의 가정하에서 주변분포가 지수분포이고 LMP성질을 만족하는 이변량지수분포는 존재하지 않으며(Basu (1971)), Block과 Basu는 LMP를, Sakar (1987)는 지수주변분포를 강조한 모형이다. 이런 이변량지수분포의 특성 때문에 우리는 두 가지 성질중 더 중요하게 생각되는 성질을 가진 분포를 사용하여야 하며, 본 논문에서는 다음의 확률밀도함수를 갖는 Block과 Basu의 ACBVED모형을 사용하고자 한다.

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{\lambda_1(\lambda_2+\lambda_{12})(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12})}{\lambda_1+\lambda_2}\exp\{-\lambda_1 x-(\lambda_2+\lambda_{12})y\}, \quad x<y \\ &= \frac{\lambda_2(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12})}{\lambda_1+\lambda_2}\exp\{-(\lambda_1+\lambda_{12})x-\lambda_2 y\}, \quad x\geq y. \end{aligned} \tag{1.1}$$

이 모형에서 λ_{12}는 독립성의 측도를 나타내는 모수로서 $\lambda_{12}=0$이면 두 확률변수 (X, Y)가 독립이고 각각 지수주변분포를 갖는다. Hanagal과 Kale (1991)에 의하여 제안된 검정은 ACBVED에서 이 독립성에 대한 대표적인 검정으로 최우추정량의 극한분포에 기초하고 있다. 그러나 모수들의 최우추정량을 명확한 식으로 표현하기 어렵기 때문에 수치해석적인 방법으로 추정량의 근사값들을 구하여야 하며 이에 기초한 Hanagal과 Kale의 검정통계량도 명확한 식으로 표현하기 어려운

---

1) 연구과제번호 BSRI-96-1439, '96년도 기초과학 연구소 학술 연구 조성비 지원에 의한 연구결과임.
2) (300-716) 대전광역시 동구 용운동 대전대학교 통계학과 부교수.

단점을 지니고 있다. 이 검정뿐 아니라 명확한 형태의 식으로 표현된 검정통계량이 없다고 Gupta, Mehrotra와 Michalek (1984)는 지적하면서 이런 이유 때문에 두 주변분포가 동일하다는 제약 ($\lambda_1 = \lambda_2$)을 가정하였다. 이 조건에서 최우추정량과 검정통계량을 단순한 식으로 표현할 수 있으며 독립성의 검정으로 β-분포의 함수인 우도비검정을 제안하였다.

이에 본 논문에서는 ACBVED의 독립성 검정으로 Score검정과 수정된 Score검정을 제안하고자 한다. 이 ACBVED모형은 모수공간에서 모수들의 최우추정량을 명확한 형태의 식으로 표현하기 어렵기 때문에 표본에 따라 모수들의 추정량들을 수치해석적인 방법으로 구하여야 하며 이에 기초한 검정통계량 역시 같은 어려움을 갖고 있다. 그러나 Cox와 Hinkley (1973)가 제안한 Score검정통계량은 우도비검정과 같은 점근성을 유지하면서 귀무가설하에서의 제한된 최우추정량의 함수이며 이 ACBVED에서 명확한 형태의 식으로 표현할 수 있다. 그리고 Score검정통계량의 점근성을 높이기 위하여 Harris (1985)는 적률모함수를 이용하여 기각역을 수정하였으며 Cordeiro와 Ferrari (1991)는 Bartlett 수정항과 유사한 형태의 수정항으로 Score검정통계량을 수정하였다.

본 연구는 Block과 Basu (1974)가 제안한 ACBVED의 독립성에 대한 Score검정과 수정된 Score검정을 유도하고자 하며, 2장에서는 ACBVED의 독립성검정에 대한 검정통계량들을 유도하고 3장에서는 모의실험의 결과와 결론을 설명하였다.

2. $\lambda_{12}=0$의 검정

Block과 Basu (1974)가 제안한 ACBVED의 생존함수 $\overline{F}(x,y)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\overline{F}(x,y) = &\ \frac{\lambda}{(\lambda_1+\lambda_2)}\exp\{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max(x,y)\}\\ &-\frac{\lambda_{12}}{(\lambda_1+\lambda_2)}\exp\{-\lambda_{12}\max(x,y)\},\\ &x,\ y>0\ ;\quad \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_{12}>0,\end{aligned}$$

여기에서, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$이고 이 모형은 LMP성질을 만족하고 $\lambda_{12}=0$이면 두 확률변수의 주변분포는 지수분포이고 독립이다. 이의 결합확률밀도함수는 식 (1.1)이고 각각의 주변분포는 다음과 같이 지수분포의 선형결합으로 표현된다.

$$f_X(x)=\frac{\lambda(\lambda_1+\lambda_{12})}{\lambda_1+\lambda_{12}}\exp\{-(\lambda_1+\lambda_{12})x\}-\frac{\lambda\lambda_{12}}{\lambda_1+\lambda_2}\exp\{-\lambda x\},\quad x>0,$$

$$f_Y(y)=\frac{\lambda(\lambda_2+\lambda_{12})}{\lambda_2+\lambda_{12}}\exp\{-(\lambda_1+\lambda_{12})x\}-\frac{\lambda\lambda_{12}}{\lambda_1+\lambda_{12}}\exp\{-\lambda y\},\quad y>0.$$

이 모집단으로부터 n의 확률표본을 추출하면 이의 대수우도함수는

$$\begin{aligned}L= &\ n\log\lambda-n\log(\lambda_1+\lambda_2)+n_1\log\lambda_1+n_1\log(\lambda_2+\lambda_{12})+n_2\log\lambda_2\\ &+n_2\log(\lambda_1+\lambda_{12})-\lambda_1\sum x_i-\lambda_2\sum y_i-\lambda_{12}\sum\max(x_i,y_i)\end{aligned} \tag{2.1}$$

이 되며, 여기에서 $n_1 = \sum I(X_i < Y_i)$이고 $n_2 = n - n_1$이다. Hanagal과 Kale (1991)은 최우추정량의 점근분포를 이용하여 ACBVED의 독립성($\lambda_{12}=0$)을 검정하고자 하였다. 이에 최우추정량을 구하기 위하여 대수우도함수에 대한 각 모수에 대하여 미분한 식은

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log L}{\partial \lambda_1} &= -\sum x_i + \frac{n}{\lambda} - \frac{n}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{n_1}{\lambda_1} + \frac{n_2}{\lambda_1+\lambda_{12}}, \\
\frac{\partial \log L}{\partial \lambda_2} &= -\sum y_i + \frac{n}{\lambda} - \frac{n}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{n_2}{\lambda_2} + \frac{n_2}{\lambda_2+\lambda_{12}}, \qquad (2.2) \\
\frac{\partial \log L}{\partial \lambda_{12}} &= -\sum \max(x_i, y_i) + \frac{n}{\lambda} + \frac{n_1}{\lambda_2+\lambda_{12}} + \frac{n_2}{\lambda_1+\lambda_{12}}
\end{aligned}$$

이 되며, 각 모수에 대한 최우추정량들이 어떤 명확한 식으로 표현이 가능하지 않기 때문에 수치해석적인 방법으로 이들의 근사값들을 구하여야 한다. Hanagal과 Kale (1991)은 각 모수의 일치추정량을 유도하여 최우추정량의 근사값들을 구하였으며, Fisher정보행렬을 이용하여 다음과 같은 기각역을 제안하였다.

$$\sqrt{n}\,\widehat{\lambda_{12}}/\sqrt{\widehat{I^{33}}} > z_\alpha ,$$

여기에서, $\widehat{I^{33}}$은 Fisher정보행렬의 역행렬에서 λ_{12}에 해당하는 값으로 점근분산을 의미한다.

이와 같이 최우추정량을 구하기 위하여 Newton-Raphson방법등으로 (2.2)의 근사값을 구하여야 한다. 그러나 Score검정은 점근성을 유지하면서 귀무가설에서의 장애모수들의 최우추정량의 함수이며 특히 본 논문에서 고려하고 있는 ACBVED에서는 복잡한 과정을 요구하지도 않으며 또한 명확한 식으로 표현이 가능하다. ACBVED의 대수우도함수 (2.1)에서 Score함수와 Fisher정보행렬을 이용하여 Cox와 Hinkley (1973)가 제안한 Score검정통계량 S_R은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_R = \frac{\widehat{\lambda_{10}}\widehat{\lambda_{20}}(\widehat{\lambda_{10}}+\widehat{\lambda_{20}})^4}{n\widehat{\lambda_{10}^4}+n\widehat{\lambda_{20}^4}}\left\{\sum \max(X_i, Y_i) - \frac{2n\,\widehat{\lambda_{10}}\,\widehat{\lambda_{20}} + n_1\widehat{\lambda_{10}^2} + n_2\widehat{\lambda_{20}^2}}{\widehat{\lambda_{10}}\widehat{\lambda_{20}}(\widehat{\lambda_{10}}+\widehat{\lambda_{20}})}\right\}^2,$$

$$\widehat{\lambda_{10}} = \frac{n}{\sum X_i}, \quad \widehat{\lambda_{20}} = \frac{n}{\sum Y_i}$$

이 검정통계량은 점근적으로 자유도가 1인 χ^2-분포를 따른다.

이 Score검정통계량의 점근성을 높이기 위하여, Harris (1985)는 우도비검정에서의 Bartlett 수정항과 같은 형태의 수정항들을 쉽게 구할 수 없어, Hill과 Davis (1968)의 식을 이용하여 Score검정통계량의 상위 α값을 수정하였다. 그러나 Bartlett 수정항을 이용하는 우도비검정통계량의 수정은 기각역을 수정하는 방법보다는 일반적이라는 데 착안하여 Cordeiro와 Ferrari (1991)는 Score검정에서도 검정통계량을 수정하고자 하였다. 이에 수정된 검정통계량의 형태를 유추하여 이의 적률모함수와 Cox와 Reid (1987)의 식을 이용하여 수정된 S_R의 통계량 S_R^*를 유도하였다. ACBVED에서 수정된 Score검정통계량을 구하는 과정이 매우 복잡하여 Peers (1971), Hayakawa (1985)와 Harris (1985)가 표현한 식을 사용하였으며, 이에 결합누가적률(joint cumulant)들을 이용한 수정된

Score검정통계량은 다음과 같다.

$$S_R^* = S_R\{1 - (\frac{A_1 - A_2 + A_3}{12q} + \frac{A_2 - 2A_3}{12q(q+2)} S_R + \frac{A_3}{12q(q+2)(q+4)} S_R^2)\}, \qquad (2.4)$$

여기에서,

$$A_1 = 12(-\widehat{\lambda_{10}}^6 + 6\widehat{\lambda_{10}}^5\widehat{\lambda_{20}} - 7\widehat{\lambda_{10}}^4\widehat{\lambda_{20}}^2 + 8\widehat{\lambda_{10}}^3\widehat{\lambda_{20}}^3 - 7\widehat{\lambda_{10}}^2\widehat{\lambda_{20}}^4$$
$$+ 6\widehat{\lambda_{10}}\widehat{\lambda_{20}}^5 - \widehat{\lambda_{10}}^6)/((\widehat{\lambda_{10}} + \widehat{\lambda_{20}})^2(\widehat{\lambda_{10}}^4 + \widehat{\lambda_{20}}^4)n),$$

$$A_2 = 3(\widehat{\lambda_{10}}^{12} - 16\widehat{\lambda_{10}}^{11}\widehat{\lambda_{20}} + 42\widehat{\lambda_{10}}^{10}\widehat{\lambda_{20}}^2 - 60\widehat{\lambda_{10}}^9\widehat{\lambda_{20}}^3 + 87\widehat{\lambda_{10}}^8\widehat{\lambda_{20}}^4$$
$$-128\widehat{\lambda_{10}}^7\widehat{\lambda_{20}}^5 + 100\widehat{\lambda_{10}}^6\widehat{\lambda_{20}}^6 - 128\widehat{\lambda_{10}}^5\widehat{\lambda_{20}}^7 + 87\widehat{\lambda_{10}}^4\widehat{\lambda_{20}}^8$$
$$-60\widehat{\lambda_{10}}^3\widehat{\lambda_{20}}^9 + 42\widehat{\lambda_{10}}^2\widehat{\lambda_{20}}^{10} - 16\widehat{\lambda_{10}}\widehat{\lambda_{20}}^{11} + \widehat{\lambda_{20}}^{12})/$$
$$(\widehat{\lambda_{10}}\widehat{\lambda_{20}}(\widehat{\lambda_{10}} + \widehat{\lambda_{20}})^2(\widehat{\lambda_{10}}^4 + \widehat{\lambda_{20}}^4)^2 n),$$

$$A_3 = 5(\widehat{\lambda_{10}} - \widehat{\lambda_{20}})^4(\widehat{\lambda_{10}}^6 - \widehat{\lambda_{10}}^5\widehat{\lambda_{20}} - \widehat{\lambda_{10}}^4\widehat{\lambda_{20}}^2 - 4\widehat{\lambda_{10}}^3\widehat{\lambda_{20}}^3$$
$$-\widehat{\lambda_{10}}^2\widehat{\lambda_{20}}^4 - \widehat{\lambda_{10}}\widehat{\lambda_{20}}^5 + \widehat{\lambda_{20}}^6)^2/(\widehat{\lambda_{10}}\widehat{\lambda_{20}}(\widehat{\lambda_{10}} + \widehat{\lambda_{20}})^2(\widehat{\lambda_{10}}^4 + \widehat{\lambda_{20}}^4)^3 n)$$

이다.

ACBVED에서 최우추정량들이 단순한 식으로 표현되지 않기 때문에 Gupta, Mehrotra와 Michalek (1984)은 $\lambda_1 = \lambda_2$의 제약조건을 가정하였으며, 이 조건에서 최우추정량들은 명확한 식으로 표현이 가능하며 독립성검정에 대한 가설은 다음과 같다.

$$H_0: \lambda_3 = 0, \ \ \lambda_1 = \lambda_2, \qquad H_1: \lambda_3 > 0, \ \ \lambda_1 = \lambda_2. \qquad (2.3)$$

이 가설에서 그들은 식 (2.1)의 대수우도함수를 이용한 우도비검정에 기초하여 다음과 같은 검정함수를 유도하였다.

$$\phi_G = \begin{cases} 1, & R(1-R) < k \\ 0, & \text{그렇지않으면} \end{cases},$$

여기에서, $R = \sum|X_i - Y_i| / \{\sum|X_i - Y_i| + 2\sum\min(X_i, Y_i)\}$이고 귀무가설에서 β-분포를 따르는 것을 보였다.

이에 가설 (2.3)에 대한 Score검정통계량은 Score함수와 Fisher정보행렬을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_R = \frac{2}{n}\{2\widehat{\lambda_0}\sum\max(X_i, Y_i) - 3n\}^2,$$

$$\text{여기에서,} \quad \widehat{\lambda_0} = \frac{2}{\overline{X} + \overline{Y}}.$$

그리고 결합누가적률과 Cordeiro와 Ferrari (1991)가 제시한 수정항들을 이용하여 수정된 Score검정통계량은 다음과 같다.

$$S_R^* = S_R(1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} S_R).$$

여기에서 수정항들은 검정통계량을 포함하고 있는 Bartlett수정항과 유사한 형태의 수정항으로 Harris (1985)가 제시한 기각역을 수정하는 방법을 검정통계량으로 수정하고자 하는 것이다.

3. 모의실험과 결론

앞 장에서 독립성검정에 대한 검정통계량을 유도하였으며 이 장에서는 이 통계량들의 점근성과 검정력을 모의실험으로 비교하였다. SAS를 이용하여 모의실험하였으며, 반복수는 검정력의 편차가 심하여 50000번 시행하였으며 표본의 수 n=5, 10, 20, 30일 때 λ_1, λ_2와 λ_{12}는 0(0.05)0.15로 변화하면서 실험하였다. <표 1>은 주변분포가 동일하다는 가정이 없는 일반적인 독립성검정에 대한 Score검정과 수정된 Score검정을 유의수준 5%와 1%에서 귀무가설을 기각한 비율을 표시하였다. 그 결과 유의수준 5%에서는 잘 적합되고 있으나 1%에서는 표본의 수가 적을수록 수정된 Score검정이 좀 더 안정적인 것을 알 수 있다. 이는 Score검정이 대표본을 가정한 검정으로 $O(n^{-1})$항을 고려하여 Score검정을 수정한 결과에 기인한 것이다.

<표 2>-<표 4>는 위에서와 같이 모수와 표본의 수를 변화하면서 Gupta, Mehrotra와 Michalek (1984)에 의한 우도비검정(ϕ_G), Score검정(S_R)과 수정된 Score검정(S_R^*)의 검정력을 비교하였다. 여기에서도 S_R^*가 작은 표본에서 S_R보다 점근성이 높음을 알 수 있고 ϕ_G의 검정력과도 거의 유사함을 알 수 있다. 비록 S_R^*의 검정력이 ϕ_G의 검정력보다도 좋다고 할 수 없을 지라도 ϕ_G는 주변분포가 동일하다는 가정을 필요로하고 이 가정하에서 구하여 진 통계량이고 Score검정과 수정된 Score검정은 이런 가정이 없이도 명확한 형태의 검정통계량으로 표현할 수 있는 장점을 갖고 있다.

<표 1> 귀무가설에서 S_R와 S_R^*의 검정력

λ_1	λ_2	n=5	n=10	n=20	n=30
0.05	0.05	0.0548(0.0063)	0.0542(0.0096)	0.0506(0.0100)	0.0508(0.0098)
		0.0542(0.0138)	0.0539(0.0141)	0.0508(0.0125)	0.0509(0.0118)
	0.10	0.0487(0.0050)	0.0527(0.0080)	0.0519(0.0099)	0.0528(0.0095)
		0.0494(0.0115)	0.0531(0.0129)	0.0521(0.0123)	0.0529(0.0115)
	0.15	0.0410(0.0052)	0.0483(0.0073)	0.0511(0.0090)	0.0512(0.0093)
		0.0427(0.0117)	0.0501(0.0112)	0.0518(0.0109)	0.0515(0.0109)
0.10	0.05	0.0515(0.0056)	0.0513(0.0085)	0.0518(0.0091)	0.0512(0.0099)
		0.0482(0.0097)	0.0495(0.0105)	0.0507(0.0100)	0.0502(0.0102)
	0.10	0.0565(0.0060)	0.0528(0.0091)	0.0524(0.0093)	0.0483(0.0089)
		0.0553(0.0132)	0.0525(0.0134)	0.0524(0.0123)	0.0483(0.0107)
	0.15	0.0527(0.0056)	0.0517(0.0085)	0.0503(0.0090)	0.0513(0.0094)
		0.0522(0.0130)	0.0521(0.0137)	0.0507(0.0119)	0.0514(0.0115)
0.15	0.05	0.0408(0.0053)	0.0467(0.0069)	0.0511(0.0087)	0.0506(0.0095)
		0.0400(0.0090)	0.0467(0.0084)	0.0507(0.0093)	0.0503(0.0102)
	0.10	0.0546(0.0063)	0.0523(0.0094)	0.0505(0.0094)	0.0505(0.0096)
		0.0518(0.0114)	0.0508(0.0123)	0.0496(0.0108)	0.0499(0.0103)
	0.15	0.0561(0.0067)	0.0525(0.0088)	0.0515(0.0097)	0.0501(0.0103)
		0.0542(0.0144)	0.0521(0.0133)	0.0514(0.0125)	0.0502(0.0125)

※ 위는 S_R, 아래는 S_R^*. ( )는 1%.

<표 2> $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.05$인 경우

n	λ_{12}	S_R	S_R^*	ϕ_G
5	0.00	0.0308(0.0012)	0.0447(0.0060)	0.0499(0.0093)
	0.05	0.0443(0.0022)	0.0617(0.0098)	0.0675(0.0156)
	0.10	0.0599(0.0033)	0.0812(0.0142)	0.0877(0.0222)
	0.15	0.0719(0.0043)	0.0978(0.0179)	0.1057(0.0274)
10	0.00	0.0408(0.0047)	0.0477(0.0083)	0.0489(0.0095)
	0.05	0.0801(0.0133)	0.0921(0.0219)	0.0938(0.0243)
	0.10	0.1229(0.0250)	0.1389(0.0389)	0.1415(0.0426)
	0.15	0.1516(0.0332)	0.1687(0.0510)	0.1715(0.0553)
20	0.00	0.0443(0.0067)	0.0482(0.0085)	0.0485(0.0088)
	0.05	0.1376(0.0361)	0.1456(0.0439)	0.1462(0.0450)
	0.10	0.2308(0.0755)	0.2422(0.0898)	0.2429(0.0916)
	0.15	0.2972(0.1088)	0.3085(0.1262)	0.3091(0.1285)
30	0.00	0.0483(0.0088)	0.0513(0.0104)	0.0515(0.0106)
	0.05	0.1897(0.0613)	0.1961(0.0690)	0.1963(0.0696)
	0.10	0.3334(0.1344)	0.3427(0.1484)	0.3433(0.1496)
	0.15	0.4249(0.1943)	0.4337(0.2116)	0.4341(0.2128)

※ ( )는 1%.

<표 3> $\lambda_1=\lambda_2=0.10$인 경우

n	λ_{12}	S_R	S_R^*	ϕ_G
5	0.00	0.0317(0.0013)	0.0454(0.0068)	0.0495(0.0102)
	0.05	0.0374(0.0017)	0.0542(0.0078)	0.0595(0.0120)
	0.10	0.0460(0.0022)	0.0641(0.0103)	0.0698(0.0159)
	0.15	0.0549(0.0032)	0.0755(0.0129)	0.0822(0.0196)
10	0.00	0.0417(0.0049)	0.0495(0.0082)	0.0507(0.0096)
	0.05	0.0567(0.0084)	0.0663(0.0144)	0.0680(0.0159)
	0.10	0.0798(0.0135)	0.0909(0.0231)	0.0927(0.0251)
	0.15	0.1037(0.0193)	0.1184(0.0310)	0.1203(0.0339)
20	0.00	0.0458(0.0071)	0.0494(0.0093)	0.0496(0.0096)
	0.05	0.0813(0.0182)	0.0867(0.0228)	0.0872(0.0233)
	0.10	0.1215(0.0365)	0.1439(0.0438)	0.1438(0.0448)
	0.15	0.1898(0.0563)	0.2006(0.0679)	0.2014(0.0692)
30	0.00	0.0469(0.0078)	0.0495(0.0092)	0.0496(0.0094)
	0.05	0.1016(0.0267)	0.1055(0.0304)	0.1057(0.0307)
	0.10	0.1876(0.0603)	0.1940(0.0678)	0.1943(0.0684)
	0.15	0.2655(0.0978)	0.2742(0.1084)	0.2744(0.1092)

※ (   )는 1%.

<표 4> $\lambda_1=\lambda_2=0.15$인 경우

n	λ_{12}	S_R	S_R^*	ϕ_G
5	0.00	0.0311(0.0012)	0.0446(0.0062)	0.0488(0.0098)
	0.05	0.0346(0.0017)	0.0490(0.0070)	0.0537(0.0111)
	0.10	0.0404(0.0182)	0.0559(0.0084)	0.0612(0.0134)
	0.15	0.0459(0.0025)	0.0638(0.0105)	0.0693(0.0159)
10	0.00	0.0417(0.0054)	0.0489(0.0090)	0.0501(0.0099)
	0.05	0.0491(0.0069)	0.0580(0.0113)	0.0595(0.0128)
	0.10	0.0627(0.0096)	0.0738(0.0164)	0.0752(0.0180)
	0.15	0.0821(0.0134)	0.0934(0.0223)	0.0952(0.0246)
20	0.00	0.0464(0.0077)	0.0502(0.0099)	0.0504(0.0103)
	0.05	0.0652(0.0126)	0.0705(0.0159)	0.0709(0.0164)
	0.10	0.0992(0.0226)	0.1059(0.0287)	0.1061(0.0295)
	0.15	0.1341(0.0354)	0.1416(0.0435)	0.1422(0.0444)
30	0.00	0.0480(0.0083)	0.0507(0.0100)	0.0508(0.0101)
	0.05	0.0785(0.0183)	0.0824(0.0211)	0.0826(0.0214)
	0.10	0.1291(0.0359)	0.1338(0.0403)	0.1341(0.0407)
	0.15	0.1881(0.0610)	0.1944(0.0684)	0.1946(0.0690)

※ (   )는 1%.

참고문헌

[1] Basu, A.P. (1971). Bivariate failure rate, *Journal of the Statistical Association*, Vol. 60, 103-104.

[2] Block, H.W. and Basu, A.P. (1974). A continuous bivariate exponential extension, *Journal of the Statistical Association*, Vol. 69, 1031-1037.

[3] Cordeiro, G.M. and Ferrari, S.L.P. (1991). A modified score test statistic having chi-squared distribution to order n^{-1}, *Biometrika,* Vol. 78, 573-582.

[4] Cox, D.R. and Hinkley, D.V. (1973). *Theoretical Statistics*, New York: Wiley.

[5] Cox, D.R. and Reid, N. (1987). Approximations to noncentral distributions, *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 15, 105-114.

[6] Gupta, R.C., Mehrotra, K.G. and Michalek, J.E. (1984). A small sample test for an absolutely continuous bivariate exponential model, *Communications in Statistics,* Vol. A13, 1735-1740.

[7] Hanagal, D.D. and Kale, B.K. (1991). Large sample tests of independence for absolutely continuous bivariate exponential distribution, *Communications in Statistics,* Vol. A20, 1301-1313.

[8] Harris, P. (1985). An asymptotic expansion for the null distribution of the efficient score statistics, *Biometrika,* Vol. 72, 653-659.

[9] Hayakawa, T. (1985). Asymptotic expansions of the distributions of some test statistics, *Ann. Inst. Statist. Math.,* Vol. 37, 95-108.

[10] Hill, G.W. and Davis, A.W. (1968). Generalized asymptotic expansions of Cornish-Fisher type, *Ann. Math. Statist.* Vol. 39, 1264-1273.

[11] Marshall, A.W. and Olkin, I. (1967). A multivariate exponential distribution, *Journal of the Statistical Association*, Vol. 62, 30-44.

[12] Peers, H.W. (1971). Likelihood ratio and associated test criteria, *Biometrika*, Vol. 58, 577-587.

[13] Sakar, S.K. (1987). A continuous bivariate exponential distribution, *Journal of the Statistical Association*, Vol. 82, 667-675.