한국통계학회논문집 제4권 2호
1997년 8월 pp. 393 - 401

블록화된 2^{n-k} 부분실시법의 최적 디자인 선택에 관한 연구

김 공 순[1)], 배 종 성[2)]

요 약

블록화한 2^{n-k} 부분실시법에서 총 실험횟수를 32회로 고정할때, 요인수가 $6 \leq n \leq 10$ 인 경우 가능한 모든 요인들간의 조합에 대해서 독립 생성자와 블록생성자를 구하고 이들 각 요인과 블록생성자로 구성된 디자인의 단어길이구조를 구하였다. 그리고 최소길이 방법으로 구한 최적의 부분실시디자인을 Soren(1994a)의 방법에 따라 블록화하였다. Brownlee등(1948)의 최소길이 성질을 블록화한 부분실시디자인에 확장시키고, 블록화한 부분실시디자인은 확장된 최소길이 성질을 만족하는 최적의 디자인임을 보였다.

1. 서 론

s^{n-k} 부분실시법(fractional factorial design)을 선택하는 기준으로 최대선명도(maximum resolution), 최소길이(minimum aberration), 최대적률(maximum moment)방법이 있다. 이러한 s^{n-k} 부분실시법에서 실험재료나 실험환경에 따른 실험오차를 줄임으로써 실험의 정도를 향상시키는 방법이 부분실시법의 블록화 방법이다.

Box와 Hunter(1961)는 정의대비의 단어들 중에서 가장 짧은 단어의 길이를 선명도라 정의하였다. 실험계획에서는 선명도 III, IV, V 인 디자인이 주로 사용된다. 이때 선명도 III, IV, V 인 디자인에서 주효과에 대한 정보는 동일하게 구할 수 있으나, 주효과 이외의 요인에 대해서는 선명도가 클수록 더 많은 요인들의 효과를 구할 수 있다. 또한 블록구분에 필요한 블록생성자를 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_n$ 이라 하면 블록화된 부분실시디자인에서는 Soren(1994a, 1994b)의 확장된 선명도의 개념인 **"2수준 부분실시법에서 선명도는 정의대비의 가장 짧은 단어의 길이로 정의한다. : 블록대비와 관련된 문자들로 구성된 $B_1B_2B_3\cdots B_n$은 하나의 문자로 간주한다."** 가 사용되고, 블록생성자들끼리의 교호작용 $B_1B_2B_3\cdots B_n$은 n차 교호작용이 아니라 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_n$ 와는 아무런 연관이 없는 하나의 주효과로 간주된다. 이처럼 블럭대비와 관계된 $B_1B_2B_3\cdots B_n$는 하나의 문자로 간주되기 때문에 디자인의 선명도가 감소한다. 또한 동일한

1) (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300 전남대학교 통계학과 대학원.
2) (500-757) 광주광역시 북구 용봉동 300 전남대학교 통계학과 교수.

선명도를 갖는 디자인들의 효율이 모두 같은 것은 아니기 때문에 동일한 선명도를 갖는 디자인중 효율이 높은 디자인을 선택하는 기준이 Fries와 Hunter(1980)의 최소길이 방법이다.

본 연구에서는 2^{n-k} 부분실시법에서 최적의 디자인을 최소길이 방법으로 구하고, 총 실험횟수가 32회이고 요인수가 $6 \le n \le 10$인 경우, 32회의 실험을 2개, 4개, 8개의 블록으로 각각 나눈 다음, 블록화된 2^{n-k} 부분실시디자인의 최소길이 성질을 구한다. 이때 블록 구분에 필요한 블록생성자수는 각각 1개, 2개, 3개이다. 2장에서는 부분실시법을 구성하는 방법을 간단히 설명하고, 3장에서는 블록화된 부분실시법에서 요인수가 $6 \le n \le 10$일때 각 디자인의 블록생성자 및 독립생성자와 단어길이구조를 제시한다. 그리고 2^{n-k} 부분실시법에서 Brownlee등 및 Chen 과 Wu(1991), Chen(1992)이 정의한 최적의 디자인을 구하기 위한 최소길이 성질을 부분실시법의 블록화 디자인에 적용시켜 확장된 최소길이 성질을 구한다.

2. 2^{n-k} 디자인 설계 방법

이제 2^{n-k} 부분실시디자인의 구성 방법에 대해 알아보자. 의미가 적은 고차의 교호작용을 희생시켜 총 2^n회의 실험중에서 2^{n-k}회만 실시하는 방법을 2^{n-k}부분실시법이라 한다. 2^n회 실험중 2^{n-k} 회의 실험을 임의로 행하는 경우에 n개의 요인들중에서 주효과끼리 혹은 주효과와 교호작용이 교락(confounding)되는 경우가 발생하게 되는데, 교락된 주효과들은 분리해서 추정할 수 없다. 본 연구에서는 가능한한 주효과 및 저차의 교호작용에 대한 정보 손실을 막기 위해 일반적으로 널리 사용되는 2^n 완전요인실험으로부터 2^{n-k} 부분실시디자인을 구성하는 방법을 다음과 같이 사용하고자 한다.

① 요인의 수가 $n-k$개이고 실험횟수가 2^{n-k}인 완전요인실험을 $2^{n-k} \times (n-k)$ 행렬로 나타낸다. 이때 각 행은 $n-k$ 개 요인의 처리조합으로 구성된다.

② $n-k$개 요인들의 적당한 교호작용을 이용해 새로운 k개의 생성자를 만든다. 그리고 $2^{n-k} \times (n-k)$ 행렬에 k개의 열을 붙인다.

③ k개의 생성자와 이들 생성자들끼리의 곱으로 정의대비 **I**를 구성한다.

위와 같은 방법으로 부분실시디자인을 구한 다음, ③에서 구성된 정의대비의 단어들중 가장 짧은 단어길이로 최대선명도를 결정한다. 다음으로 동일한 선명도를 지닌 디자인들중에서 최소길이 방법에 따라 최적의 디자인을 결정한다. 마지막으로 최적의 부분실시디자인을 블록화할 경우 3장에서 구한 확장된 최소길이 성질을 만족하면 이 디자인은 최적의 블록화된 부분실시디자인이다.

예를 들어 $n=7$, $k=2$인 2^{7-2} 부분실시법을 설계해 보자. 첫 단계로서 요인이 다섯인 2^5 완전요인실험에 대한 32×5행렬을 구한다. 다음 단계로 $k=2$개의 새로운 요인으로

6＝123, 7＝234을 선택했다고 하자. 요인들의 관계 6＝123, 7＝234은 정의대비 I＝1236＝2347의 원소가 되고, 두 원소의 곱 1236×2347＝1467도 정의대비의 원소가 된다. 따라서 정의대비는 I＝1236＝2347＝1467이 된다. 여기서 1236, 2347, 1467을 단어(*word*)라 하고, 1,2,3,4,6,7을 문자(*letter*)라 한다. 단어에서 문자의 수를 단어길이(*wordlength*)라 하고, 요인 6과 7은 생성자 또는 독립생성자라 한다. 두 독립생성자가 6＝123, 7＝234인 디자인을 d_1이라 하자. 디자인 d_1에서 정의대비에 나타난 단어들중 단어길이가 i인 단어의 수를 A_i라고 하면 d_1의 단어길이구조 $W(d_1)$(*wordlength pattern*)은 다음과 같다.

$$W=(A_1(d_1),A_2(d_1),\cdots,A_i(d_1),\cdots)=(0,0,0,3,0,,\cdots,0,0,)$$

d_1의 선명도는 $A_i(d_1)$의 가장 짧은 단어길이 i를 의미한다. d_1의 경우 선명도 Ⅳ를 갖는다. 두 독립생성자가 6＝123, 7＝145이고 I＝1236＝1457＝234567를 갖는 d_2를 생각하자. 이 디자인은 d_1처럼 선명도 Ⅳ를 갖는다. 그러나 다음과 같이 d_1과는 서로 다른 단어길이 구조를 갖는다.

$$W=(0,0,0,2,0,1,0,\cdots,0,0)$$

d_1에서 $A_4(d_1)=3$이고, d_2에서 $A_4(d_2)=2$이다. 따라서 두 디자인은 동일한 선명도를 갖지만, 단어길이가 4인 단어의 수를 더 적게 갖는 디자인은 d_2이다. 따라서 최소길이 방법에 의하면 d_2가 더 좋은 디자인이라 할 수 있다.

3. 블록화디자인에서 확장된 최소길이 성질

지금까지의 연구에서는 최적의 블록화된 부분실시디자인 선택 기준으로 최소길이 방법이 제시되지는 않았다. 본 연구에서는 최소길이 방법으로 최적의 블록화한 부분실시디자인을 찾는 기준을 모색하고자 한다. 따라서 Soren의 블록생성자들의 블록대비(blocking contrast)에 의해 선명도가 감소한다는 확장된 선명도의 개념을 이용해서 블록화한 부분실시디자인에 적용할 수 있는 최소길이 성질을 구한다. 특히 요인수가 $6 \le n \le 10$인 경우에 Brownlee 등의 최소길이 성질을 블록화된 부분실시법으로 확장할 수 있다.

3.1 실험횟수가 32인 블록화 디자인

다음의 [조건1]과 [조건2]는 Brownlee등에 의해 제안되고, [조건3]은 Chen과 Wu에 의해서 제안된 최소길이 성질이다.

[조건1] : $\sum A_i = 2^k - 1$

[조건2] : $\sum iA_i = n \cdot 2^{k-1}$

[조건3] : 모든 단어는 짝수 길이를 갖거나 그렇지 않으면 적어도 2^{k-1} 개는 홀수 길이를 갖는다.

위의 최소길이 성질을 블록화된 부분실시법으로 확장시켜 보자. 먼저 실험횟수를 32회인 경우로 고정시키고, 블록생성자가 1개, 2개, 3개인 경우 요인의 수가 $6 \le n \le 10$에 대해 각 요인들의 처리조합과 블록생성자를 모두 조사해서 [표1]을 작성하였다. [표1]의 처리조합들로 구성된 디자인들은 최소길이 방법에 의해 만들어진 최적의 디자인이다.

[표1] $6 \le n \le 10$, 블록생성자와 처리조합

총 요인의 수(n)				
6	7	8	9	10
블록 1, 각 블록의 크기 32				
2_{VI}^{6-1}	2_{IV}^{7-2}	2_{IV}^{8-3}	2_{IV}^{9-4}	2_{IV}^{10-5}
6=12345	6=1234	6=1234	6=2345	6=2345
	7=2345	7=2345	7=1345	7=1345
		8=1345	8=1245	8=1245
			9=1235	9=1235
				10=1234
블록 2, 블록의 크기 16				
2_{VI}^{6-1}	2_{IV}^{7-2}	2_{IV}^{8-3}	2_{IV}^{9-4}	2_{IV}^{10-5}
6=1234	6=1234	6=1234	6=2345	6=234
B_1=2345	7=2345	7=2345	7=1345	7=345
	B_1=1345	8=1345	8=1245	8=145
		B_1=1235	9=1235	9=123
			B_1=1234	10=125
				B_1=12345

블록 4, 블록의 크기 8

2^{6-1}_{III}	2^{7-2}_{III}	2^{8-3}_{III}	2^{9-4}_{III}	2^{10-5}_{III}
6=1234	6=2345	6=2345	6=234	6=234
B_1=2345	7=1345	7=1345	7=345	7=345
B_2=1345	B_1=1245	8=1345	8=145	8=145
	B_2=1235	B_1=1235	9=123	9=123
		B_2=1234	B_1=125	10=125
			B_2=12345	B_1=12345
				B_2=124

블록 8, 블록의 크기 4

2^{6-1}_{III}	2^{7-2}_{III}	2^{8-3}_{III}	2^{9-4}_{II}	2^{10-5}_{II}
6=1234	6=2345	6=234	6=234	6=234
B_1=125	7=1345	7=345	7=345	7=345
B_2=135	B_1=125	8=145	8=145	8=145
B_3=145	B_2=135	B_1=123	9=123	9=12345
	B_3=145	B_2=125	B_1=125	10=125
		B_3=12345	B_2=135	B_1=135
			B_3=12345	B_2=124
				B_3=123

[표1]을 이용하는 방법을 예를 들어 설명하자. 요인수가 8이고, 각 요인의 수준수가 2인 2^{8-3} 부분실시법을 사용하고자 하는 경우, 32회의 실험을 동일한 환경아래서 한번에 실시할수 없어 16회씩 2번으로 나누어 실험해야 되는 경우를 생각하자. 이 디자인은 블록이 2이고 블록의 크기가 16이므로 [표1]에서 독립생성자는 $6=1234$, $7=2345$, $8=1345$이고, 블록생성자가 $B_1=1235$인 디자인을 선택하면 이 디자인은 선명도가 IV인 최적의 부분실시디자인이 된다는 것이다.

[표2]는 $6 \le n \le 10$인 경우 [표1]에서 구한 처리조합과 블록생성자들을 이용하여 각각의 블록생성자와 요인에 해당하는 단어길이 구조를 모두 조사하여 작성한 것이다. $6 \le n \le 10$ 인 경우 각 단어길이구조를 구성하는 단어들의 합은 일정한 규칙을 갖는다. 따라서 이러한 규칙성을 이용해서 확장된 최소길이 성질이 성립함을 보일 수 있다.

[표2] $6 \le n \le 10$인 경우의 단어길이 구조

블록 생성자(b_j)	요인 (n)	생성자 (k)	단어길이구조(W)
1	6	1	(0, 0, 0, 1, 2)
	7	2	(0, 0, 0, 3, 4)
	8	3	(0, 0, 0, 6, 8, 0, 0, 10)
	9	4	(0, 0, 0, 10, 16, 0, 0, 5)
	10	5	(0, 0, 0, 25, 0, 27, 0, 10, 0, 1)
2	6	1	(0, 0, 1, 3, 3, 0)
	7	2	(0, 0, 1, 7, 6, 0, 1)
	8	3	(0, 0, 1, 13, 12, 0, 3, 2)
	9	4	(0, 0, 3, 22, 6, 21, 7, 3, 0, 1)
	10	5	(0, 0, 3, 35, 13, 39, 20, 3, 1)
3	6	1	(0, 0, 4, 6, 4, 1)
	7	2	(0, 0, 6, 10, 9, 5, 1)
	8	3	(0, 0, 8, 20, 9, 19, 7)
	9	4	(0, 1, 8, 33, 21, 36, 18, 8, 1, 1)

3.2 확장된 최소길이 성질

[표2]에서 블록생성자수를 b_j라 하면 $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$이 된다. D_i는 블록화된 부분실시법에서 단어길이가 i인 단어의 수라 하자. [표3]은 [표2]로부터 단어길이의 합 $\sum D_i$과 1차 적률 $\sum iD_i$를 계산한 값이다.

[표3] 단어길이의 합($\sum D_i$)과 1차 적률($\sum iD_i$)

b_j	k	1	2	3	4	5
b_1	$\sum D_i$	3	7	15	31	63
	$\sum iD_i$	14	32	72	160	352
b_2	$\sum D_i$	7	15	31	63	127
	$\sum iD_i$	30	68	152	336	736
b_3	$\sum D_i$	15	31	63	127	
	$\sum iD_i$	62	140	312	688	

단어길이합과 1차 적률에 관한 [표3]을 이용하여 Brownlee등의 최소길이 성질을 블록생성자수가 $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$인 블록화된 부분실시법에서는 다음과 같이 확장될 수있다.

정리 1) $\sum D_i = 2^{k+b_j} - 1$

2) $\sum iD_i = (n+b_j)\cdot 2^{(k+b_j)-1} - \sum_j (b_j - j)\binom{bj}{b_j - j+1}\cdot 2^k,\ j=1,\cdots b_j$

증명 [표3]의 $\sum D_i$는 $b_1=1, b_2=2, b_3=3$ 각각에 대해서 다음과 같은 수열로 표현할 수 있다

$$\sum D_i = a_k = a_1 + \sum_{j=b_j}^{k+b_j-2} 2^{j+1}$$

$$= (1+\sum_{l=1}^{b_j} 2^l) + \sum_{j=b_j}^{k+b_j-2} 2^{j+1}$$

$$= (1+\sum_{l=1}^{b_j} 2^l) + 2^{b_j+1}(2^{k-1}-1)$$

$$= 2^{k+b_j} - 1 \qquad (\because \sum_{l=1}^{b_j} 2^l = 2^{b_j+1} - 2)$$

다음으로 $\sum iD_i$는 블록화된 부분실시법에서 1차 적률값으로 선명도가 감소하는 만큼 1차적률값도 감소하게 된다. [표3]에서 각각의 블록생성자 b_1, b_2, b_3에 대해서 $\sum iD_i$를 하나의 수열로 간주하면 모든 k에서 감소하는 선명도의 양은

$$\sum_j (b_j - j)\binom{b_j}{b_j - j+1}\cdot 2^k$$

이다. 따라서

$$\sum iD_i = (n+b_j)\cdot 2^{(k+b_j)-1} - \sum_j (b_j - j)\binom{b_j}{b_j - j+1}\cdot 2^k$$

와 같이 나타낼 수 있다. □

3.3 예제

4개의 블록으로 구성된 2^{7-2}_{III} 디자인 설계방법에 대해 알아보자. [표1]에서 블록이 4이고, 블록의 크기가 8인 2^{7-2}_{III} 부분실시디자인은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

1. 5개의 요인을 1,2,3,4,5으로 하는 2^5 완전요인실험을 설계한다. 그리고, 나머지 요인은 $6=2345,\ 7=1345$ 로 한다.
2. 블록구분에 필요한 블록생성자를 구한다. 4개의 블록을 만들기 위해서는 2개의 블록생성자가 필요하고, 그때 블럭생성자는 $B_1=1245,\ B_2=1235$ 로 한다.
3. 블록화된 2^{7-2} 디자인의 정의대비를 구한 다음 최대선명도를 갖는 디자인을 구한다.
   이때 정의대비는

$$I = 23456 = 13457 = 1267 = 136B_1 = 146B_2 = 256B_1B_2 = 237B_1 = 247B_2$$
$$= 1245B_1 = 1235B_2 = 34B_1B_2 = 3567B_2 = 157B_1B_2 = 123467B_1B_2$$

이다. 정의대비에서 단어길이가 가장 짧은 단어는 $34B_1B_2$이고, 이때 B_1B_2은 Soren의 정의에 의해 단어길이가 1로 간주되기 때문에 $34B_1B_2$는 단어길이가 4가 아니라 3이 된다.

4. 위의 1,2,3에서 구한 2^{7-2} 디자인이 선명도 Ⅲ을 갖는 디자인 중에서 최소길이 성질을 만족하면 이 디자인은 최적의 2^{7-2}_{III} 디자인이다.
5. 4에서 구한 최적의 디자인은 [표3]의 결과에 의해 정리 $\sum D_i = 2^{k+b_2} - 1 = 15$ 과 $\sum iD_i = (n+b_2)\cdot 2^{(k+b_2)-1} - \sum_j (b_j - j)\binom{bj}{b_j - j + 1} \cdot 2^k = 68$ 를 만족함을 보일 수 있다. 여기서 $j = 1, 2$ 이고 $k = 2, b_1 = 1, b_2 = 2$이다.

위와 똑같은 방법으로 [표1]에 주어진 디자인들은 확장된 최소길이 성질을 만족하는 디자인임을 보일 수 있다.

4. 결 론

블록화된 2^{n-k} 부분실시법에서 $n-k=6$이고 $6 \le n \le 10$인 경우, 최적의 디자인을 만들기 위한 각 요인들의 처리조합과 블록생성자를 모두 조사하였다. 그리고 Brownlee 등의 최소길이 조건을 블럭화된 부분실시법으로 확장하였다. 그러나 Chen과 Wu의 "모든 단어는 짝수 길이를 갖거나 그렇지 않으면 적어도 2^{k-1}개는 홀수길이를 갖는다."는 선명도의 감소 때문에 적용하기가 어려워 본 연구에서는 제외되었다. 또한 요인수가 11이상인 경우는 각 생성자 또는 블록생성자들의 처리조합의 계산이 복잡할 뿐만 아니라 실험계획에서 실제로 응용되는 경우가 적기 때문에 역시 본 연구에서 제외되었다.

그러나 요인수가 11이상인 경우도 단어길이 합에 관한 성질로 미루어 보건데 확장된 최소길이 성질을 만족할 것으로 추측된다.

참고문헌

[1] Box, G. E .P. and Hunter, J. S. (1961). The 2^{k-p} fractional factorial designs. *Technometrics*, 3, 311-351 and 449-458.

[2] Brownlee, K, A., Kelly, B. K. and Loraine, P. K. (1948). Fractional replication arrangements for factorial experiments with factors at two levels. *Biometrika*, 35, 68-276.

[3] Chen, J. and Wu, C. F. J. (1991). Some results on s^{n-k} fractional factorial designs with minimum aberration or optimal moments. *Annals of Statistics*, 19, 2, 1028-1041.

[4] Chen, J. (1992). Some results on 2^{n-k} fractional factorial designs with minimum aberration or optimal moments. *Annals of Statistics*, 20, 2124-2141.

[5] Fries, A. and Hunter, W. G. (1980). Minimum aberration 2^{k-p} designs, *Technometrics*, 22, 601-608.

[6] Soren (1994a). Blocking Generators for small 2^{k-p} Designs. *Journal of Quality Technology*, 26, 288-296.

[7] Soren (1994b). A note on the definition of resolution for blocked 2^{k-p} designs. *Technometrics*, 36, 308-311.