

# 2차원 다층 반무한해를 이용한 지하구조계의 동적 경계요소 해석

## Dynamic Boundary Element Analysis of Underground Structures Using Multi-Layered Half-Plane Fundamental Solutions

김 문 겸\*      이 중 우\*\*      조 성 용\*\*  
Kim, Moon Kyum   Rhee, Jong Woo   Cho, Seong Yong

### 국문요약

터널 통과 같은 지하구조계를 유한요소법 등의 수치적 방법으로 해석할 경우 인위적인 경계에서 파의 반사가 발생하게 되어 실제 결과와 큰 차이를 발생시킨다. 따라서 동역학적 하중을 받는 지하구조계는 실질적인 반무한 구조계로 고려되어야 한다. 특히 지하구조계는 실제 다층구조로 구성되어 있으므로 이러한 다층 문제를 고려할 수 있어야 한다. 이를 위해 본 연구에서는 외부영역 경계적분문제 해석하기 위한 동적 수치기본해를 개발하였다. 주파수영역의 정적인 경우에 대한 엄밀 적분해와 Bessel 함수의 점근식을 이용한 적분을 통해 축대칭문제를 2 차원문제로 보다 쉽게 적용할 수 있도록 하였다. 이와 같이 개발된 동적 수치기본해를 경계적분 방정식에 적용하여 해석한 결과와 기존 해석결과와의 비교를 통해 그 효율성을 입증하였다. 또한 다층지반내 지하구조물에 대해 지반매체의 각 물성 및 공동의 깊이에 따른 민감도분석을 수행하여 지하구조계의 동적 거동특성 파악의 적용성을 다루었다.

**주요어 :** 동적경계요소법, 수치기본해, Green 함수, 주파수영역, 지하구조물

### ABSTRACT

In analysis of underground structures, the effects of artificial boundary conditions are considered as one of the major reasons for differences from experimental results. These phenomena can be overcome by using the boundary elements which satisfy the multi-layered half space conditions. The fundamental solutions of multi-layered half-space for boundary element method is formulated satisfying the transmission and reflection of waves at each layer interface and radiation conditions at bottom layer. The governing equations can be obtained from the displacements at each layer which are expressed in terms of harmonic functions. All types of waves can be included using the complete response from semi-infinite integrals with respect to horizontal wavenumbers using expansion of Fourier series and Hankel transformation. Two dimensional Green's functions are derived from cylindrical Navier equations and potentials performing infinite integration in y-direction. In this case, it is effective to transform into two dimensional problem using semi-analytical integration and sinusoidal Bessel functions. Some verifications are given to show the accuracy and efficiency of the developed method, and numerical examples to demonstrate the dynamic behavior of underground with various properties.

**Key words :** dynamic boundary element method, fundamental solutions, Green's functions, frequency domain, underground structure

## 1. 서 론

지하구조물을 포함하는 반무한 지반에서의 탄성

파 전달문제를 수치해석하기 위하여 유한요소법, 유한차분법, 경계요소법, 무한요소법 등 다양한 기법들을 이용한 연구가 수행되어 왔다. 유한요소법과 유한차분법은 구조계의 경계뿐만 아니라 내부영역도 이산화시켜야 하며 무한 또는 반무한 영역에 대

\* 정회원 · 연세대학교 토목공학과 교수

\*\* 연세대학교 토목공학과 박사과정

한 가상의 경계에서 발생하는 반사파의 문제로 인하여 응답이 왜곡된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 비효율적인 거대 요소망을 구성하여 가상 경계면에서의 파 반사를 상대적으로 작게 하거나 복잡한 가상 흡수경계를 도입하여야 한다.<sup>(1)</sup> 반면에 반무한 기본해를 이용한 경계요소법은 단지 경계에서의 이산화만 필요하고 무한경계에 대한 방사조건을 따로 고려할 필요가 없다. 따라서 탄성 지반을 포함하는 지하구조계의 동적인 특성을 파악하는 문제에 있어서는 경계요소법을 이용하는 것이 효과적이다.<sup>(2)</sup>

일반적으로 대부분의 지하구조계는 퇴적층의 형성, 지각변동 또는 인공적인 성토 등으로 다층구조를 이룬다. 그러므로 실질적인 지하구조계의 역학적 거동을 분석하기 위해서는 이와 같은 다층구조의 영향을 고려하여야 한다. 따라서 본 연구에서는 다층구조계의 영향을 고려한 동하중에 대한 2차원 다층반무한 기본해를 도출하고 이를 경계요소 해법에 적용하여 실제 지하구조계의 동적 특성을 해석할 수 있도록 하였다. 이 때 각 층에서의 연속조건을 만족시키기 위해 일반화된 투과 및 반사계수를 이용하였다.<sup>(3)</sup> 일반적으로 다층구조계에 있어서의 Green 함수는 그 해를 구하기가 어렵거나 불가능하기 때문에 수치적인 적분을 이용하여야 한다. 특히 가진점과 수진점의 위치가 서로 가까울 경우에는 그 응답이 매우 조밀하게 발전하는 양상을 보이기 때문에 그 값을 구하기가 어렵다. 2 차원 문제의 경우 시간 및 좌표에 대한 Fourier 변환을 통해 응답 함수를 구할 수도 있으나 축대칭 문제의 경우에는 Bessel 함수와 지수함수의 곱에 대한 정적 적분식의 엄밀해를 이용하여 효과적인 점근식을 도입할 수 있으므로 본 연구에서는 축대칭 문제를 2차원 문제로 변환시키는 방법을 이용한다.

선형탄성 거동을 보이는 지하구조물에 대한 천이 문제를 해결하기 위하여 경계요소법을 적용하는 데에는 크게 두가지 기본 접근방법이 있다. 하나는 주파수영역 해석방법으로서 수치적인 역변환에 따라 접근하는 경계요소 Fourier 변환문제<sup>(4)</sup>, 혹은 Laplace 변환영역의 해<sup>(5)</sup>이고 다른 하나는 시간영역 구성 및 단계적 적분법과 연관되어 해석하는 경계요소법에 의한 해이다. 이러한 경계요소법의 개념은 주로 Brebbia<sup>(6)</sup> 및 Benerjee<sup>(7)</sup> 에 의해 정립되었다.

그 후 경계요소법을 이용한 해법은 1992년 Wang 과 Schmid<sup>(8)</sup>, Estorff<sup>(9)</sup>, Manolis 와 Beskos

등<sup>(10)</sup>에 의해 발전되었다.

기존의 경계요소해석에서는 단층의 경우, 혹은 기반암 위에 적층된 구조계 등의 제한조건이 따르거나, 다층의 경우에는 각 층의 모든 경계를 경계요소 및 무한 경계요소로 설정해야하는 등의 비효율적인 점을 포함하고 있다. 본 연구에서는 다층의 영향을 고려한 기본해를 구성하고 이를 구조물 주변의 최소영역만을 이산화할 수 있는 효율적인 경계요소 해석법을 제안하여 그 타당성을 입증한다. 또한 다층지반내에 존재하는 구조물에 대한 민감도 분석을 수행하여 다층의 성질 및 구조물의 깊이에 따른 거동의 변화를 고찰한다.

## 2. 기본 방정식

그림 1 은 반무한영역내에  $n$  개의 평행한 층을 이루고 있는 지하구조계를 나타낸다. 그림에서 각 층의 층상은 수평방향으로 평행하며, 각층은 층경계 접합면에서의 연속조건을 만족하는 것으로 한다. 또한 각 층은 균질체로 가정한다. 이러한 다층반무한 구조계의 지배방정식은 임의의  $\ell$  층에서의 변위를 시간의 조화함수로 표현하여 각 층별로 형성될 수 있다. 각 층의 재료가 균질할 경우 주파수영역에서의 Navier 방정식은 식 (1) 과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

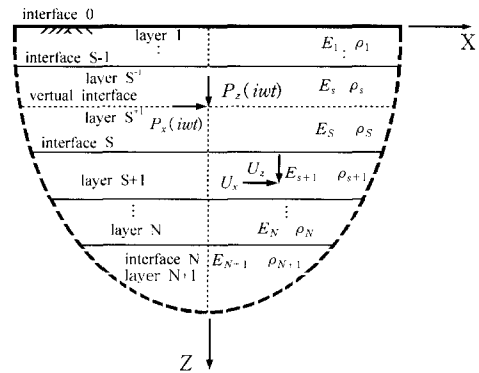


그림 1 점하중이 작용하는 다층 반무한 구조계

$$(\lambda' + \mu') \frac{\partial}{\partial r} (\epsilon_{\theta\theta}^{\prime}) + \mu' \left[ \nabla^2 u_r' - \frac{1}{r} \left( 2 \frac{\partial u_{\theta}'}{\partial \theta} + \frac{u_r'}{r} \right) \right] + \omega^2 \rho' u_r' + F_r' = 0 \quad (1a)$$

$$(\lambda' + \mu') \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\epsilon_{\theta\theta}^{\prime}) + \mu' \left[ \nabla^2 u_{\theta}^{\prime} - \frac{1}{r} \left( \frac{u_{\theta}'}{r} - 2 \frac{\partial u_r'}{\partial \theta} \right) \right] + \omega^2 \rho' u_{\theta}^{\prime} + F_{\theta}^{\prime} = 0 \quad (1b)$$

$$(\lambda' + \mu') \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon'_{kk}) + \mu' \nabla^2 u'_z + \omega^2 \rho' u'_z + F'_z = 0 \quad (1c)$$

여기서,  $\varepsilon'_{kk}$  와  $\rho'$  는 각각 dilation 과 밀도이고  $\nabla^2$  는 Laplacian 연산자이며  $F'$  는 각 방향으로의 단위부피당 물체력이다.

변위와 물체력을 방위각에 대해 Fourier 전개하고 Hankel 변환을 수행하여 식 (1) 에 표현된 편미분 방정식을 선형 2차 상미분방정식의 형태로 변환시키므로써 일반해를 구할 수 있다. 에너지 손실이 주파수에 독립적인 hysteretic solid 로 지반을 가정 하므로써 재료 감쇠를 고려한 복소 Lamé 상수  $\lambda$  와  $\mu$  는 식 (2) 와 같이 표현된다.

$$\lambda = \lambda^* (1 + 2i\zeta) \quad (2a)$$

$$\mu = \mu^* (1 + 2i\zeta) \quad (2b)$$

이 때  $\lambda^*$  와  $\mu^*$  는 각각 탄성 Lamé 의 1차 상수와 Lamé 의 2 차 상수이고,  $\zeta$  는 감쇠율이다.

2 차원 평면상에서의 변형률 문제는  $y$  방향으로 무한한 선하중에 대한 응답을 다루는 문제이므로 축대칭 점하중에 대한 식을 중첩시켜  $y$  방향으로의 선하중으로 변환시켜야한다.<sup>(10),(14)</sup> 그림 2 는 점하중을 선하중으로 변환하는 방법을 나타낸다.

그림 2 에서와 같이 하중과 수진점의 거리  $r$  은  $x/\cos\theta$  이고,  $x$  방향 하중은  $r$  방향 하중에  $\cos\theta$  를 곱하므로써 구할 수 있으며  $z$  방향 하중은 불변이다. 이런 조건으로 구한  $r$  방향 변위와 응력에  $\cos\theta$  를 곱하므로써 2 차원 평면변형률 문제에서의  $x$  방향 변위와 응력을 구할 수 있다. 이러한 변위형태로부터 식 (3) 과 같은 2 차원 평면변형률 상태에서 깊이  $h$  에서 작용하는 동적 하중에 대한 각 방향의 역변환된 변위기본해를 구할 수 있다.

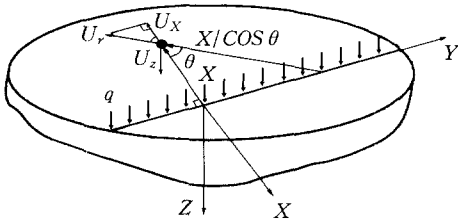


그림 2 선하중 변환

$$u'_x(\omega, x, z, h) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \left[ PD'_x(\omega, z, h) \left( \frac{dJ_1(\eta r)}{d(\eta r)} \cos\theta - \frac{J_1(\eta r)}{\eta r} \sin\theta \right) + HD'_x(\omega, z, h) \left( \frac{J_1(\eta r)}{\eta r} \cos\theta - \frac{dJ_1(\eta r)}{d(\eta r)} \sin\theta \right) \right] d\eta d(r \sin\theta) \quad (3a)$$

$$u'_z(\omega, x, z, h) = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} [VD'_z(\omega, z, h) J_1(\eta r)] d\eta d(r \sin\theta) \quad (3b)$$

$$u'_x(\omega, x, z, h) = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} [PD'_z(\omega, z, h) J_1(\eta r)] d\eta d(r \sin\theta) \quad (3c)$$

$$u'_z(\omega, x, z, h) = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} [VD'_z(\omega, z, h) J_0(\eta r)] d\eta d(r \sin\theta) \quad (3d)$$

여기서,  $J_m$  는 Bessel 의 1종  $m$  차 함수이고  $\eta$  는 수평방향 파동수이며  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$  이다. 변위항의 아랫첨자 중 왼쪽에 있는 첨자는 변위의 방향을 나타내고, 오른쪽에 있는 첨자는 하중의 작용방향을 나타낸다. 또한  $PD, VD, HD$  는 각각  $P, SV$  그리고  $SH$  파에 대한 각각의 변위벡터들이다.

$\theta = 0$  일 경우  $x$  평면 및  $z$  평면에 대한 식 (3) 의 변위벡터들은  $P, SV$ , 그리고  $SH$  파에 대해 식 (4) 및 식 (5) 와 같은 행렬의 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} PD'_x & PD'_z \\ VD'_x & VD'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \gamma'_s & -1 & \gamma'_s \\ -\gamma'_p & 1 & \gamma'_p & -1 \end{bmatrix} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} e^{-a'_s(z-2^{(r-1)})} \\ e^{-a'_s(z-2^{(r-1)})} \\ e^{-a'_s(z^{(r)}-z)} \\ e^{-a'_s(z^{(r)}-z)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} CD'_{px} & CD'_{pz} \\ CD'_{sx} & CD'_{sz} \\ CU'_{px} & CU'_{pz} \\ CU'_{sx} & CU'_{sz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} HD'_x & HD'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a'_s \\ -\mu'_s & \mu'_s \end{bmatrix} \cdot \text{diag} \begin{pmatrix} e^{-a'_s(z-2^{(r-1)})} \\ e^{-a'_s(z^{(r)}-z)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} CD'_{sx} & CD'_{sz} \\ CU'_{sx} & CU'_{sz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서,  $\gamma'_s = a'_s/\eta$ ,  $\gamma'_p = a'_p/\eta$ ,  $a'_p = \sqrt{\eta^2 - \eta_p'^2}$ ,  $a'_s = \sqrt{\eta^2 - \eta_s'^2}$ ,  $\eta_s' = \beta \frac{\omega}{c_s}$ ,  $\eta_p' = \beta \frac{\omega}{c_p}$  이며  $c_p'$  와  $c_s'$  는 각각  $\ell$  층에서의 종파와 횡파의 속도,  $\beta$  는 길이에 대한 무차원 상수이다.<sup>(12)</sup>  $h$  는 하중 작용점의 깊이이고  $z$  는 수진점의 깊이이며,  $CD, CU$  는 각각 연속조건, 경계조건, 방사조건으로부터 구해지는 하향 및 상향 포텐셜 상수이다.<sup>(13)</sup>

식 (3) 은 지수함수와 Bessel 함수를 포함하고 있으므로 지수항으로 표현되는 가진점과 수진점의 수직거리가 가까워질수록 파동수에 대해 쉽게 수렴이 되지 않는다. 파동수가 무한으로 증가함에 따라 변

위함수는 정적인(static) 해<sup>(3)</sup>에 접근하게 되므로 식 (4) 및 식 (5) 에 표현된 변위벡터에 주파수  $\omega = 0$  을 대입하므로써 식 (6) 및 식 (7) 과 같은 접근해를 구할 수 있다. 이 때 파동수  $\eta$  가 증가함에 따라  $a_s^e$  및  $a_s^f$  는  $\eta$  의 값과 같게 된다.

$$\left[ \frac{\overline{PD}_x^f}{\overline{VD}_x^f} \quad \frac{\overline{PD}_y^f}{\overline{VD}_y^f} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ (1-x^f) & 1 & (x^f-1) & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} e^{-\eta z} z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\eta(z-z^{(f-1)}) & e^{\eta(z-z^{(f-1)})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\eta(z^{(f-1)}-z)} & 0 \\ 0 & 0 & -\eta(z^{(f-1)}-z) & e^{\eta(z^{(f-1)}-z)} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc} CD_{xy}^f & CD_{yx}^f \\ CD_{xz}^f & CD_{zx}^f \\ CU_{xy}^f & CU_{yx}^f \\ CU_{xz}^f & CU_{zx}^f \end{array} \right] \quad (6)$$

$$\left[ \overline{HD}_x^f \quad \overline{HD}_y^f \right] = \left[ -\mu^f \eta^f \quad -\mu^f \eta^f \right] \cdot \text{diag} \left( e^{-\eta^f(z-z^{(f-1)})} \right) \left[ \begin{array}{cc} CD_{xy}^f & CD_{yx}^f \\ CU_{xy}^f & CU_{yx}^f \end{array} \right] \quad (7)$$

정적변위벡터에 대한 식 (4) 과 식 (5) 를 식 (3) 의 변위함수에 대입할 경우 정적인 엄밀해를 구할 수 있다. 즉 피적분항은

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_n(bx) dx = \frac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)^n}{b^n \sqrt{a^2+b^2}}$$

의 형태를 포함하므로 각 변위함수는 방사방향 및 z 에 대한 미분과 Bessel 함수의 성질을 이용해 구해질 수 있다. 이로서 식 (3) 의 변위함수 피적분 항인 식 (4), (5) 에서 정적인 해인 식 (6), (7) 을 빼고 적분항 밖에 정적 엄밀 적분해를 더함으로써 파동수에 대해 변위함수를 수렴시킬 수 있고 적분 구간을 효과적으로 단축시켜 기본해를 구할 수 있다.

즉, 식 (3) 은 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$U^f(\omega, x, z, h) = \quad (8)$$

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} [(D^f - \overline{D}^f) J_n(\eta r)] d\eta d(r \sin \theta) + \overline{U}^f$$

여기서  $D^f$  및  $\overline{D}^f$  는 각각 동적 변위벡터 및 정적 변위벡터이고  $\overline{U}^f$  는 정적인 경우의 엄밀 적분해이다.

2차원 문제에 적용하기 위한 y 방향으로의 적분은 Bessel 함수의 주기를 파악하므로써 보다 쉽게 수행될 수 있다. 즉 식 (8) 의 피적분항에서 y 에

대한 함수는 Bessel 함수뿐이므로 식 (9) 와 같은 접근해를 이용하여 주기함수의 골(trough)과 봉(crest) 의 위치 및 값을 구함으로써 수치적분을 효과적으로 수행할 수 있다.

$$J_n(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (9)$$

### 3. 다층구조계의 연속방정식

식 (3) 에 표현된 변위의 적분형태는 각 층당 상향 및 하향 P 과 S 파에 대한 미지값들을 포함한다. 이 미지값들을 구하기 위하여 각 층경계에서의 연속조건, 자유면에서의 경계조건, 반무한면에서의 방사조건을 이용하여야 한다. 또한 하중이 가해지는 층에서의 응력 불연속성을 고려하기 위해 하중이 작용하는 지점을 사이에 두고 가상의 층을 도입한다.<sup>(4)</sup> 먼저 다층 반무한체의 경우에 대한 경계조건으로써 자유면에서의 응력이 0 이라는 조건을 이용하고, 각 층의 경계면에서 변위와 표면력의 연속조건을 만족시킨다.<sup>(13)</sup> 또한 가장 밑에 놓인 반무한체 ( $\ell = N+1$ ) 에서의 방사조건으로 추가적인 방정식을 이용할 수 있다. 또한 식 (3) 을 구성하는 각 파의 변위벡터들은 다음 조건들을 만족시켜야 한다.

$$\left\{ \begin{array}{l} PD_q^f(z, h) \\ VD_q^f(z, h) \\ HD_q^f(z, h) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} PD_q^{f-1}(z, h) \\ VD_q^{f-1}(z, h) \\ HD_q^{f-1}(z, h) \end{array} \right\} \quad (10)$$

그림 3 은 각 층에서 파의 반사와 투과를 나타내는 그림으로서 반무한면  $\ell = N+1$  에서는 파의 반사가 존재하지 않고 단지 하향의 파만 존재한다. 그러므로 상향 포텐셜이 0 이라는 조건을 성립시킬 수 있다.

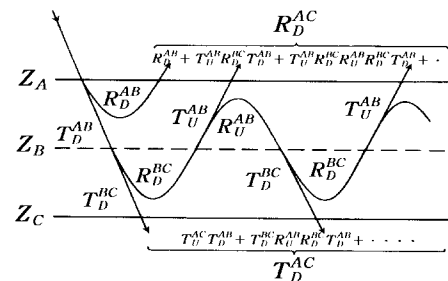


그림 3 반사 및 투과계수 (Kennet, 1983)

### 4. 반무한영역의 경계요소해석

영역  $\Omega$ , 경계  $\Gamma$  로 이루어진 다층반무한 구조계에서 영역  $\Omega$  내 임의의 한 점에서의 응력 평형 방정식을 응력텐서  $\sigma_{kj}$ , 물체력  $b_k$  와 변위  $u_k$  로 나타내면 식 (11) 과 같다.

$$\sigma_{kj,j} + \rho b_k - \rho \ddot{u}_k = 0 \tag{11}$$

가상일의 원리에 의해서 적분방정식을 형성하면, 식 (12) 과 같은 체적적분방정식이 구해진다.<sup>(6)</sup>

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,i} u_k^* d\Omega + \int_{\Omega} \rho b_k u_k^* d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_k u_k^* d\Omega = 0 \tag{12}$$

여기서,  $u_k^*$  는 영역  $\Omega$  에서 정의되는 응력  $\sigma_k^*$  와 물체력  $b_k^*$  하의 가상의 단위 동하중에 의한 변위이다. \* 로 표현되는 항을 단위 동적하중 조건 하의 기본해로 가정하면 단위 동하중에 의한 변위  $u_k^*$  는 평형방정식인 식 (13) 과 Navier 방정식인 식 (14) 를 만족시킨다.

$$\sigma_{kj,i}^* + \delta(S, F) \delta_{ik} - \rho \ddot{u}_k^* = 0 \tag{13}$$

$$\mu u_{k,ji}^* + (\lambda + \mu) u_{j,ik}^* + \delta(S, F) \delta_{ik} - \rho \ddot{u}_k^* = 0 \tag{14}$$

여기서,  $S$  와  $F$  는 각각 가상의 단위 동하중이 작용되는 점과 그 하중으로 인한 임의의 한 수진점이며,  $\sigma_{kj}^*$  는 가상의 단위 동적하중에 의한 임의의 한 점  $F$  에서의 응력이다. 또한  $\delta(S, F)$  는 Dirac delta 함수이고  $\delta_{ik}$  는 Kronecker delta 함수이다.

만약 물체력이 고려되지 않는 경우, 특이점의 영향을 고려한 구조계의 직접 경계적분방정식은 식 (15) 와 같이 나타낼 수 있다.

$$c_{ik} u_i + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_k^* p_k d\Gamma \tag{15}$$

여기서,  $p_k$  와  $p_k^*$  는 각각 실제 하중과 가상의 단위동하중에 의한 경계면  $\Gamma$  에서의 표면력이며,  $c_{ik}$  는 경계면의 기하학적 형상에 의해서 결정되는 상수이다.

그림 4 는 영역  $\Omega$  에 기하학적 경계(essential boundary)  $\Gamma_1$  과 역학적 경계(natural boundary)  $\Gamma_2$  의 두 영역으로 분할된 동적 선형탄성계를 수치적분하기 위해 경계적분경로를 경계요소와 경계

절점으로 이산화한 형태를 나타낸다. 따라서 식 (15) 는 다음의 식 (16) 과 같이 선형요소로 이산화하여 임의의 요소에서의 적분방정식으로 표현될 수 있다.

$$\int_{\Gamma_1} [u^*][\Phi] d\Gamma = \int_{-1}^{+1} [u^*][\Phi] |J| d\xi \tag{16a}$$

$$= \sum_{m=1}^M [u^*][[\phi_1][\phi_2]] |J| W_m = [[g_1^j][g_2^j]]$$

$$\int_{\Gamma_2} [p^*][\Phi] d\Gamma = \int_{-1}^{+1} [p^*][\Phi] |J| d\xi \tag{16b}$$

$$= \sum_{m=1}^M [p^*][[\phi_1][\phi_2]] |J| W_m = [[h_1^j][h_2^j]]$$

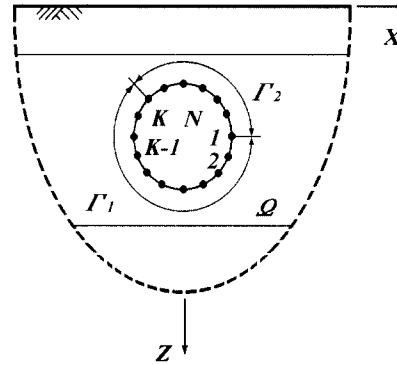


그림 4 기하학적 경계 및 역학적 경계

여기서,  $[\Phi]$  는 부행렬  $[\phi_k]$  로 이루어진 형상함수 행렬이다. 또한  $[p^*]$  와  $[u^*]$  는 각각 응력과 변위에 대한 다층 동적기본해의 행렬이다.  $m$  은 수치적분점의 수이고,  $|J|$  는 Jacobian 행렬식이며,  $W_m$  은 Gauss 적분 가중치이다.

이산화된 요소사이에 모서리점이 포함되는 경우 표면력의 불연속이 발생할 수 있으므로 이 절점을 중복시켜서 풀어야 한다. 즉 2 개의 요소 사이에서 앞부분의 절점과 뒷부분에서의 절점으로 나눈다.

그러나 변위는 일정하여야 하므로 절점을 중복시킬 필요가 없다. 이 식을 이용해 전체 절점에 대하여 행렬을 구성하면 식 (17) 과 같다.

$$[H] \{U\} = [G] \{P\} \tag{17}$$

### 5. 다층반무한 경계요소 해석프로그램

본 연구에서 개발한 다층반무한 구조계를 해석하기 위한 프로그램의 입력자료는 층의 갯수, 층의 물성, 경계면의 깊이, 이산화된 경계면의 절점, 경계조건으로 주어지는 주파수, 기지의 응력값 또는 변위

값이다. 식 (17) 에서  $[G]$ 행렬과  $[H]$ 행렬을 구하기 위해서 경계를 이산화시킨다.

$[G]$ 행렬과  $[H]$ 행렬의 내부요소인  $g^{pq}$   $h^{pq}$  는 4 개의 Gauss 점을 사용하여 구하였다.

수치기본해의 적분은 각각의  $\theta$  에 대하여  $\eta$  를 증가시키면서 동적기본해의 피적분항과 정적기본해의 피적분항의 차이가 0 에 가까운 값  $\epsilon$  이하가 될 때까지 구한다. 주어진 역학적 경계조건과 기하학적 경계조건을 조합하여 계방정식을 형성하며, 이 계방정식으로부터 경계  $\Gamma$ 에서의 미지의 변위와 응력이 구해진다. 프로그램 해석결과의 정확성은 수치기본해를 이용하여 영향계수를 구하기 이전단계에서 결정된다. 즉 수치기본해의 정확성이 전체 해석 최종결과의 정확성을 결정하게 된다.

## 6. 수치해석 및 분석

### 6.1 해석방법의 비교 검증

본 연구에서 개발된 경계요소해석방법의 타당성 및 정확성을 검증하기 위해 Ricker 파형을 이용하여 해석을 실시하였다. Ricker 파형은 시간영역 뿐만 아니라 주파수영역의 초기에 빠른 감쇠 특성을 보이므로 해석 단계를 줄일 수 있는 잇점이 있다.<sup>(9)</sup>

시간영역에서의 Ricker 파형은 식 (18) 과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(t) = A(1 - 2\tau^2)e^{-\tau^2} \quad (18)$$

여기서  $\tau = (t - t_s)/t_0$  이고,  $t_s$ 는 최대값이 발생하는 시간이며,  $A$  는 amplitude,  $t_0$ 는 파형의 지배적인 주기이다. 본 연구에서 사용된 하중의 경우,  $t_0$ 를  $1/\pi$  로 하고,  $t_s$ 를  $3/\pi$  로 하였다. 이는 지배적인 주파수가  $1\text{ Hz}$  이고, 하중의 최대값이 0.95 초에 나타나는 형태를 갖는다.

본 연구에서는 시간영역의 응답을 구하기 위하여 FFT(Fast Fourier Transformation)을 이용한 역변환을 수행하였다. 그림 5 와 같이  $P(t) = 1\text{ kN}$ 의 작용하중을 표면상의 한 점 A 에 가한 후 작용점으로부터 20m 떨어진 표면상의 한 점 B에서의 응답을 구하였다.

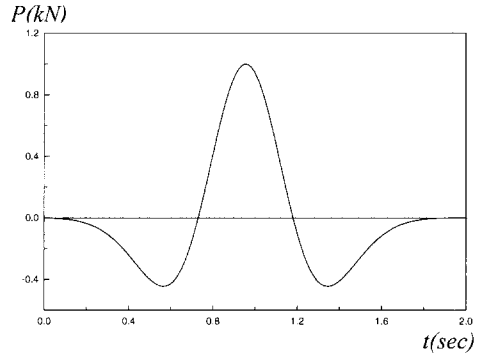


그림 5 작용하중

그림 6 은 검증대상인 균질 반무한 구조계를 나타낸다. 본 연구방법의 타당성의 검증을 위한 기존 해석결과<sup>(9)</sup>와의 비교를 위해 지반 물성으로서 탄성계수는  $2.66 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$ , 포아송비는 0.33, 밀도는  $2.0 \text{ t/m}^3$  으로 동일하게 하였다. 그림 7 에서와 같이 본 해석결과는 기존의 경계요소 해석 결과와 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

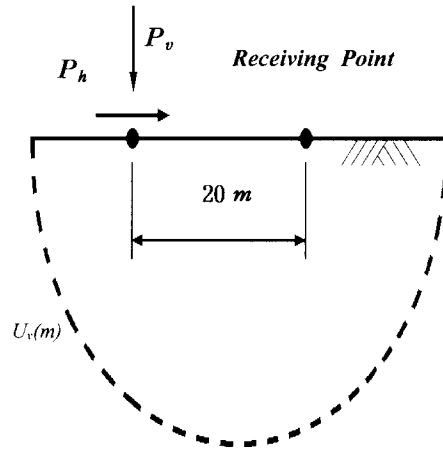
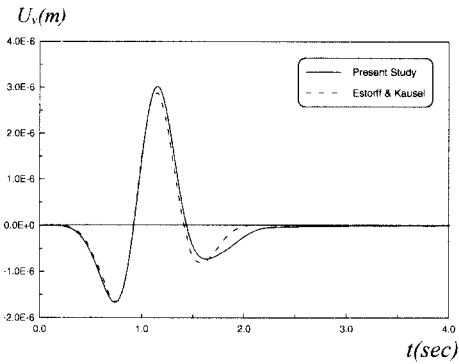
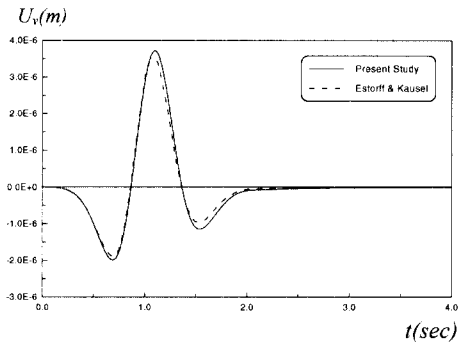


그림 6 균질 반무한 구조계

다층의 영향을 고려한 해석에 대한 본 연구방법의 타당성 검증을 위하여 기반암위에 적층된 균일 지반에 대한 해석결과를 비교하였다. 해석 대상의 형태는 그림 8 에 나타낸 바와 같으며, 상부 균일지층의 물성은 첫 번째 예제와 동일한 것을 사용하였다.



(a) 수직하중에 의한 수직 응답



(b) 수평하중에 의한 수평 응답

그림 7 균질 반무한 구조계 해석 결과의 비교

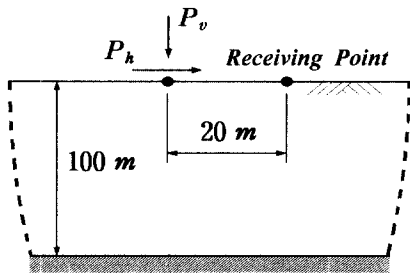
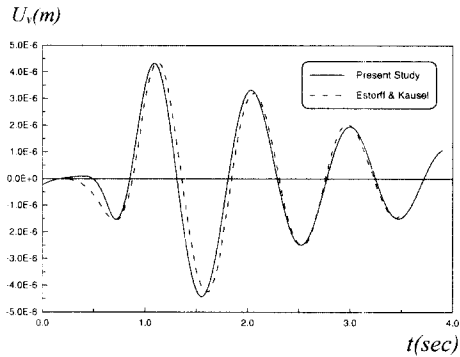


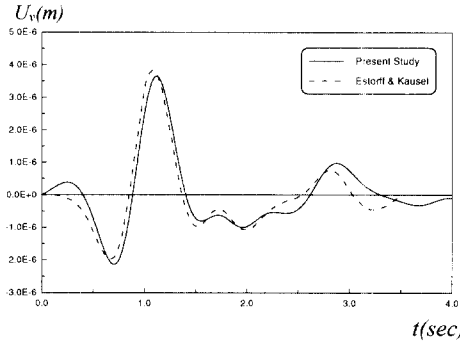
그림 8 기반암위에 적층된 구조계

기반암위에 적층된 지반에 대한 해석결과도 그림 9 에서와 같이 기존의 경계요소 해석 결과와 비교 적 잘 일치함을 알 수 있었다. 이로부터 본 연구방법의 타당성을 입증할 수 있었다. 0.5 초 이내 초기시간에서의 수평 및 수직응답과 3 초 이후의 수평응답 해석결과 비교에서 다소 차이가 발생하였는데, 이는 주파수해석 결과의 역변환시 발생하는

aliasing 효과 및 일정주파수 이후에서의 truncation 때문에 발생하는 오차인 것으로 사료된다.



(a) 수직하중에 의한 수직 응답



(b) 수평하중에 의한 수평 응답

그림 9 기반암위에 적층된 구조계 해석 결과의 비교

## 6.2 다층 반무한 구조계의 수치해석

원형 공동이 반무한 다층 지반에 건설되었을 때 공동내의 동적압력에 대한 구조물의 거동양상을 검토하기 위하여 반경 4m 인 공동의 내부면에 그림 5 와 같은 Ricker 파형 압력을 작용시킨후 공동 내부면 A 점에서의 y 방향 응답을 구하였다. 지름 8m 인 공동은 그림 10에서와 같이 16개의 경계요소로 구성하였다. 먼저 균일지반에서 공동의 깊이에 따른 응답의 변화를 알아보기 위해 표면으로부터 공동 천단부까지의 깊이  $H_1$  을 각각 2m, 4m, 8m, 16m 로 변화시켰다. 이 때의 지반의 물성은 표 1 과 같이 탄성계수  $E = 2.66 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$ , 밀도  $\rho = 2.0 \text{ t/m}^3$ , 포아송비  $\nu = 0.33$  으로 하였다.

시간영역에서의 응답으로 표현하기 위해 전술한 바와 같이 주파수영역 응답의 FFT 역변환을 수행하였다.

이 때 공동의 천단부, 측벽부, 저면부 각점에서의 응답을 그림 11에 나타내었다. 수직변위의 경우 자유면에 가까운 천단부의 변위가 공동 깊이에 따른 영향을 가장 크게 받을 수 있는 반면 측벽부 수평변위의 경우 공동 깊이에 따른 영향이 비교적 작음을 알 수 있었다.

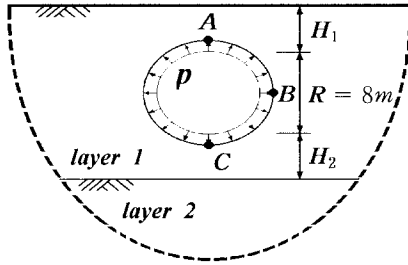


그림 10 다층 반무한 구조계내의 공동

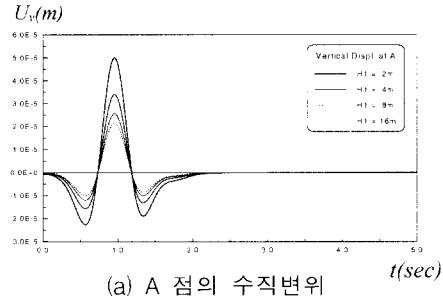
표 1 해석대상 물성

내 용		물성치	
제 1 층	탄성계수	$E_1$	$2.66 \times 10^9 \text{ kN/m}^2$
	포아송비	$\nu_1$	0.33
	밀도	$\rho_1$	$2.0 \text{ ton/m}^3$
	감쇠비	$\zeta_1$	0.0001
제 2 층	탄성계수	$E_2$	$5.32 \times 10^9 \text{ kN/m}^2$ $10.64 \times 10^9 \text{ kN/m}^2$ $21.28 \times 10^9 \text{ kN/m}^2$
	포아송비, 밀도, 감쇠비는 제 1층과 동일		

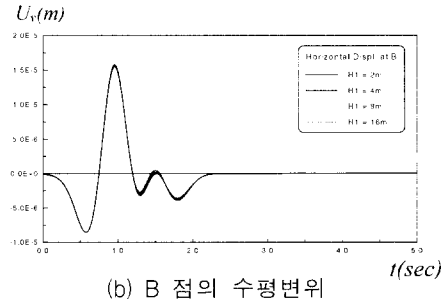
다층의 영향을 검토하기 위해 2개의 층으로 구성된 지반에 위치한 반경 4m인 공동의 거동을 해석하였다. 지표로부터 공동 천단부까지의 깊이를  $H_1 = 4m$  로, 공동 저면부로부터 제 2 층까지의 깊이를  $H_2 = 4m$  로 고정시키고, 제 2 층의 지반 물성을 변화시켰다. 즉, 제 1 층의 물성은 앞의 예제와 동일하게 하고 제 2 층의 탄성계수만을 각각  $E = 2.66 \times 10^9 \text{ kN}$ ,  $5.32 \times 10^9 \text{ kN}$ ,  $10.64 \times 10^9 \text{ kN}$ ,  $21.28 \times 10^9 \text{ kN}$ , 의 4경우로 변화시켜가며 그 영향을 검토하였다. 이 때 각 층의 밀도, 포아송비는 모두 동일한 것으로 하였다. 그 결과는 그림 12에 나타낸

바와 같이 공동내 수직 변위의 경우, 단층의 경우와는 다르게 천단부 보다는 저면부에서 각 층 강성비가 증가함에 따라 그 영향이 더욱 크게 나타났다.

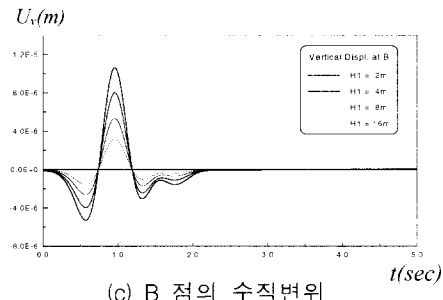
즉 각 층 경계에서의 탄성과 반사의 영향이 더 크게 나타남을 알 수 있었다. 특히 측벽부 수평변위의 경우 층 강성비로 인한 반사파의 영향으로 약 1.3초 이후의 변위응답이 증가하는 형태를 나타낸다.



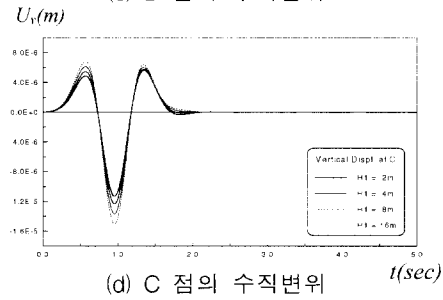
(a) A 점의 수직변위



(b) B 점의 수평변위



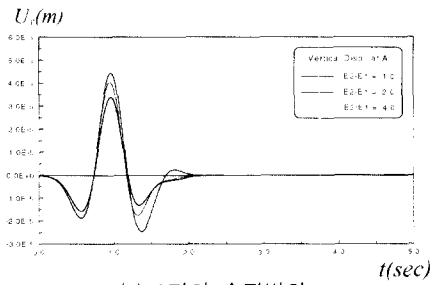
(c) B 점의 수직변위



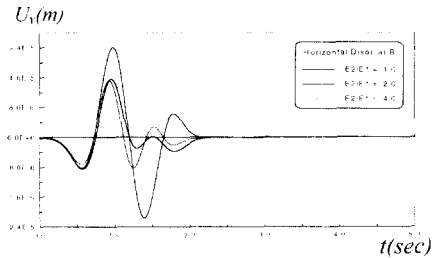
(d) C 점의 수직변위

그림 11 공동의 깊이에 따른 변위

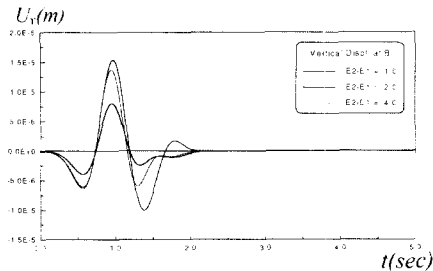




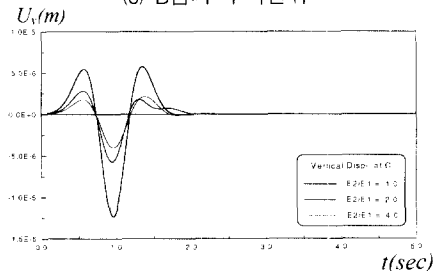
(a) A점의 수직변위



(b) B점의 수평변위



(c) B점의 수직변위



(d) C점의 수직변위

그림 12 층의 강성비에 따른 변위

일반적으로 경계요소법은 다양한 물성을 포함하는 다영역 문제 및 복잡한 기하학적 성질을 갖는 해석대상구조계를 해석하는 데에는 많은 문제점 및 어려움이 따르므로 해석 대상구조물 주변을 유한요소로 모델링하고 방사조건을 만족하는 외부영역을 본 경계요소법으로 모델링하여 조합해석할 경우, 더욱 다양한 구조물에 대해 효과적인 해석을 수행

할 수 있을 것으로 사료된다.

## 7. 결 론

본 연구에서는 층의 경계에서 파의 반사와 투과를 고려한 wavenumber 적분을 통하여 동하중에 대한 다층반무한 기본해를 도출하였고, 이를 경계요소법에 적용하여 주파수 영역에서의 다층반무한 구조계에 대한 해석기법을 개발하였다. 본 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 주파수영역의 정적 적분해와 Bessel 함수의 점근식을 이용하여 Fourier 적분을 효과적으로 수행할 수 있는 축대칭문제를 2차원문제로 변환시켜 다층반무한 구조계에서의 2차원 동적 수치기본해를 구할 수 있었다.
2. 동하중에 대한 다층반무한 수치기본해를 사용한 본 연구의 해석기법으로 층수에 대한 제한없이 각 층의 접합부와 표면을 이산화하지 않고 최소한의 요소 수로 효율적인 해석을 수행할 수 있음을 보였다.
3. 균질 반무한 구조계 및 기반암위에 적층된 구조계에 대한 해석결과와 기존의 해석결과와의 비교를 통해 본 연구방법의 타당성을 검증할 수 있었다.
4. 다층지반에 공동이 위치할 경우 그 동적거동은 공동의 깊이 및 주변 다층지반 물성에 따라 그 차이가 크게 발생하므로 실제 구조계에 대한 동적 거동을 해석할 경우 다층을 고려한 해석이 수행되어야 할 것으로 사료된다.

## 감사의 글

본 연구는 과학기술처의 '97년도 엔지니어링 핵심공통기반기술개발사업에 의해 수행된 연구의 일부분으로서 연구비를 지원해 준 당국에 깊은 감사를 드립니다.

## 참 고 문 헌

1. Wolf, J.P., and Song, C., *Finite-Element Modelling of Unbounded Media*, John-Wiley & Sons, New York, 1996, pp. 331.
2. Dominguez, J., and Meise, T., "On the Use of BEM for Wave Propagation in Infinite

- Domains," *Engineering Analysis with Boundary Elements* 8, 1991, pp. 132-138.
3. Luco, J.E., and Apsel, R.J., "On the Green's Functions for a Layered Half-Space, Part I," *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 73, 1983, pp. 909-929.
  4. Banaugh, R.P., and Goldsmith, W., "Diffraction of Steady Elastic Waves by Surfaces of Arbitrary Shape," *Journal of Applied Mechanics, Trans., ASME*, 30, 1963, pp. 589-592.
  5. Manolis, G.D., and Beskos, D.E., "Dynamic Response of Line Tunnels by an Isoparametric Boundary Element Method," *Computation Methods in Applied Mechanics in Engineering*, 36, 1983, pp. 291-307.
  6. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., and Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 1984, pp. 464.
  7. Baberjee, P.K., and Butterfield, R., *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, New York, 1981, pp. 452
  8. Wang, S., and Schmid, G., "Dynamic Structure-Soil-Structure Interaction by FEM and BEM," *Computational Mechanics*, 9, 1992, pp. 347-357.
  9. Von Estorff, O., Pais, A.L., and Kausel, E., "Some Observation on Time Domain and Frequency Domain Boundary Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, 1990, pp. 785-800.
  10. Manolis, G.D., and Beskos, D.E., *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, Uwin Hyman, London, 1988, pp. 282
  11. Harkrider, D.G., "Surface Waves in Multilayered Elastic Media, Part I. Rayleigh and Love Waves from Buried Sources in a Multilayered Elastic Half-Space," *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 54, 1964, pp. 627-680.
  12. Karasudhi, P., *Foundations of Solid Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991, pp. 439.
  13. Kennet, B.L.N., *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, pp. 342.
  14. Achenbach, J.D., *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, New York, 1984, pp. 425.