

# Drucker-Prager 파괴기준을 적용한 축대칭 탄소성 터널의 이론해

Semi-analytical Solution for Axisymmetric  
Tunnels in Drucker-Prager Medium

김 광 진\*<sup>1</sup>  
Kim, Kwang-Jin  
김 학 문\*<sup>2</sup>  
Kim, Hak-Moon

---

---

## Abstract

A semi-analytical solution is derived to solve the elastic-plastic behavior of the axisymmetric tunnels in Drucker-Prager medium. Based on this analytical solution, a computer program FDAXP, is developed. Parametric studies are carried out to verify the FDAXP program, and the results were found to be satisfactory.

This simple solution could be incorporated into the preliminary design, analysis of deep underground tunnel as well as tunnels with unfavourable geotechnical conditions. The program provided a useful means of checking the Drucker-Prager model and its associated computational algorithms in other tunnel programs.

## 요 지

Drucker-Prager의 항복기준을 이용한 원형터널의 해석을 위하여 간략한 수치해석 기법이 유도되었다. 유도된 이론해를 근거로 컴퓨터 프로그램 FDAXP가 개발되었고, 예제 해석을 통하여 프로그램의 신뢰도를 검증하여 만족한 결과를 얻었다.

소개된 프로그램 FDAXP는 깊은 터널과 쉽게 소성변형이 발생하는 지반 및 암반에서의 초기 터널해석에 손쉽게 적용될 수 있으며, 기존의 상용 프로그램들에서 Drucker-Prager model을 검증하는데에 매우 유용하게 사용되리라 사료된다.

Keywords : Drucker-Prager model, Semi-Analytical solution, Axisymmetric tunnel, Elastic zone, Plastic zone, Program development

---

---

\*<sup>1</sup> 정희원, Comtech Research 사장

\*<sup>2</sup> 정희원, 단국대학교 공과대학 토목공학과 부교수

## 1. 서론

연약지반, 느슨한 사력층, 강도가 낮은 암반과 파쇄대가 발달한 암반 등에서 터널을 굴착하면 터널 주변의 지반에는 소성영역이 발생되어 상당한 소성변형의 위험을 유발시킬 수 있다.

터널 해석에서 응력-변형을 관계는 2차원, 3차원 조합응력하에서 탄성에서 소성까지의 재료파괴를 정의하는 항복조건을 필요로 한다.

일반적으로 흙이나 암반의 파괴조건으로는 Mohr-Coulomb과 Drucker-Prager 항복조건이 많이 사용되고 있다. Mohr-Coulomb 제안은 흙이나 암석·암반에 비교적 실험치와 일치한다고 하지만  $\sigma^2$ 인 중간 주응력이 파괴에 작용할 수 없는 단점을 가지고 있다.

본 논문은 실제터널주변에 작용하는  $\sigma^2$ 의 중요성을 고려한 Drucker-Prager의 항복조건에 대하여 이론해를 유도하고, 이에 관한 컴퓨터 Program을 개발하여 Mohr-Coulomb의 항복조건과 비교 분석하였다.

간략한 예제설계를 통하여 컴퓨터 Program의 신뢰도를 평가하였으며, 이러한 Drucker-Prager의 이론해(Semi-Analytical Solution)를 통하여 기존의 상용 터널해석 Program의 안정성을 검증할 수 있도록 하였다.

## 2. 이론 개발

그림 1. 에서 터널 반경이  $r_0$ 인 원형터널에 정수압적인 외부응력  $P_0$ 와 터널내부의 지지압  $P_i$ 가 작용하고 있다. 터널 내부지지압  $P_i$ 는 외력  $P_0$ 가 작용시에 터널내부에서 지지하는 Liner의 저항하는 힘이나 응력상태를 나타낸다.

균등한 외부응력  $P_0$ 가 작용하는 동안에 특정의 응력이력 상태를 유발하기 위하여 원지반 응력상태는 고려치 않았고, 주변암 재료는 외부응력이 내부지지압 보다 크지 않을 경우에 항복하지 않는다는 조건을 부여하였다.

수학적 편의를 위하여 기본관계식들을 탄성

영역의 해법, 경계응력조건 그리고 소성영역해법 순서로 전개하려고 한다.

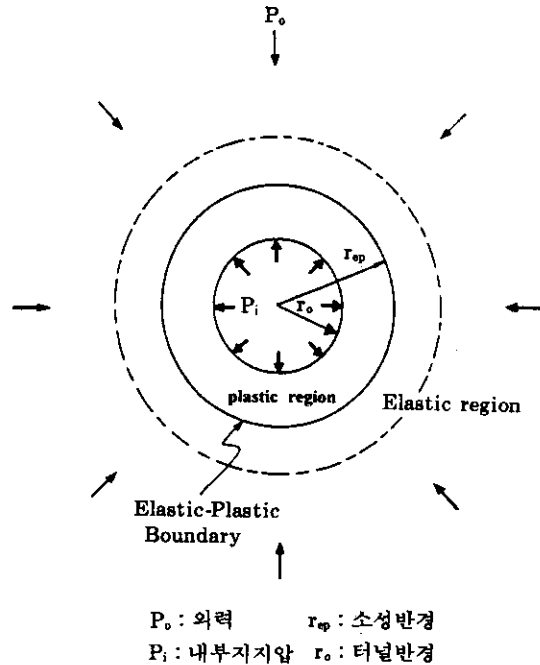


그림 1. 정수압적 외력을 받고 있는 원형터널

### 2.1 기본관계식

#### 2.1.1 평형조건식

원통 대칭인 경우, 평형에 대한 미분방정식은 다음과 같다.

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (1)$$

여기서,

$r$ : 터널의 방사방향거리

$\sigma_r$ : 방사방향 응력(거리  $r$ 지점)

$\sigma_\theta$ : 접선응력(거리  $r$ 지점)

#### 2.1.2 적합조건식

변형을 방사방향 변위( $U_r$ )로 표시하면 다음과 같다.

$$\epsilon_r = \frac{dUr}{dr} \quad (2)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{Ur}{r} \quad (3)$$

여기서,

$\epsilon_r$ : 방사방향 변형(터널 중심에서 거리 r 위치)

$\epsilon_\theta$ : 접선방향 변형(터널 중심에서 거리 r 위치)

식 (3)을 (2)에 대입하면 다음의 공식을 얻을 수 있다.

$$r \frac{d\epsilon_\theta}{dr} + (\epsilon_\theta - \epsilon_r) = 0 \quad (4)$$

### 2.1.3 항복조건식

Drucker-Prager의 파괴방정식,

$$q = \bar{\alpha}p + \bar{\beta} \quad (5)$$

여기서,

$$\bar{\alpha} = \frac{6 \sin \phi}{(3 - \sin \phi)}$$

$$\bar{\beta} = \frac{3(1 - \sin \phi)}{(3 - \sin \phi)} \cdot \sigma_c$$

$$p = 1/3(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) \quad (6)$$

그리고,

$$q^2 = 0.5[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2] \quad (7)$$

여기서,  $\phi$ : 지반의 내부마찰각

$\sigma_c$ : 일축압축강도

$\sigma_r$ : 방사방향 응력

$\sigma_\theta$ : 접선방향 응력

$\sigma_z$ : 축방향 응력

지반의 거동은 파괴면 이하에서 선형탄성특성을, 파괴면에서는 소성변형을 나타내도록 가정하였다.

### 2.1.4 소성영역에서의 구성방정식

파괴방정식 (5)에 근거를 둔 탄소성 증분 구성 관계식은 Bathe et. al.6)(1974) 등이 발표한 논문을 참조하였으며 다음과 같다.

$$\Delta \sigma_r = C_{11} \Delta \epsilon_r + C_{12} \Delta \epsilon_\theta \quad (8)$$

$$\Delta \sigma_\theta = C_{12} \Delta \epsilon_r + C_{22} \Delta \epsilon_\theta \quad (9)$$

$\Delta$ 표시는 응력과 변형의 미소 증분을 말한다.

$$C_{11} = \left( K + \frac{4}{3}G \right) - (\beta_1 S_r + \beta_2)^2$$

$$C_{12} = \left( K + \frac{2}{3}G \right) - (\beta_1 S_r + \beta_2)(\beta_1 S_\theta + \beta_2)$$

$$C_{22} = \left( K + \frac{4}{3}G \right) - (\beta_1 S_\theta + \beta_2)^2$$

$$\beta_1 = \frac{(3)^{1/2}G}{\beta_0 q}$$

$$\beta_2 = \frac{\bar{\alpha}K}{(3)^{1/2}\beta_0}$$

$$\beta_0 = \left( G + \frac{1}{3}\bar{\alpha}^2 K \right)^{1/2}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$S_r = \sigma_r - p$$

$$S_\theta = \sigma_\theta - p$$

계수 G와 K는 전단과 체적변화계수이며 식 (8)과 (9)를 도치(역전환)시킴으로서 응력증분이 포함된 변형증분을 구할 수 있다.

$$\Delta \epsilon_r = a_3 \Delta \sigma_r + a_3 \Delta \sigma_\theta \quad (10)$$

$$\Delta \epsilon_\theta = a_4 \Delta \sigma_r + a_4 \Delta \sigma_\theta \quad (11)$$

여기서,

$$a_2 = C_{22} / (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)$$

$$a_3 = -C_{12} / (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)$$

$$a_4 = C_{11} / (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)$$

증분과 변형률 가정하에서 터널축방향 응력증가분은 방사방향 응력증분과 접선방향 응력증분의 성분으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \sigma_z = a_5 \Delta \sigma_r + a_6 \Delta \sigma_\theta \quad (12)$$

여기서,

$$a_5 = C_{13}a_2 + C_{23}a_3$$

$$a_6 = C_{13}a_3 + C_{23}a_4$$

$$C_{13} = (K - 2/3G) - (\beta_1 S_r + \beta_2)(\beta_2 S_r + \beta_2)$$

$$C_{23} = (K - 2/3G) - (\beta_1 S_\theta + \beta_2)(\beta_1 S_r + \beta_2)$$

$$S_r = \sigma_r - p$$

### 2.1.5 탄성영역에서의 구성방정식

탄성영역에서는 응력과 변형을 직선관계로 표시하면,

$$E' \epsilon_r = \sigma_r - \nu' \sigma_\theta \quad (13)$$

$$E' \epsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu' \sigma_r \quad (14)$$

E'와  $\nu'$ 의 값은 탄성계수(E)와 포아슨비( $\nu$ )로 나타낼 수 있다.

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$\nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$$

평면변형률 상태에서 터널 축방향 응력은 다음과 같다.

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (15)$$

## 2.2 탄성영역에서의 해법

탄성영역에서의 해법은 탄소성 경계영역의 응력상태로 간단히 유도될 수 있다.

정수압적 외부응력( $P_0$ ), 탄소성 경계에서의 방사방향 응력( $\sigma_{re}$ )과 방사방향 거리( $r_{ep}$ )가 주어지면 방사방향 응력과 접선응력은 방사방향의 거리성분으로 다음과 같이 나타낼 수 있다. (Hendron et. al<sup>7)</sup>).

$$\sigma_r = P_0 - (P_0 - \sigma_{re}) \left( \frac{r_{ep}}{r} \right)^2 \quad (16)$$

$$\sigma_\theta = P_0 + (P_0 - \sigma_{re}) \left( \frac{r_{ep}}{r} \right)^2 \quad (17)$$

탄성영역에서의 위 식은,

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2P_0 \quad (18)$$

식(18)을 식(15)에 대입하면

$$\sigma_z = 2\nu P_0 \quad (19)$$

그러므로 탄성영역에서의 축방향응력은 일정하다는 것을 알 수 있다. 응력상태가 구해지면 변형량은 식(13)과 식(14)로 쉽게 산출할 수 있다.

## 2.3 경계 응력 조건

### 2.3.1 터널내부 표면의 응력조건

터널내부 표면( $r=r_0$ )의 방사방향 응력을 내부압력( $P_i$ )으로 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_r(r=r_0) = P_i \quad (20)$$

### 2.3.2 탄소성 경계에서의 응력조건

탄소성 경계에서의 응력들은 탄성조건과 파괴공식을 모두 만족시켜야 한다. 탄성영역에서의 평균압력(P)과 편차응력(q) 값은 식(18)과 (19)를 식(6)과 (7)에 대입함으로써 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$P = 2/3(1+\nu)P_0 \quad (21)$$

$$q^2 = 3\sigma_r^2 - 6P_0\sigma_r + 4(1-\nu+\nu^2)P_0^2 \quad (22)$$

또한 탄소성 경계에서 응력 P, q는 항복면을 뜻하는 것이므로, 이 지점에서 방사방향응력과 접선방향 응력을 외부응력( $P_0$ )의 성분으로 나타내기 위하여 식(21)과 (22)를 식(5)에 대입하였다.

$$\sigma_{r(r=r_{ep})} = \sigma_{re} = P_0 - (h_1 P_0^2 + h_2 P_0 + h_3)^{1/2} \quad (23)$$

$$\sigma_{\theta(r=r_{ep})} = \sigma_{\theta e} = P_0 + (h_1 P_0^2 + h_2 P_0 + h_3)^{1/2} \quad (24)$$

여기서,

$$h_1 = 1 + \frac{4}{27}(1+\nu)^2 \alpha^2 - \frac{4}{3}(1-\nu+\nu^2)$$

$$h_2 = \frac{4}{9}(1+\nu)\bar{\alpha}\bar{\beta}$$

$$h_3 = \frac{1}{3}\bar{\beta}^2$$

## 2.4 소성영역에서의 해법

소성영역에서 응력-변형 관계를 규명하기 위하여, 이 영역을 같은 크기의 길이로 등분하고, 분할된 요소 내에서의 응력과 변형은 직선으로 변한다고 가정하여 관련식을 다음과 같이 나타내었다.

$$\sigma_r = N_1 \sigma_{r_i} + N_2 \sigma_{r_{i+1}} \quad (25)$$

$$\sigma_\theta = N_1 \sigma_{\theta_i} + N_2 \sigma_{\theta_{i+1}} \quad (26)$$

$$\epsilon_r = N_1 \epsilon_{r_i} + N_2 \epsilon_{r_{i+1}} \quad (27)$$

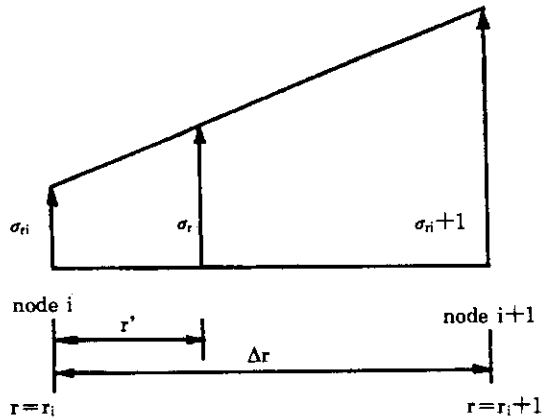
$$\epsilon_\theta = N_1 \epsilon_{\theta_i} + N_2 \epsilon_{\theta_{i+1}} \quad (28)$$

여기서,  $N_1 = 1 - \frac{r'}{\Delta r}$

$$N_2 = \frac{r'}{\Delta r}$$

그러므로 같은 영역에 있는 평형조건식(1)은 다음과 같이 절점응력으로 표시될 수 있다.

$$a_1 \sigma_{r_i} + b_1 \sigma_{\theta_i} = c_1 \sigma_{r_{i+1}} \quad (29)$$



( $\epsilon_0$ 와  $\epsilon_0$ 는 이 영역에서 선형변형을 하는 것으로 가정한다.)

그림 2. 소성영역에서 가정한 응력과 변형의 직선변화

여기서,  $a_1 = 1 - \frac{r_i}{\Delta r}$

$$b_1 = -1$$

$$c_1 = -\frac{r_i}{\Delta r}$$

유사하게, 적합조건식(4)는 그 영역 내에서 절점변형으로 다음과 같이 유도될 것이다.

$$b_1 \epsilon_{ri} + a_1 \epsilon_{\theta i} = c_1 \epsilon_{\theta i+1} \quad (30)$$

외부응력이  $P_0(j-1)$ 일 때 절점  $i$ 에서 응력과 변형들을  $\bar{\sigma}_{ri}$ ,  $\bar{\sigma}_{\theta i}$ ,  $\bar{\epsilon}_{ri}$ ,  $\bar{\epsilon}_{\theta i}$ 라고 하고, 외부응력이  $P_0(j)$ 일 때 각각  $\sigma_{ri}$ ,  $\sigma_{\theta i}$ ,  $\epsilon_{ri}$ ,  $\epsilon_{\theta i}$ 들을 각각 다음과 같은 식으로 나타내었다.

$$\sigma_{ri} = \bar{\sigma}_{ri} + \Delta \sigma_{ri} \quad (31)$$

$$\sigma_{\theta i} = \bar{\sigma}_{\theta i} + \Delta \sigma_{\theta i} \quad (32)$$

$$\epsilon_{ri} = \bar{\epsilon}_{ri} + \Delta \epsilon_{ri} \quad (33)$$

$$\epsilon_{\theta i} = \bar{\epsilon}_{\theta i} + \Delta \epsilon_{\theta i} \quad (34)$$

하중단계  $j-1$ 일 때 절점  $i$ 에서 응력상태는  $\bar{\sigma}_r$ 와  $\bar{\sigma}_{\theta}$ 이고, 하중단계  $j$ 일 때 절점  $i+1$ 에서 방사방향 응력이  $\sigma_{ri+1}$ 이면 절점에서의 평형조건식(29)는 아래와 같은 충분성분을 포함한 식으로 주어질 수 있다.

$$a_1 \Delta \sigma_{ri} + b_1 \Delta \sigma_{\theta i} = c_1 \sigma_{\theta i+1} - d_1 \quad (35)$$

여기서,  $d_1 = a_1 \sigma_{ri} + b_1 \sigma_{\theta i}$

유사하게, 하중단계  $j-1$ 일 때 절점  $i$ 에서 변형상태는  $\bar{\epsilon}_r$ 와  $\bar{\epsilon}_{\theta}$ 이고, 하중단계  $j$ 일 때 절점  $i+1$ 에서 접선변형이  $\epsilon_{\theta i+1}$ 이면 절점변형이 고려된 적합조건식(30)은 다음과 같은 충분성분을 포함한 식으로 나타낼 수 있다.

$$b_1 \Delta \epsilon_{ri} + a_1 \Delta \epsilon_{\theta i} = c_1 \sigma_{\theta i+1} - d_2 \quad (36)$$

여기서,  $d_2 = b_1 \epsilon_{ri} + a_1 \epsilon_{\theta i}$

위의 적합조건식(36)은 소성영역에서의 구성방정식(식 10과 11)을 이용하여 응력충분성을 포함시킬 수 있다.

$$b_2 \Delta \sigma_{ri} + b_3 \Delta \sigma_{\theta i} = c_1 \epsilon_{\theta i+1} - d_2 \quad (37)$$

여기서,  $b_2 = b_1 a_2 + a_1 a_3$

$$b_3 = b_1 a_3 + a_1 a_4$$

절점에 대한 평형조건식(식36)과 적합조건식(식37)을 동시에 풀게 되면 방사방향 응력충분과 접선방향 응력충분을 같이 구할 수 있다.

$$\Delta \sigma_{ri} = e_1 \sigma_{ri+1} + e_2 \epsilon_{\theta i+1} + e_3 \quad (38)$$

여기서,  $e_1 = \frac{b_3 c_1}{d_0}$

$$e_2 = -\frac{b_1 c_1}{d_0}$$

$$e_3 = \frac{1}{d_0} (b_1 d_2 - b_3 d_1)$$

$$d_0 = a_1 b_3 - b_1 b_2$$

그리고,

$$\Delta \sigma_{\theta i} = e_4 \sigma_{ri+1} + e_5 \epsilon_{\theta i+1} + e_6 \quad (39)$$

여기서,  $e_4 = -\frac{b_2 c_2}{d_0}$

$$e_5 = \frac{a_1 c_1}{d_0}$$

$$e_6 = \frac{1}{d_0} (b_2 d_1 - a_1 d_2)$$

식(38)의  $\Delta \sigma_{ri}$ 를 식(31)에 대입하면,

$$\sigma_{ri} = e_1 \sigma_{ri+1} + e_2 \epsilon_{\theta i+1} + f_1 \quad (40)$$

여기서,  $f_1 = \bar{\sigma}_{ri} + e_3$

절점  $i$ 에서 접선변형( $\epsilon_{\theta i}$ )은 식(11)과 식(34)로부터 유도되어 응력충분( $\Delta \sigma_{ri}$ 와  $\Delta \sigma_{\theta i}$ )형태로 다음과 같이 얻어진다.

$$\epsilon_{\theta i} = \bar{\epsilon}_{\theta i} + a_3 \Delta \sigma_{r i} + a_4 \Delta \sigma_{\theta i} \quad (41)$$

식(38)의  $\Delta \sigma_{r i}$ 와 식(39)의  $\Delta \sigma_{\theta i}$ 를 뒷식(41)에 치환시키면

$$\epsilon_{\theta i} = f_2 \sigma_{r i+1} + f_3 \epsilon_{\theta i+1} + f_4 \quad (42)$$

여기서,  $f_2 = a_3 e_1 + a_4 e_2$

$$f_3 = a_3 e_2 + a_4 e_3$$

$$f_4 = \bar{\epsilon}_{\theta i} + a_3 e_3 + a_4 e_6$$

식(40)과 (42)를 Matrix 형태로 나타내면,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{r i} \\ \epsilon_{\theta i} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ f_2 & f_3 \end{bmatrix}_i \begin{pmatrix} \sigma_{r i+1} \\ \epsilon_{\theta i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_4 \end{pmatrix}_i \quad (43)$$

이러한 Matrix 형태의 방정식은  $i$  절점에서 방사방향응력( $\sigma_{r i}$ )과 접선변위( $\epsilon_{\theta i}$ ) 상태를 인접  $i+1$  절점에서 방사방향응력( $\sigma_{r i+1}$ )과 접선변위( $\epsilon_{\theta i+1}$ )로 나타내었다.

#### 2.4.1 $m$ 번째 하중단계에서의 외력산정,

$P_0^{(m)}$

그림 3의  $m$ 번째 발생된 소성영역은  $m-1$ 개의 영역으로 분할되어 있다. 절점  $m$ 은 탄성과 소성의 경계이며,  $P_0^{(m)}$ 은  $m$ 번째 하중단계에서 소성영역을 방사방향으로 거리  $r_{sp} = r_m$  되도록 확장하는데 요구되는 외력을 말한다.

식(43)은 절점  $m-1$ 에서 절점 1까지 연속적으로 적용시키면, 터널 내부표면에서의 탄소성 경계에서 발생되는 방사방향응력( $\sigma_{r m}$ )과 접선

변형( $\sigma_{\theta m}$ )으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{r i} \\ \epsilon_{\theta i} \end{pmatrix} = [E'] \begin{pmatrix} \sigma_{r m} \\ \epsilon_{\theta m} \end{pmatrix} + (F') \quad (44)$$

여기서,

$$E' = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ f_2 & f_3 \end{bmatrix} = [E]_1 [E]_2 \cdots [E]_{m-1}$$

$$F' = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_4 \end{pmatrix} = \{F\}_1 + [E]_1 \{F\}_2 + [E]_1 [E]_2 \{F\}_3 + \cdots + [E]_1 [E]_2 \cdots [E]_{m-2} \{F\}_{m-1}$$

식(20)의 터널 내부표면에서의 경계응력조건을 식(44)에 적용시키면

$$e_1 \sigma_{r m} + e_2 \epsilon_{\theta m} + f_1 = P_i \quad (45)$$

탄소성 경계에서의 방사방향응력( $\sigma_{r m}$ )과 접선변형( $\epsilon_{\theta m}$ )은 식(14)의 탄성영역에서의 구성방정식 또한 만족시켜야 된다.

$$E_1 \epsilon_{\theta m} = \sigma_{\theta m} - \nu' \sigma_{r m} \quad (46)$$

위의 식(46)을 식(45)에 대입하면,

$$g_1 \sigma_{r m} + g_2 \sigma_{\theta m} + g_3 = 0 \quad (47)$$

여기서,  $g_1 = e_1 + \frac{\nu'}{E} e_2$

$$g_2 = \frac{e_2}{E'}$$

$$g_3 = f_1 - P_i$$

위의 식(47)에다 식(23)과 (24)를 대입하면,  $m$ 번째 하중단계에서 외부압력  $P_0^{(m)}$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

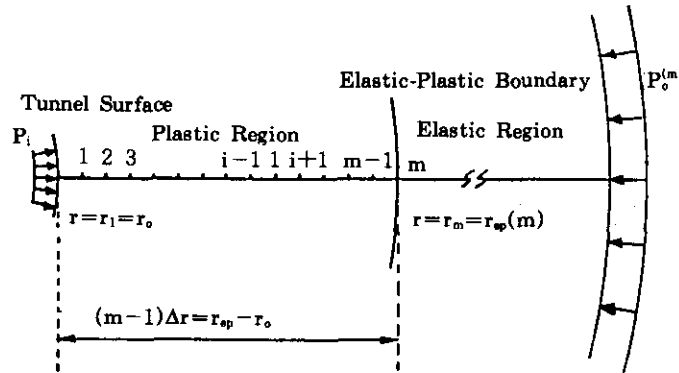


그림 3.  $m$ 번째 하중단계에서의 분할된 소성영역의 개요도

$$P_0^{(m)} = B + (B^2 - C)^{1/2} \quad (48)$$

$$\text{여기서, } B = \frac{2h_4 h_5 - h_2}{2(h_1 - h_4^2)}$$

$$C = \frac{h_3 - h_5^2}{h_1 - h_4^2}$$

$$h_4 = \frac{g_1 + g_2}{g_2 - g_1}$$

$$h_5 = \frac{g_3}{g_2 - g_1}$$

일단 외력  $P_0^{(m)}$ 이 위의 공식에서 산출되면, 탄소성 영역에서의 응력과 변형분포는 상부의 모든 공식들에  $P_0^{(m)}$ 을 대입시킴으로서 쉽게 구할 수 있다.

#### 2.4.2 항복 순간에서의 외력( $P_0$ ) 산출법

항복지점은 터널굴착과 더불어 외압의 증가와 함께 점차적으로 표면에서 방사방향 거리를 따라 전파되어 나간다. 그러나, 항복의 발생순간에는 터널 표면의 응력상태가 파괴조건식과

탄성영역의 응력조건을 동시에 만족시켜야 된다. 그러므로 식(23)의 방사방향응력은 그때의 내부지응력( $P_i$ )과 같게 되기 때문에 이를 이용하여  $P_0$ 를 구하는 공식으로 유도하면 다음과 같다.

$$P_0^{(1)} = \frac{h_2 + 2P_i}{2(1-h_1)} + \left[ \frac{h_2 + 2P_i^2}{2(1-h_1)} + \frac{h_3 - P_i^2}{(1-h_1)} \right]^{1/2} \quad (49)$$

$P_0^{(1)}$  값은 터널지경과는 무관하며 지반의 조건과 내부압력( $P_i$ )에 영향을 받고 있다.

#### 2.4.3 계산과정

주된 계산과정은 우선 주어진 조건하의 탄소성경계 상태에 부응하는 외력을 산출하는 데 있다. 그러므로 유한요소나 차분법에서 특정한 응력과 변형을 취급하는 대신에 탄소성 경계의 위치를 방사방향으로 일정하게 증가시킴으로서 외압( $P_0$ )에 상응하는 탄소성 경계를 찾아내는 것이다.

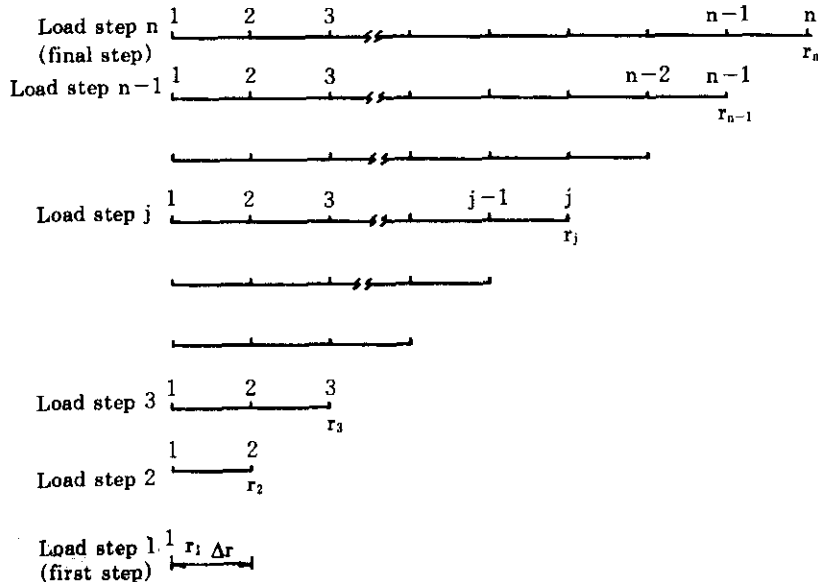


그림 4. 제안된 방법에 대한 단계별 계산 과정

그림 4는 제안된 방법에 대하여 단계적으로 계산하는 방법을 나타내고 있다.

첫번째의 하중단계에서, 터널표면( $r=r_1$ )에 항복상태가 발생되면, 이때의 상응하는 외압은  $P_0^{(1)}$ 이고 식(49)로 산출할 수 있다.

일단  $P_0^{(1)}$ 이 얻어지면, 절점 1에서의 응력들은  $P_0^{(1)}$ 을 식(16), (17), (19)에 대입함으로써 구할 수 있고, 변형들은 식(13),(14)에  $P_0^{(1)}$ 을 대입하면 산출된다.

두번째의 하중단계에서, 소성영역 계산은 분할거리를  $\Delta r$ 만큼 증가시킴으로써 탄소성영역의 방사방향 경계거리( $r^2$ )를 구할 수 있다.  $P_0^{(2)}$ 를 얻기 위해서는 첫번째 하중단계에서 산정된 절점 1에서의 응력들과 변형으로부터 Matrix  $[E]_1$ 과 Vector  $\{F\}_1$ 을 산출하고 이 결과를 식(48)에 대입하여 구한다.

탄소성 경계( $r_0^{(2)}=r_2$ )에서의 응력들은 식(23),(18),(19)에  $P_0^{(2)}$ 를 대입함으로써 구해지며, 이 경계에서의 변형들은 식(13),(19)에  $P_0^{(2)}$ 를 대입하여 얻을 수 있다. 절점 1에서 방사방향과 접선방향의 응력과 변형의 분력(Components)들을 식(43),(29),(30)를 이용하여 update하며, 유사하게 절점 1에서의 축방향변형량은 일정간격( $\Delta r$ ) 만큼의 증가량으로 탄소성경계의 방사방향거리인  $r_3$ 까지 확장된다.

$P_0^{(3)}$ 를 얻기 위하여 2번째 하중단계에서 산출된 응력과 변형들을 근거로 Matrix  $[E]$ 와 Vector  $\{F\}$ 를 구한다. 탄소성경계( $r_0^{(3)}=r_3$ )에서의 응력과 변형들은 2번째 하중단계에서 사용된 공식에  $P_0^{(3)}$ 를 대입함으로써 산정된다.

절점 1과 2에서의 방사방향과 접선방향의 응력과 변형은 식(43),(29),(30)을 절점 2에서 절점 1로 점차적으로 적용시킴으로써 update 시킬 수 있다. 전번단계와 마찬가지로 절점 1과 2에서의 축방향 응력들도 식(12)를 적용하여 update 시킨다. 일반적으로 각 하중단계의 증가에 대하여, 소성영역은 일정한 거리  $\Delta r$  만큼씩 확장된다고 가정하면 현재 단계의 외력  $P_0$ 는 전번단계의 응력과 변형의 근거로 산출된

Matrix  $[E]$ 와 Vector  $\{F\}$ 를 이용하여 얻을 수 있다.

응력과 변형상태는 전번단계의 인접 우측순단절점으로 부터 좌측순단절점까지 지속적으로 관련된 공식들을 이용하여 update 시킬 수 있다.

이러한 과정은 소성영역이 적합한 지점까지 확장되거나 그에 상응하는 외력( $P_0$ )이 얻어질 때까지 반복하게 되어있다.

### 3. 컴퓨터 프로그램 소개

체계화된 계산과정과 전개된 모든 공식들을 컴퓨터 프로그램화하여 FDAXP(Finite Difference Axisymmetric Program)가 개발되었다.

FORTRAN으로 작성된 FDAXP의 흐름도는 부록 A에 첨부되어 있으며 쉽게 수정되어 어떤 컴퓨터 system에도 사용될 수 있도록 고려되었다. 입력파일 내용은 4개의 카드로 설명되어 있다. 첫 번째 카드는 터널반경과 내부 지지압력을 나타내며 개개의 응력과 변형의 기록을 저장하는 장치도 포함되어있다.

두 번째 카드는 탄소성 경계의 거리와 탄성영역까지의 최대 거리에서 응력과 변형들을 지정할 수 있도록 하였다.

NDIVP(Number of Divisions in the Plastic Region)는 요소수가 증가할수록 소성영역 내에서의 정확도가 상당히 높아지는 결과를 나타낸다.

NDIVE(Number of Divisions in the Elastic Region)는 결과의 정확도에 영향이 별로 없지만 탄소성 경계를 지나 탄성영역에서 응력과 변형들의 산출에 사용된다.

세 번째 카드는 재료의 특성을 나타낸다. 탄성계수(E), 포아손비( $\nu$ ), 내부마찰각(PHI), 일축압축강도(SU) 그리고, 그림 5에서는 Mohr-Coulomb모델과 관련된 3가지 다른 반경을 가진(NFEV=1, NFEV=2, NFEV=3) Drucker-Prager 항복곡면을 설계의 입력자료로서



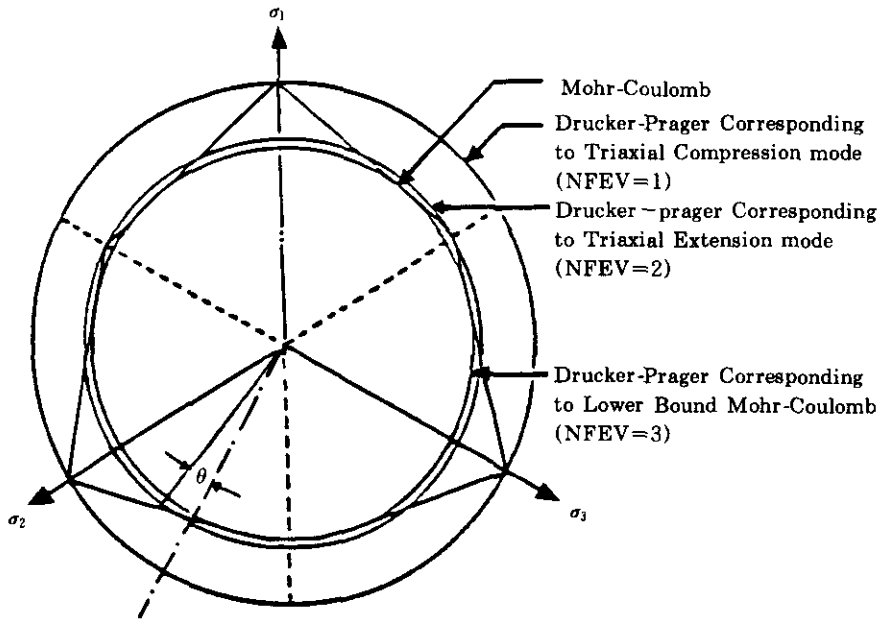


그림 5. 8면체상 Drucker-Prager 항복곡면

사용하였다.

- NFEV=1 : 삼축압축 모델시의 강도 포락선(Triaxial Compression Mode)
- NFEV=2 : 삼축인장 모델시의 강도 포락선(Triaxial Extension Mode)
- NFEV=3 : Mohr-Coulomb 모델의 lower-bound에 대응하는 강도포락선

마지막 카드(NITR=1)는 NDIVP의 영향에 따른 정확도를 높이기 위하여 multi-cycle option으로 수렴 기준에 도달할 때까지 반복계산 하도록 되어 있다.

#### 4. 모델 설계의 검증

프로그램 FDAXP의 정확도를 검증하기 위하여 아래의 설계변수를 사용하여 Mohr-Coulomb의 upper-bound와 일치되는 Drucker-Prager 모델(NFEV = 1)을 test하였다.

그림 6에서는 소성영역에서 분할개수가 증

가함으로서 해석결과가 수렴되고 있음을 알 수 있다.

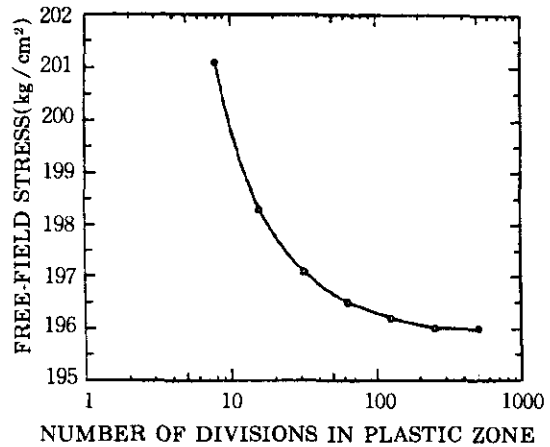


그림 6. 소성영역에서 요소 분할증가에 따른 정수압적 외압의 수렴상태.

〈입력자료〉

Card 1	Tnnnel radius	$r_0=150\text{cm}$
	Internal pressure	$P_i=0.$
	Profiles of individual stresses and strains	NOUT=1
Card 2	Radius of elastic-plastic boundary	REP=210cm
	Maximum radius to limit the calculations in elastic region	REL=240cm
	Number of divisions in plastic region	NDIVP=10
	Number of divisions in elastic region (between REP and REL)	NDIVE=10
	Failure surface	NFEV=1
Card 3	Young's modulus	$E=80,000\text{kg/cm}^2$
	Poison's ratio	$\nu=0.33$
	Internal friction angle	PHI = 18°
	Unconfined compressive strength	SU=126kg/cm <sup>2</sup>
Card 4	Multi-cycle calculation	NITR=0
	Allowable to tolerance for convergence	TOLC=not used

2번째 검증사례는 multi-cycle option에서 0.1% 허용오차가 적용되었으며, 터널내부 지지응력은 없는 것으로 간주하였다. 그림 5에서 표기된 것과 같이 3가지의 다른 강도포락선을 이용하여 그림 7과 8과 같은 계산 결과를 얻었다.

강도포락선이 서로 다른 3개의 사례에서 소성영역의 거리는 동일하게 가정하여 계산하였다. NFEV=1인 높은 강도 포락선의 경우에는 NFEV 2나 3과 같은 낮은 강도포락선 경우보다 높은 정수압적인 외압(Free Field Stress,  $P_0$ )을 나타내었다. 그 결과로 높은 강도포락선(NFEV=1)의 경우는 터널의 응력과 변형에서도 NFEV=2나 3의 경우보다 상대적으로 높았다. 삼축인장에 대응하는 강도포락선(NFEV=2)의 경우에 응력과 변형이 NFEV=3 비교하여 차이를 적게 보인 것은 그림 5의 강도포락선에서 나타난 차이만큼이나 다른 정도

로 유사한 현상을 나타내었다.

마지막 검증사례로서 Mohr-Coulomb 포락선의 upper bound에 해당하는 강도포락선을 이용하여 터널 내압의 영향을 test하였다. 두께 12mm의 철판이 터널내부 Liner로 시공되었을 때, 이는 터널내부 지지압의 26kg/cm<sup>2</sup>에 해당된다.

그림 9와 10은 내부지지압이 없는 경우(실선)의 응력과 변형을 내부지지압( $P_i=26\text{kg/cm}^2$ ) 적용시의 결과(점선)와 비교한 그림들이다. 적용된 내부지지압이 주변압반의 구속응력을 증가시킨 결과 정수압적인 외력( $P_0$ )도 함께 증가하였다고 생각된다. 결과적으로 내부지지압의 적용경우는 응력과 변형이 그렇지 않은 경우보다 상대적으로 높다는 것을 알 수 있다. 내부지지압의 적용으로 증가되는 응력과 변형의 증가량은 방사방향보다는 접선방향으로 월등히 높았다.

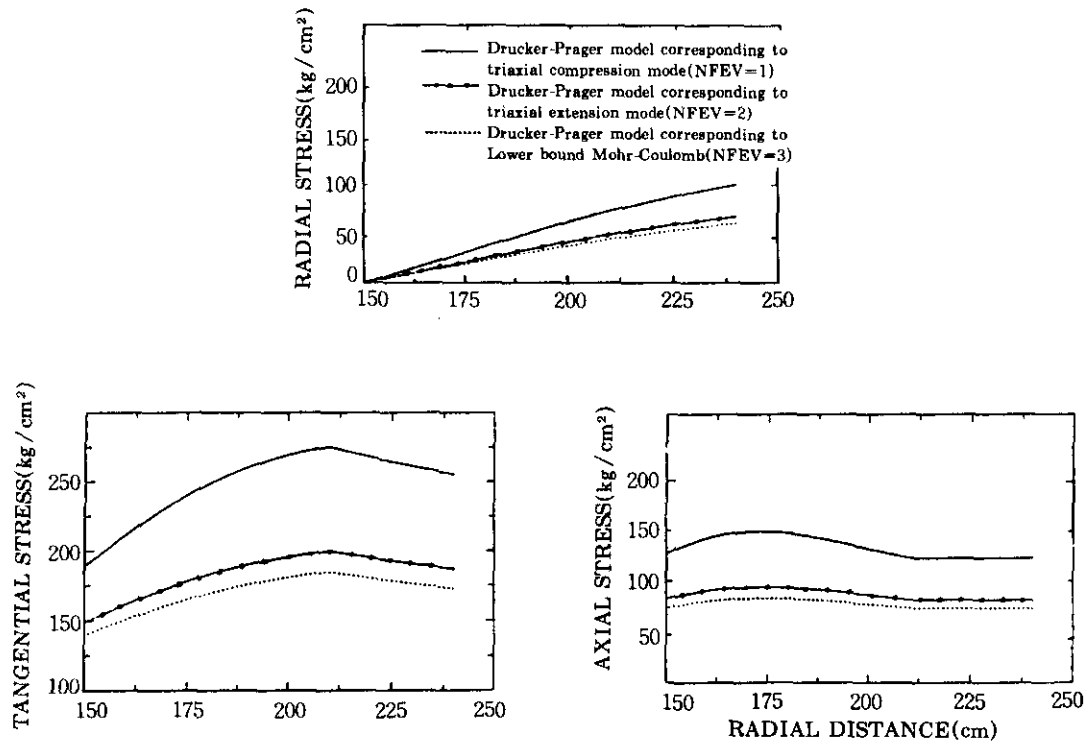


그림 7. 항복강도 포락선 종류별 방사방향, 접선방향, 축방향 응력분포도  
(터널반경  $r_0=150\text{cm}$ 인 경우)

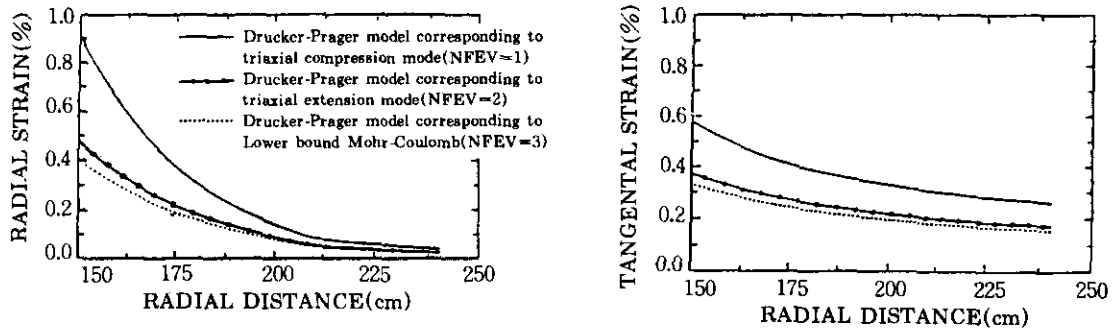


그림 8. 항복강도 포락선 종류별 방사방향과 접선방향 변형률 분포도  
(터널반경  $r_0=150\text{cm}$ 인 경우)

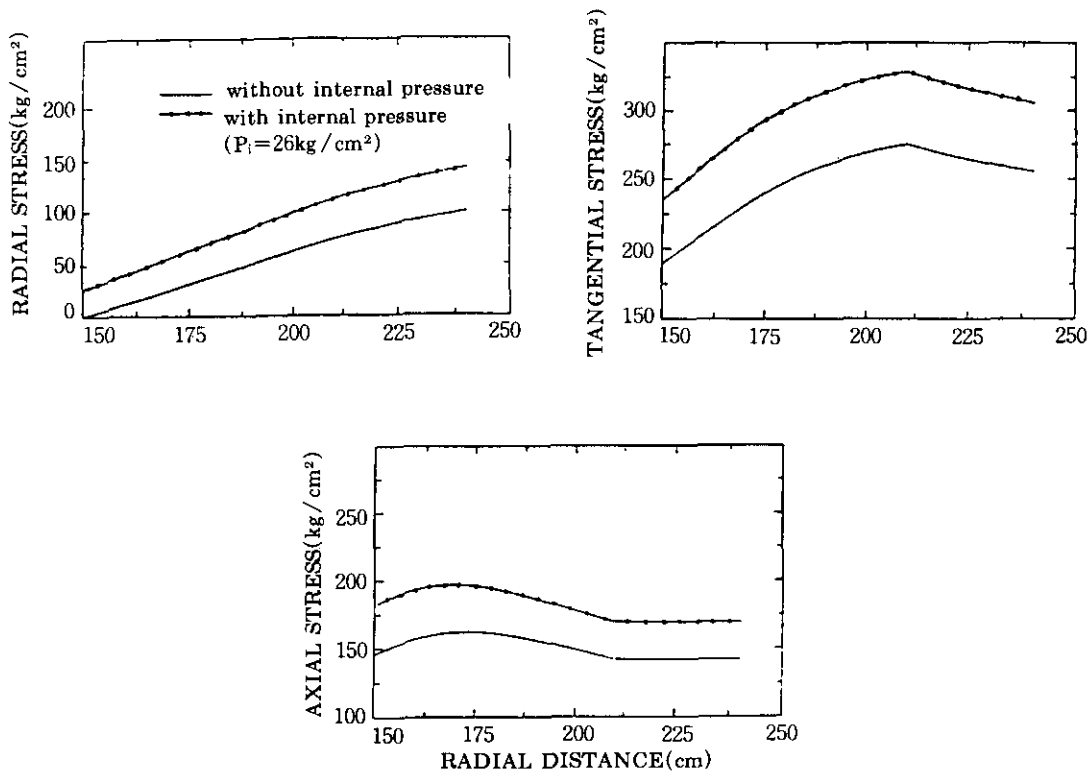


그림 9. 내부지압( $P_i$ )의 영향에 따른 방사방향, 접선방향, 축방향 응력분포도  
(터널반경  $r_o=150\text{cm}$ 인 경우)

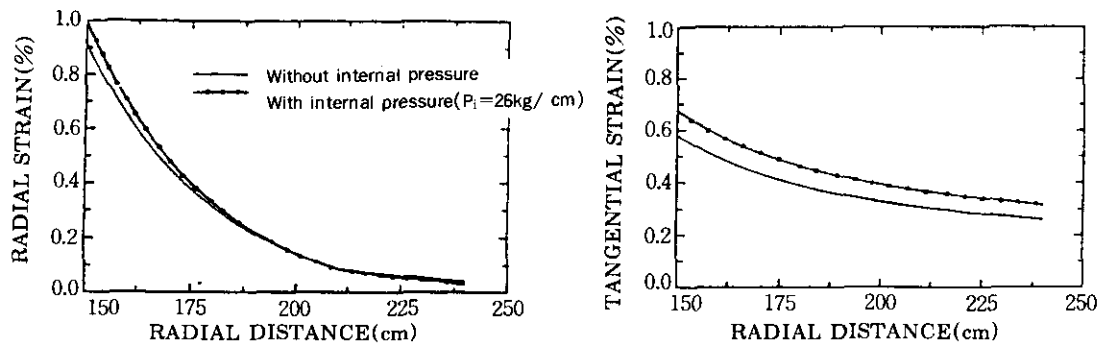


그림 10. 내부지압( $P_i$ )에 따른 방사방향과 접선방향 변형률 분포도  
(터널반경  $r_o=150\text{cm}$ 인 경우)

## 5. 결론

탄소성 거동의 원형터널 해석을 위한 Drucker-Prager 이론해가 유도되었고, FORTRAN Version의 program인 FDAXP가 개발되었다.

중간 주응력( $\sigma_2$ )에 고려되는 Drucker-Prager 항복곡면을 3축압축 mode(NFEV=1), 3축인장 mode(NFEV=2) 그리고, Mohr-Coulomb의 Lower Bound 값과 대응하는 mode의 (NFEV=3) 항복기준을 적용하여 원형터널을 해석하고 다음과 같은 결과들을 얻었다.

- 1) 소성영역의 요소분할을 증가시키면 정수압적인 외압( $P_o$ )이 일정한 값으로 수렴되고 있어, 개발된 Program의 신뢰도를 평가할 수 있었다.
- 2) 소성영역의 위치를 같다고 가정하였을 때, 항복포락선이 큰 (NFEV=1) mode의 경우는 작은 mode보다 터널의 정수압적인 외압( $P_o$ )이 크게 나타났으며 그 크기의 정도는 강도포락선에서의 차이와 유사한 것으로 보였다.
- 3) Mohr-Coulomb의 upper-bound 항복곡면과 같은 강도포락선을 이용하여 내부지지압력의 영향을 해석하였다. 내부지지압력( $P_i=26\text{kg/cm}^2$ )이 적용시에는 적용하지 않은 경우보다 터널의 정수압적인 외압( $P_o$ )이 상대적으로 증가하였고, 그 증가는 방사방향보다는 접선방향으로 높아짐을 알 수 있었다.
- 4) 지반 조건이 양호하지 못한 터널의 초기 해석이나 상용 program의 복합적인 기능으로 발생할 수 있는 문제점들을 간략한 이론해를 이용한 Drucker-Prager의 Program으로 손쉽게 정확도를 검토할 수 있을 것이다.

## 참고 문헌

1. 이봉열, 김광진, 김학문(1994), "비선형유한요소법을 이용한 터널해석 및 효용성 평가", 대한

토목학회 논문집 제15권 제3호 pp. 699-714.

2. 윤지선, 김두영 역(1994), 터널공학, 구미서관. pp. 477-481.
3. 지반공학에서의 컴퓨터 활용(1991), 91년도 추계학술발표회 논문집, 한국지반공학회. pp. 137-146, pp. 216-221
4. Bathe, K. J., H. Ozdemir, and E. L. Wilson(1974), "Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis", Report No. UCSESM 74-4, Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, California.
5. Hendron, A. J. and A. K. Aiyer(1972), "Stresses and Strains Around a Cylindrical Tunnel in an Elasto-Plastic Material with Dilatancy". Technical Report No. 10, Missouri River Division, U. S. Corps of Engineers, Omaha, Nebraska.
6. Hoek, E. and E. T. Brown(1980), "Empirical Strength Criterion for Rock Masses", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 106, No. GT9.
7. Kennedy, T. C. and H. E. Lindberg(1978), "Tunnel Closure for Nonlinear Mohr-Coulomb Functions", Journal of the Geotechnical Engineering mechanics Division, ASCE, Vol. 104, No. EM6.
8. KIM, M. K.(1984) "Study of Constitutive Models for Frictional materials". Ph.D. Thesis, Univ. of California Los Angeles.
9. Kim, K. J., M. Rochefort, D. Piepenburg, and M. Davister(1986), "Numerical Analysis of Nonlinear Liner-Medium Interaction, Volume I-Cylindrical Tunnel Subjected to Axisymmetric Loading (Theory)", Applied Research Associates, Inc., Alexandria, VA.
10. Kim, K. J., D. D. Piepenburg, and D. Merkie(1986), "Influence of the Intermediate Principal Stress on Rock Tunnel Behavior", Applied Research Associates, Inc., Alexandria, VA.
11. Newmark, N. W.(1969), "Design of Rock Soil and Rock Cavity Linings", Technical Report to Space and Missiles System Organ-

ization, Air Force Systems Command, Norton Air Force Base, Contract FO 4701-69-C-0155.

12. Pilpenburg, D. D., M. A. Rochefort(1984), "Design of Rock Tunnel Liners Through Further Application of Hendron and Aiyer Method for Tunnel Analysis", Report No. ARA-544, Applied Research Associates, Inc., Alexandria, VA, Final Report to the Defense Nuclear Agency, Washington, DC, Contract Problems, Report No. DNA-001-82-C-0198 and DNA-011-83-C-0354.
13. Rochefort, M. A., K. J. Kim, D. D. Piepenburg, J. L. Drake(1985), "Preliminary Design Procedure for Hardened Tunnel Liners", Vol. I., Methodology and Computer Programs, Report No. ARA-5933-1, Applied Research Associates, Inc., Alexandria, VA.

(접수일자 1997. 2. 17)

부록 A. FDAXP 프로그램 흐름도

