

# 시간영역 민감도 방법을 이용한 집중 질량 구조물의 천이응답 해석

## Transient Response Analysis of a Lumped Mass System Using Sensitivity Method in Time Domain

백 문 열\*      기 창 두\*\*  
Baek, Moon-Yeol      Kee, Chang-Doo

### 요 약

본 논문은 집중 질량 구조물의 천이응답에 대한 시간영역 민감도 해석의 기본 개념을 설명한다. 외부 가진에 따른 구조물의 응답에 미치는 설계변수 변화의 영향을 구하기 위해 시간영역 민감도 함수를 구하는 방법을 제시하였다. 시간영역에서 구조물의 설계변수 민감도는 1차 표준 민감도 함수와 백분율 민감도 함수를 통해 확인하였다. 이러한 민감도 함수와 그 계산은 설계변수에 대한 시스템 상태변수의 편미분에 의한 것이다. 또한, 직접 미분법에 의한 해석적 방법의 편미분 결과와 수치적 방법에 의한 결과를 비교하였다.

### Abstract

This paper deals with the basic concepts of sensitivity analysis in a time domain for the transient response of a lumped mass system. Sensitivity analysis methods in thme domain for determining the effects of parameter changes on the response of a dynamic system by external excitation are presented. The parametric sensitivity of a lumped mass system in time domain can be investigated using different types of sensitivity functions, including first order standard and percentage sensitivity functions. These sensitivity functions are determined as a function of partial derivatives of system variables taken with respect to system parameters. In addition, we compared the results of the analytical method by direct method and those of numerical methods.

**Keywords** : finite difference method, lumped mass system, partial derivative, sensitivity, sensitivity analysis, transient response, vibration, vibration, analysis, vibration amplitude

## 1. 서 론

초기 발전 단계에서 민감도 해석은 미분방정식의 해에 설계변수(design parameter)가 미치는 영향을 구하는 수학적 관심에서 출발하였다. 이

러한 상황은 현대 제어이론의 등장과 그 응용의 발전과 더불어 변화되었다.

Adelman과 Rahpael<sup>10)</sup>은 구조물의 민감도를 사용되는 방법에 따라 미분법(directmethod)과 그린 함수법(Green's function method), 수반 변

\* 정회원·순천공업전문대학 자동차과, 전임강사  
\*\* 전남대학교 기계공학과, 부교수

• 이 논문에 대한 토론회를 1997년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

수법(또는 변수 부가법, adjoint variable method), 유한차분법(finite difference method) 그리고 푸리에 진폭 시험법(FAST : Fourier Amplitude Sensitivity Test) 등으로 분류하였다. 한편, Moore<sup>12)</sup>는 구보물의 민감도 함수를 응용 대상에 따라서 고유치 응답 민감도(Eigenvalue Response Sensitivity), 좌굴 하중 민감도(Buckling Load Factor Sensitivity), 형상 민감도(Shape Sensitivity), 동적 응답 민감도(Dynamic Response Sensitivity), 모달 천이 민감도(Modal Transient Response Sensitivity) 등으로 구분하고 있다. 최근들어 천이응답에 대한 민감도 해석은 자동차와 같은 동적 구조물에 많이 이용되고 있다. Nalecz는 차량 전복시에 설계변수들의 영향을 고찰하였고, Rezek<sup>13)</sup>는 차량의 ABS모듈레이터에 대한 민감도를 연구하였다. 보다 최근에, Jan과 Han<sup>11)</sup>은 차량의 요잉에 미치는 설계변수에 영향을 민감도 해석을 통해 검토하였다.

천이응답에 대한 민감도 해석에 대한 국내의 연구로는 수반 변수법과 실험 계획법을 이용한 김충웅<sup>1)</sup>, 박태원<sup>2)</sup>, 수반 변수법에 의한 이재환과 이광한<sup>4)</sup>의 연구와 직접법을 사용한 이민호<sup>3)</sup> 그리고 유한차분에 의한 민감도 해석으로 현가장치 설계를 고려한 탁태오<sup>5)</sup>의 연구 등이 있다.

간단히 말해, 구조물의 천이응답에 대한 민감도 해석은 상태변수(state variable)에 대한 설계변수의 영향이라고 할 수 있다. 즉, 민감도 함수와 그 계산은 설계변수에 대한 시스템 상태변수의 편미분에 의한 도함수를 구하는 것이다. 외부 가진을 받는 집중 질량 구조물의 천이응답은 시스템을 구성하는 설계변수에 의해 영향을 받게 된다. 이러한 구조물에서 설계변수의 값이 변화할 때의 민감도는 구조물의 해석에 있어서 가장 중요한 문제중의 하나이다. 민감도 해석의 절차는 첫째로 대상 시스템을 선정하며, 두 번째 시스템을 미분방정식에 의해 모델링 하고, 마지막으로 위에서 언급한 여러 가지 방법들에 의해 민감도 도함수(sensitivity derivatives)를 구하는 것이다. 본 연구는 민감도를 구하는 여러 가지 방법 중에서 직접법과 유한차분법을 채택하여 민감

도 해석을 수행하고 이 결과에 의해 설계변수의 시스템의 상태변수에 대한 영향력의 순위를 결정하고 이에 따른 결과를 시스템의 응답 성능을 향상시킬 수 있는 설계 목표치 및 최적화 설계의 지침으로 삼고자 한다.

## 2. 시간영역 민감도 해석 이론

$n$  자유도 비선형 시스템은 일반적으로 다음과 같이 초기 조건을 갖는 상태 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{f}$ 는 각각  $n$  차원 상태 벡터와 비선형 벡터 함수이며,  $\mathbf{p}$ 는  $r$  차원 변수 벡터를 나타낸다. 시스템 응답에 미치는 변수 변화의 영향을 구하기 위해서는 (변수 변화에 따른 시스템의 민감도), 위에서 보인 파라미터 벡터  $\mathbf{p}$ 는 벡터  $\mathbf{p}$ 의 공칭 값(nominal value)이  $\mathbf{p}_0$ 라고 하면

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p} \quad (2)$$

여기서  $\Delta \mathbf{p}$ 는 변수의 작은 편차를 나타낸다. 식(1)을 변수  $\mathbf{p}$ 에 대해 편미분을 하고,  $\mathbf{u} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{p}$ 가 민감도 행렬(sensitivity matrix)이라고 하면

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}}, \mathbf{u}^0 = \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (3)$$

민감도 방정식을 얻을 수 있다.

여기서

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial p_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial p_1} & \frac{\partial x_n}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_r} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial p_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial p_1} & \frac{\partial f_n}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial p_r} \end{bmatrix} \quad (6)$$

위의 식(4)의  $k$ 번째 상태변수  $x_k$ 에 대한 설계 변수  $p_i$ 의 1차 민감도 함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$u_i^k = \frac{\partial x_k}{\partial p_i} \quad (7)$$

위 식(7)과 같이 정의된 1차 민감도 함수는 단위 크기(unit size)만큼 설계변수의 크기를 변화하였을 때 구한 민감도 함수으로써 1차 표준 민감도 함수(first order standard sensitivity)로도 부른다<sup>7)</sup>.

이상과 같이 살펴본 민감도 해석을 위한 기본 식들을 적절하게 변형하면 실제 응용문제에 있어서 결과의 해석에 유용한 몇 가지 민감도 함수를 얻을 수 있다. 여기서는 백분율 민감도 함수(first order standard sensitivity)에 대한 수식을 검토한다. 설계변수의 크기를 1%만큼 변화시켰을 때 시스템의 응답의 변화량을 구한 민감도 함수를 1차 백분율 민감도 함수라 하며, 식(7)로부터 식(8)과 같이 정의할 수 있다.

$$u_i^k = \frac{\partial x_k}{\partial p_i} \times 100 \quad (8)$$

### 3. 해석모델

모의 실험에서 사용할 수학적 모델은 간단한 2 자유도 시스템이며 그림 1에 나타내었다.

시스템의 운동 방정식은

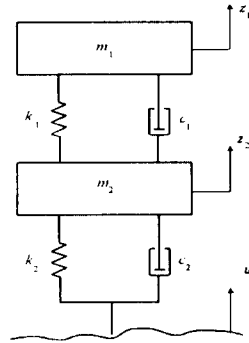


그림 1 2자유도 시스템

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 \dot{z}_1 - c_1 \dot{z}_2 - k_1(z_2 - z_1) = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 - c_1 \dot{z}_1 + (c_1 + c_2) \dot{z}_2 - k_1 z_1 + (k_1 + k_2) z_2 = c_2 \dot{u} + k_2 u \end{cases} \quad (11)$$

## 4. 모의실험

민감도를 고려하는 설계변수의 벡터  $\mathbf{p}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{p} = (m_1, m_2, c_1, c_2, k_1, k_2) \quad (12)$$

### 4.1 유한차분법

본 연구에서 민감도를 구하기 위해 사용한 방법은 해석적 방법(직접법 또는 직접 미분법)과 유한차분법이다. 상미분방정식으로 표현되는 시스템의 상태변수와 파라미터의 수가 증가하면 운동 방정식을 미분하는 직접법은 적용에 상당한 어려움이 따르게 된다. 따라서 해석적 방법을 적용할 수 있는 경우는 상당히 간단한 모델에 한정되게 된다. 따라서, 본 연구에서는 직접법과 유한차분법 두 가지 방법에 의한 민감도의 계산을 수행하고 이를 비교하고자 한다.

각 파라미터의 민감도는 근사적으로 다음과 같은 유한 차분식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial z_i}{\partial \theta_i} = \frac{z_i(\theta_i + \delta \theta_i) - z_i(\theta_i)}{\delta \theta_i} \quad (13)$$

여기서  $z_i$  와  $\theta_i$  그리고  $\delta\theta_i$  는 순서대로  $i$  번째 상태변수, 파라미터 그리고 파라미터의 작은 섭동량이다. 섭동량  $\delta\theta_i$  는 응답의 선형 변화를 충족할 수 있도록 충분히 작은 값이어야 하며 순환 오차(round-off error)를 피할 수 있는 큰 값이어야 한다. 컴퓨터의 정밀도, 문제의 종류 그리고 파라미터가 거의 1에 가까운 경우에는 상수 섭동량이  $10^{-3}$  정도이면 잘 작동한다<sup>9)</sup>. 본 연구에서는  $\delta\theta_i = \theta_i \times 10^{-5}$  을 사용하였다.

표 1과 2에 직접 미분법, 2점식 그리고 3점식 유한 차분법에 의한 표준 민감도 해석의 결과를 나타내었다. 이 표들의 값은 예비 모의실험을 통해 확인한 천이응답의 전 구간인 0초에서 4초에의 결과에서 각 민감도 곡선의 산과 골의 값을 나타낸 것이다. 표 1의 최대 오차는 1.8E-6 이고, 표 2에서는 1E-7 이다. 2점법과 3점법에 의한 유한 차분 계산과 직접 미분법에 의한 해의 차는 해석에서 가정한 오차 허용 범위인 1E-5 이내로 아주 작다. 따라서 고려하고 있는 모델의 경우 수치적 방법에 의해 얻은 민감도가 충분히 납득할 만한 것으로 볼 수 있다고 판단된다. 그러므로, 앞으로 제시하는 민감도 함수는 모두 3점식 유한차분법에 의한 수치적 계산 결과이다.

표 1 직접 미분법과 유한 차분법의 비교  
(설계변수  $m_1$ 의 질량  $m_1$ 의 변위에 대한 표준 민감도)

시 간	직접미분	유한차분법	
		2점법	3점법
0.303030	-0.0000462	-0.0000461	←
0.666667	0.0001256	0.0001249	←
1.060610	-0.0001533	-0.0001536	←
1.484850	0.0001332	0.0001350	←
1.909090	-0.0001023	-0.0001032	←
2.363640	0.0000732	0.0000736	←
2.787880	-0.0000499	-0.0000501	←
3.242420	0.0000330	←	←
3.666670	-0.0000213	←	←
3.969700	0.0000072	0.0000064	←

(← : 좌항과 같음)

표 2 직접 미분법과 유한 차분법의 비교  
(설계변수  $m_1$ 의 질량  $m_1$ 의 변위에 대한 표준 민감도)

시 간	직접미분	유한차분법	
		2점법	3점법
0.242424	-0.0000064	←	←
0.606061	0.0000170	0.0000171	←
1.000000	-0.0000206	←	←
1.424240	0.0000180	0.0000181	←
1.878790	-0.0000139	←	←
2.303030	0.0000099	←	←
2.727270	-0.0000067	←	←
3.181820	0.0000045	←	←
3.606060	-0.0000029	←	←
3.969700	0.0000015	0.0000014	←

(← : 좌항과 같음)

모의 실험은 0.5초 동안 외부 입력을 주어 가진 하고, 천이응답은 입력이 주어지는 시간의 두 배인 1초까지에 대하여 계산하였다.

#### 4.2 표준 민감도 함수

표준 민감도 함수는 2장의 정의에 따라 파라미터가 단위 크기만큼 변화했을 때의 민감도 함수이다. 그림 2와 3은 각각 질량  $m_1$  과  $m_2$  의 변위 응답에 대한 각 설계변수들의 표준 민감도 함수이다. 질량  $m_1$ 의 변위에 영향을 가장 크게 미치는 설계변수는  $m_1$ 이다.  $m_1$ 의 민감도는 외부 가진 주어지는 0.5초까지는 음의 값이다가 이후 0.8초까지 양의 값을 나타낸다. 따라서,  $m_1$ 의 값이 단위 양만큼 증가하면 0.5초까지의 응답은 감소하고, 이후 0.8초까지의 응답은 증가하게 됨을 알 수 있다.  $c_2$ ,  $k_1$  과  $k_2$ 는 거의 영향을 미치지 않는 것으로 나타났다.  $m_2$  와  $c_1$ 은 약 0.3초, 0.75초를 기점으로 서로 상반된 영향을 보이고 있다.

한편, 질량  $m_2$ 의 변위에 대해서는  $m_1$  과  $m_2$ 의 민감도에 가장 큰 것으로 나타났다.  $m_1$ 의 민감도는 질량  $m_1$ 의 변위에 대한 것과 거의 유사한 경향성을 보이며,  $m_2$ 의 민감도는 시간에 따라서 그 변화의 폭이 심하다. 여기에서도  $c_2$ ,  $k_1$  와  $k_2$ 는 거의 영향을 미치지 않는 것으로 나타났다.

### 4.3 백분열 민감도 함수

각 파라미터를 1% 변화시켰을 때의 백분열 민감도를 그림 4와 5에 나타내었다. 그림 4를 보면 질량  $m_1$ 의 변위에 영향을 가장 크게 미치는

설계변수는  $m_1$ 이고, 설계변수  $m_2, c_2$ 의 민감도는 아주 작은 값이다. 그림 2의 표준 민감도 함수와 비교하여 가장 현저하게 차이가 나는 것은  $k_1$ 의 민감도 함수이다. 표준 민감도 함수에서는

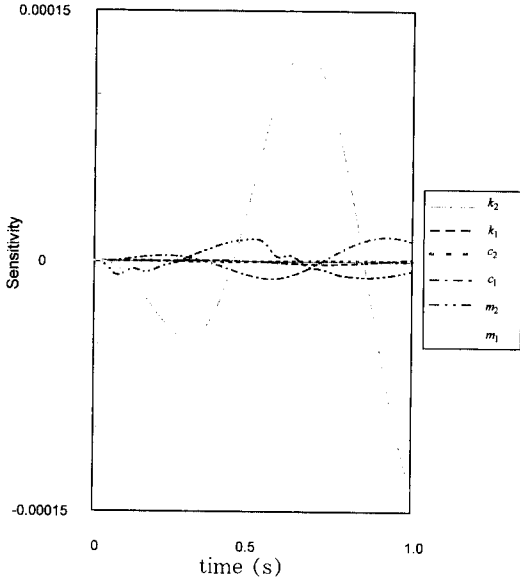


그림 2 질량  $m_1$ 의 변위에 대한 표준 민감도 함수

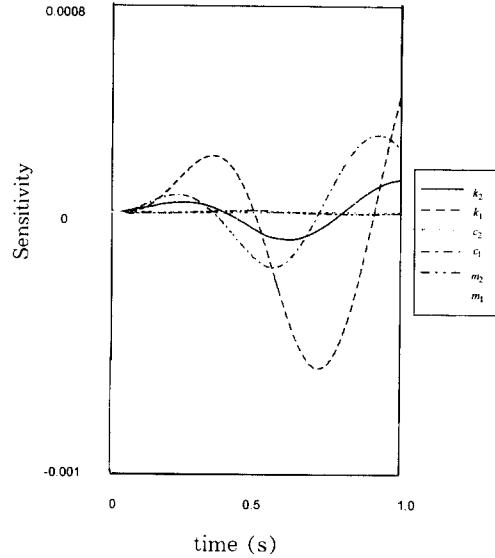


그림 4 질량  $m_1$ 의 변위에 대한 백분열 민감도 함수

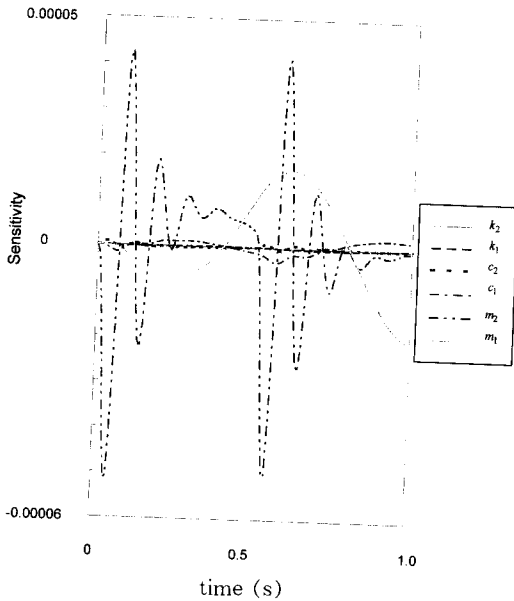


그림 3 질량  $m_2$ 의 변위에 대한 표준 민감도 함수

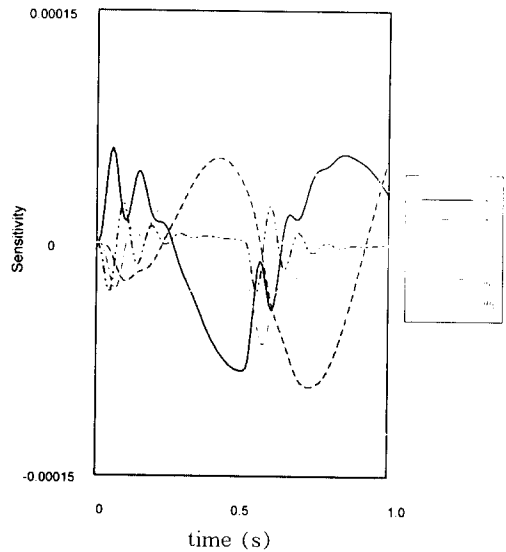


그림 5 질량  $m_2$ 의 변위에 대한 백분열 민감도 함수

거의 영향을 보이지 못했던  $k_1$ 의 민감도가 백분율 민감도에서 커진 이유는 함수의 정의에서 알 수 있는 것처럼 표준 민감도는 단위 크기만큼의 설계변수 값이 증가했을 때의 민감도 함수이고 백분율 민감도 함수는 설계변수의 크기를 1%만큼 증가시켰을 때의 민감도 함수이기 때문이다. 즉, 표준 민감도 함수는  $k_1$ 을  $k_1+1$ 로 증가시켜서 민감도를 구한 것이고, 백분율 민감도는  $k_1+k_1 \times 0.01$ 로 증가시켜 민감도를 구하였고, 강성  $k_1$ 은 큰 값이므로 표준 민감도의 값이 상대적으로 작을 수 밖에 없다. 이와는 반대로  $m_2$ 는 그 값의 크기가 100이 넘지 않으므로 백분율 민감도 함수보다 표준 민감도 함수의 크기가 더 크게 나타난 것이다.

그림 5는 질량  $m_2$ 의 변위에 대한 백분율 민감도 함수의 곡선을 나타낸 것이다. 이 그림을 통해서 설계변수  $c_2$ 를 제외한 나머지 5개의 설계변수 모두가 시스템의 응답에 영향을 미치는 것을 볼 수 있다. 여기에서도  $m_1$ 의 영향은 가장 큰 것으로 나타났지만, 그림 3의 표준 민감도와 비교할 때  $k_1$ 와  $k_2$ 의 백분율 민감도 함수는 큰 것으로 나타났으며,  $m_2$ 의 백분율 민감도 함수는 훨씬 작게 나타났다. 이것 역시 위에서 설명한 표준 민감도의 비정량화 특성과 백분율 민감도의 정량적 특성에 기인하는 것으로 볼 수 있다.

## 5. 결 론

외부 가진을 받는 집중 질량 구조물의 시간영역 민감도 해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 외부 가진을 받는 구조물에 대한 시간영역 민감도 해석을 수행하였고, 1차 표준 민감도와 백분율 민감도 함수를 구하였다. 두 민감도 함수는 설계변수의 변화가 시스템의 응답에 미치는 영향의 정도를 쉽게 알려 준다.
- 2) 표준 민감도는 특정한 설계변수가 시스템의 응답에 미치는 영향을 알아 볼 수는 있으나 여러 개의 설계변수간의 상대 비교는 곤란하다.
- 3) 시간영역에서 각 설계변수가 시스템 응답

에 미치는 영향을 비교하기 위해서는 백분율 민감도를 구하는 것이 적절하다.

4) 시간영역 민감도 해석은 외부 가진, 즉 입력의 종류에 따라 동일한 시스템에 대해서도 전혀 다른 응답이 얻어지는 입력 종속 특성이 있다. 따라서, 시간영역 민감도 해석은 입력의 형태가 고정적으로 주어지는 시스템에 대한 해석에 유용할 것으로 판단된다.

본 연구에서는 동역학 시스템의 천이응답에 대한 시간영역 민감도 해석을 수행하여 제시한 민감도 해석 이론의 타당성에 대해 검토 하였다. 향후, 주파수 영역 민감도 함수에 대한 연구와 민감도 해석의 결과를 통해서 최적 설계에 관한 지속적인 연구가 이루어져야 할 것으로 생각된다.

## 참 고 문 헌

1. 김충용, VTR-Deck Mechanism의 최적 설계, 석사학위논문, 아주대학교, 1994.
2. 박태원, 실험계획법을 이용한 현가장치의 요소설계, 중간보고서, 아주대학교, 1994.
3. 이민호, 자동차 현가장치의 민감도 해석, 석사학위논문, 전남대학교, 1996.
4. 이재환, 이광한, "연속법에 의한 설계민감도를 이용한 판구조물의 조화진동 저감," 한국소음진동공학회지, 제 6권, 제 1호, pp. 27~34, 1996.
5. 탁태호, "민감도 해석을 이용한 현가장치의 설계," 1996년도 대한기계학회 동역학 및 제어 부분 학술 강연회 논문집, pp. 103~126, 1996.
6. Andrzej G. Nalecz, Alan C. Bindemann and Cleve Bare, Sensitivity Analysis of Vehicle Tripped Rollover Model, NHTSA-U. S. DOT Final Report, No. DOT HS 807300, 1988.
7. Andrzej G. Nalecz, "Application of Sensitivity Methods to Analysis and Synthesis of Vehicle Dynamic Systems," Vehicle System Dynamics, Vol. 18, pp. 1~44, 1989
8. Andrzej G. Nalecz, "Influence of Vehicle and

- Roadway Factors on the Dynamics of Tripped Rollover," International Journal of Vehicle Design, Vol. 10, No. 3, pp. 321~346, 1989
9. Garth Miline, MTALAB-State-Space Identification Tool Box, Math Works, Inc., 1992.
  10. Howard M. Adelman and Rahpael T. Haftka, "Sensitivity Analysis of Discrete Structural Systems," AIAA Journal Vol. 24, No. 5, pp. 823~832, 1986.
  11. Jang, J. H. and Han, C. S., "The Sensitivity Analysis of Yaw Rate for a Front Wheel Steering Vehicle : In Frequency Domain," KSME International Journal, Vol. 11, No. 1, pp. 56~66, 1997.
  12. Moore, G. J., MSC/NASTRAN Design Sensitivity Analysis and Optimization - User's Guide, The Maneal-Schwendler Co., 1994.
  13. Rezek, S. F., "Modeling and Sensitivity Analysis of an ABS Hydraulic Modulator," Proceedings of the 1994 American Control Conference, Vol. 1, pp. 826~830, 1994.
- (접수일자 : 1997. 4. 7)