

<논 문> SAE NO. 97370121

계면 요소의 구성과 이를 이용한 접판스프링의 강성도 평가

Formulation of an Interface Element and Stiffness Evaluation of an Leaf Spring

정 정 회*, 임 장 근**
J. H. Chung, J. K. Lim

ABSTRACT

For the effective finite element analysis of the structures including material interfaces or contact surfaces, interface elements are proposed. Most of early works in this problem require not only iterative computation but also complex formulation because of the kinematic nonlinearities caused from the discontinuous behavior and the stress concentration phenomena. The proposed elements, however, are consistently formulated using relative displacements and tractions between top and bottom regular finite elements. The effectiveness of these elements are shown by solving various numerical sample problems including an leaf spring and comparing with results of general finite element analysis. As a result, more stable solutions are conveniently obtained using interface elements than regular finite elements.

주요기술용어 : Finite Element Analysis(유한 요소 해석), Interface Element(계면 요소), Isoparametric Formulation(등 매개 변수 정식화), Relative Displacements(상대 변위), Traction(분포 외력), Leaf Spring(접판 스프링)

1. 서 론

서로 다른 재료가 부착된 경계면이나 부재간의 접촉면을 유한 요소로 해석할 때 요소와 요소 사이에 불연속 거동과 역학적 비선형 특성 때문에 적합한 해석이 쉽지 않다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 접합 조건들을 도입하거나 요소

크기를 세분하여 해석하는 방법들이 사용되고 있으나 복잡한 수식 처리와 반복 계산으로 인하여 많은 계산 시간을 요구한다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 계면 요소(Interface Element)를 사용하는 방법이 제안되기 시작했다.

접합부(Interface)를 모델링하기 위해 접합부의 불연속적 거동을 구속 방정식을 이용하여 모델링 하거나^{1), 2)} 분리된 스프링으로 요소간을 연결하는 방법^{3), 4)} 그리고, 접합부를 작은 두께의 준 연속체⁵⁾로 다루는 방법 등이 제안되었다.

*한양대학교 대학원

**정회원, 한양대학교 기계설계학과

1976 Wilson⁶⁾은 계면 요소의 구성법을 제안 하였으나 비대각 성분이 너무 크기 때문에 유한 요소 해의 정확성이 떨어짐을 보였고 이러한 문제를 해결하기 위해 Ghaboussi 등⁷⁾은 계면 요소의 상대 변위를 독립된 자유도로 사용할 것을 제안하였다. 그러나, 이러한 상대 자유도 정식화는 계면 요소와 한 면을 공유하는 일반 유한 요소까지 수정을 필요로 했다. 그러므로, 이러한 상대 변위를 독립된 자유도로 사용하는 방법은 유한 요소 해석에 어려움이 있었다.

한편, Griffiths⁸⁾는 접합부의 슬립(Slip) 현상을 정확하게 해석하기 위하여 특별한 계면 요소를 제안하였으며, Desai 등⁹⁾도 얇은 두께를 가진 계면 요소를 제안하였다. 그러나, 이들 요소는 구성 방정식의 구성에 합리성을 찾기가 어려웠다.

Schelleken 등¹⁰⁾과 Day 등¹¹⁾은 두께가 0인 계면 요소의 방정식을 구성하고 계면 요소의 적분 방법에 따른 수치 안정성에 관하여 연구하였다.

본 논문에서는 계면 요소의 일관성 있는 수식화 방법을 제안하고 접합부나 접촉면을 가지는 구조물의 불연속 또는 특이성 거동 해석에 계면 요소의 유효성을 규명하고자 한다. 특히, 자동차의 접판 스프링과 같이 판 접촉 특성에 따라서 강성도가 좌우되는 구조물을 유한 요소법으로 해석 할 때, 제안한 계면 요소를 사용함으로써 이의 편리함과 타당성을 보이고자 한다.

2. 계면 요소의 구성 및 정식화

계면 요소는 Fig.1과 같이 2차원, 3차원 일반 유한 요소 사이에 결합하여 접합면에서의 슬립 현상을 해석하는데 매우 편리하게 이용된다.

요소 구성의 수식화 방법은 접합부의 상대 변위 차이가 분포 외력(Traction)을 발생시킨다는 개념에 근거한다. Fig.2는 3차원 일반 유한 요소와 연결하여 사용하는 평면 계면 요소의 전형적인 형태를 보인다.

이 계면 요소의 절점 변위 벡터(Nodal Displacement Vector), v 와 연속 변위장(Continuous Displacement Field), u 를 다음과 같이 정의한다.

$$v = \left[(v_n^u \ v_n^l), (v_s^u \ v_s^l), (v_t^u \ v_t^l) \right]^T \quad (1)$$

$$u = \left[u_n^u, u_n^l, u_s^u, u_s^l, u_t^u, u_t^l \right]^T \quad (2)$$

이들 식에서 하첨자 n 은 접합면의 수직 방향, s, t 는 접합면의 접선 방향을 나타내며 상첨자 u, l 은 접합면의 위 면과 아래 면을 나타낸다. 참고로 일반 유한 요소의 경우, 변위장을 각 방향별로만 구성하나 계면 요소의 경우 식 (2)와 같이 위면과 아래면의 변위장을 따로 형성하게 된다.

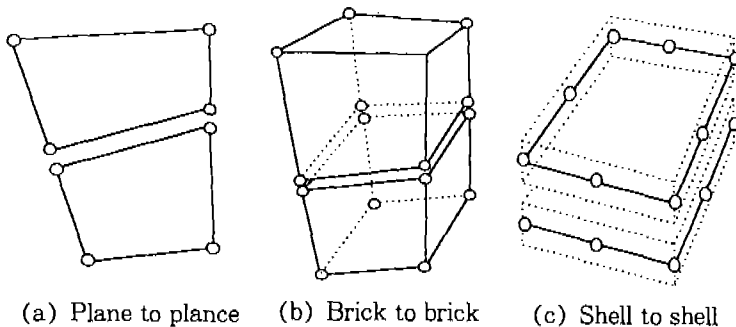


Fig.1 Typical Interface Elements

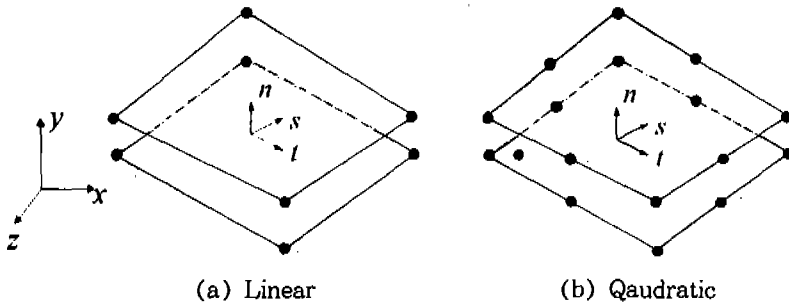


Fig.2 Linear and Quadratic Plane Interface Elements

한편, 연속 변위장과 절점 변위 벡터의 관계는 형상 함수 행렬(Shape Function Matrix)을 도입하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{v} \quad (3)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

단, 행렬 안의 \mathbf{n} 은 평면의 형상 함수¹²⁾를 나타내고 있다.

위 면과 아래 면의 변위차로써 정의되는 상대 변위 벡터(Relative Displacement Vector)와 연속 변위장의 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (5)$$

$$\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_n, \Delta u_s, \Delta u_t]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

식 (3)을 식 (5)에 대입하면 다음과 같이 상

대 변위 벡터와 절점 변위 벡터의 관계를 구할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{n} & \mathbf{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{n} & \mathbf{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{n} & \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

계면 요소에서 이들 상대 변위는 요소의 분포 외력을 유발하며 이 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{t} = \mathbf{D}\Delta \mathbf{u} \quad (10)$$

$$\mathbf{t} = [T_n, T_s, T_t]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_n & 0 & 0 \\ 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & k_t \end{bmatrix} \quad (12)$$

식 (12)의 \mathbf{D} 는 구성 행렬(Constitutive Matrix)을 나타내며, 구성 행렬의 각 성분은 다음과 같이 결정된다.¹³⁾

$$k_n = \frac{E}{h} \quad (13a)$$

$$k_s = k_t = \frac{G}{h} \quad (13b)$$

여기서, h 는 계면 요소에서 두께를 나타내며, h 는 실제로 0에 가까움으로 k_m, k_s, k_i 의 값은 이론상 무한히 크게 된다. 이는 탄성 영역내에서는 접합부의 추가적 변형이 일어나지 않도록 높은 강성이 필요하다는 것과 같은 조건이 된다.

위에서 구한 **D**와 **B**를 이용하여 계면 요소의 내부 에너지를 구해 보면 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_A \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dA \quad (14)$$

이 식에 식 (8), (10)을 대입하면

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} \quad (15)$$

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (16)$$

로 되어 계면 요소의 강성 행렬을 구할 수 있다.

3. 수치 계산 및 검토

3.1 노치가 있는 보

Fig.3과 같은 노치를 갖는 보를 Fig.4와 같이 평면 변형률 요소와 계면 요소로 분할하여 응력 집중 문제에 계면 요소의 유효성을 보이고자 한다. 계면 요소는 Fig.4에 보인 바와 같이 대칭면에서 노치 선단으로부터 단면 높이 방향으로 위치한다.

Fig.5는 계면 요소의 수직 강성에 따른 해석 결과의 안정성을 보인다.

그림에서 알 수 있듯이, 계면 요소의 수직 강성이 커짐에 따라 해가 수렴하는 특성을 보인다. 이는 식 (13)에서와 같이 계면 요소의 두께가 매우 작기 때문에 요소의 강성이 매우 커야함을 의미한다.

계면 요소의 유효성을 보기 위하여 Fig.6은 평면 변형률 요소와 계면 요소를 Fig.4와 같이 동시에 사용하여 해석한 결과와 평면 변형률 요소만을 사용한 결과를 도시한 것이다.

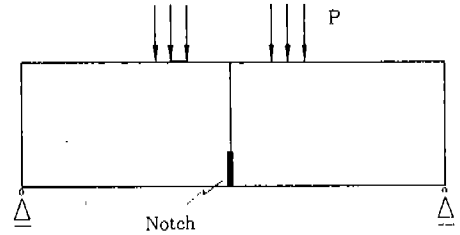


Fig.3 Notched Beam

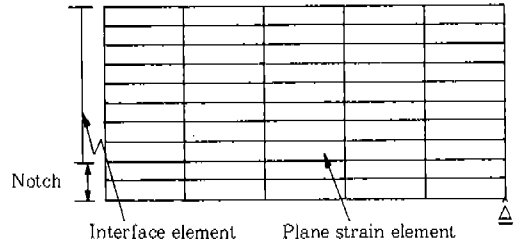


Fig.4 Notched Beam Modelled by the Interface Elements and the Regular Finite Elements

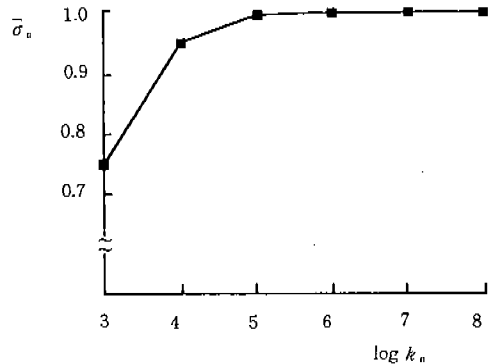


Fig.5 Dimensionless Normal Stress at Notch Tip According to the Normal Stiffness of Interface Elements

노치 선단으로 부터의 거리는 단면 높이에서 노치 길이를 π 값으로 무차원화한 값이며 요소의 세분화 없이도 계면 요소를 사용함으로써 매우 정확한 해석을 할 수 있음을 알 수 있다. 여기서, 계면 요소의 경우 수치적 안정성¹⁰⁾ 때문에 Newton-Cotes 적분을 적용 하였다.

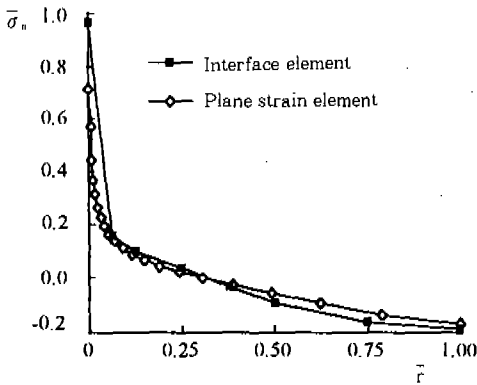


Fig.6 Comparison of Dimensionless Normal Stress Distribution Along Notch Ligament

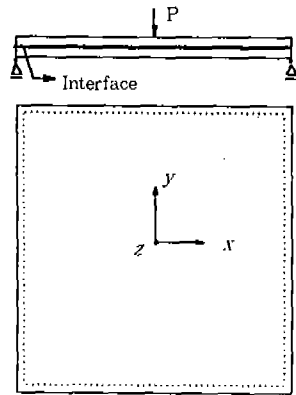


Fig.7 Plate with an Interface and its Boundary Condition

3.2 접합부를 갖는 판

Fig.7은 두 개의 판이 접합된 접합판의 굽힘 문제를 나타내며, 접합부의 전단 강성이 슬립 현상과 처짐 결과에 미치는 영향을 해석하고자 한다.

접합판의 물성치는 Table 1과 같다.

Table 1의 물성치를 이용하여 모델링 방법에 따른 해석 결과를 Table 2에 나타내었으며, 처짐과 슬립 변위는 입체 요소 사이에 계면 요소를

Table 1 Material Properties of an Interfacing Plate

	Mid-layer	Surface layer
Material	Poly-ethylene	Mild steel
Young's Modulus(N/m ²)	1.079×10 ⁹	2.00×10 ¹¹
Shear Modulus(N/m ²)	3.6×10 ⁸	8.14×10 ⁹
Poisson's ratio	0.499	0.3

Table 2 Deflections and Slip Displacements According to Element Arrangements

Element arrangement	Deflection	Slip displacement
Brick-brick-brick	0.66	0.14
Brick-interface-brick	1.00	1.00
Shell-interface-shell	0.99	0.70

사용하여 해석한 결과로 무차원화한 값이다.

Table 2에서 알 수 있듯이, 입체 요소만으로 해석하면 다른 해석 결과보다 슬립이 거의 일어나지 않아 처짐이 부정확하고 이를 해결하기 위하여 중간층을 계면 요소로 모델링함으로써 슬립 현상을 잘 나타낼 수가 있다. 단, 계면 요소를 입체 요소나 쉘 요소와 결합하여 해석했을 때 슬립 변위의 차이가 나는 것은 쉘 요소나 입체 요소의 특성때문으로 생각된다.

3.3 접판 스프링

Fig.8는 대형차의 현가 장치에 많이 사용되고 있는 접판 스프링을 나타내고 있으며, 판과 판의 슬립 특성이 접 판 스프링의 강성도에 미치는 영향을 해석하고자 한다.

실제 접판 스프링의 폭이 충분히 큼으로 평면 변형을 상태를 가정하여 모델링하였다. 즉, 판은 평면 변형률 요소를 사용하고 그 사이를 계면 요소로써 연결하였다. 앞의 예제와 같이 계면 요소의 수직 강성은 충분히 크게 하고 전단 강성을 변화 시켜 해석 하였으며 그 결과를 Fig.9에 도시하였다. 그림에서 변위 Δ는 계면 요소에 의한 변위를 평면 변형률 요소만으로 해석한 결과로써 무차원화한 값을 의미한다.

계면 요소의 전단 강성이 커질 수록 판 사이의 슬립 현상이 없어져 계면 요소를 사용한 결과가

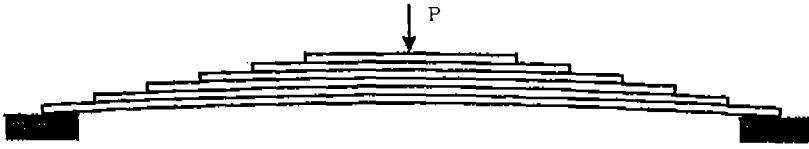


Fig.8 Leaf Spring and its Boundary Condition

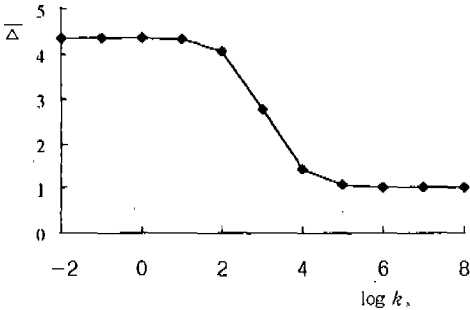


Fig.9 Dimensionless Displacements According to Shear Stiffness of Interface Elements

평면 유한 요소만을 사용한 해에 수렴함을 알 수 있다. 반면에 계면 요소의 전단 강성이 작아지면 위 판과 아래 판의 슬립이 생겨서 겹판 스프링의 굽힘 강성도가 크게 저하됨을 알 수 있다.

4. 결 론

접합부와 노치를 가진 구조물을 효과적으로 해석하기 위하여 2차원, 3차원 유한 요소와 같이 사용할 수 있는 계면 요소를 수식화 하였으며 제한한 계면 요소의 타당성과 유효성을 확인하기 위하여 일반 유한 요소 해석 결과와 비교 검토 하였다.

연구 결과로 얻은 결론은 다음과 같다.

- 1) 일반 유한 요소로 매우 세분하여 얻을 수 있는 응력 집중 특성을 계면 요소를 사용함으로써 효과적으로 구할 수 있다.
- 2) 일반 유한 요소로는 얻을 수 없는 접합면의 슬립 특성을 계면 요소를 사용함으로써 간편하게 구할 수 있다.

참 고 문 헌

1. Francavilla, A. and Zienkiewicz, O. C., "A Note on Numerical Computation of Elastic Contact Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.9, pp.913~924, 1975.
2. Sachdeva, T. D. and Ramakrishnan, C. V., "A Finite Element Solution for the Two-Dimensional Elastic Contact Problem", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.17, pp.1259~1271, 1981.
3. Zienkiewicz et al., O. C., "Analysis of Non Linear Problems in Rock Mechanics with Particular Reference to Jointed Rock Systems", 2nd IRMS Conference, Belgrade, pp.8~14, 1970.
4. Pande, G. N. and Sharma, K. G., "On joint/interface elements and associated problems of numerical ill-conditioning", International Journal for Numerical Methods in Geomechanics, vol.2, pp.293~300, 1979.
5. Sharma, K. G. and Desai, C. S., "Analysis and Implementation of Thin-Layer Element for Interface and Joints", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol.118, pp.2442~2462, 1992.
6. Wilson, E. L., "Finite Element for Foundations, Joints and Fluids", ch.10 in Finite elements in Geomechanics(Ed. G. Gudehus), Wiley, 1977.
7. Ghaboussi J., Wilson, E. L. and Esenberg,

- J., "Finite Element for Rock Joint Interfaces", Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE., vol.99 (SM10), pp.833~848, 1973.
8. Griffiths, D. V., "Numerical Modelling of Interfaces Using Conventional Finite Elements", Proceedings of International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Nagoya, pp.837~844, 1985.
 9. Desai, C. S., Zaman, M. M., Lightner, J. G. and Siriwardane, H. J., "Thin-Layer Element for Interface and Joints", International Journal for Numerical Methods in Geomechanics, vol.8, pp.19~43., 1984.
 10. Schelleken, J. C. J. and de Borst, R., "On the Numerical Integration of Interface Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering., vol.36, pp.43~66, 1993.
 11. Day, R. A. and Potts, D. M., "Zero Thickness Interface Elements-Numerical Stability and Application", International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol.18, pp.689~708, 1995.
 12. Beer, G., "An Isoparametric Joint/Interface Element for Finite Element Analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.21, pp.585~600, 1985.
 13. Feenstra, P. H., de Borst, R. and Rots, J. G., "A Numerical Study on Crack Dilatancy : I, II", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol.117, pp. 737~769, 1991.