

유한요소법과 투자율 텐서를 이용한 고조파 회전자계 계산

이창환* · 김흥규* · 정현교* · 손대락**

* 서울대학교 공과대학 전기공학부

** 한남대학교 물리학과

(1997년 2월 18일 받음, 1997년 6월 17일 최종수정본 받음)

최근에 자계시스템을 해석함에 있어서 서로 다른 위상을 갖는 자속밀도와 자계의 세기간의 벡터적인 관계를 고려하는 것이 중요시 되고 있으며 그 방법에 관한 연구도 많이 이루어지고 있다. 본 연구에서는 유한요소법과 이차원 투자율 텐서를 이용하여 자속밀도와 자계의 세기를 계산하였다. 특히 이 방법으로 회전이력현상을 정확하게 고려하여 회전자속밀도와 회전 자계의 세기를 계산할 수 있음을 보였으며 또한 기본파 성분만을 가진 자속 뿐만 아니라 고조파를 포함하고 있는 자속의 계산을 위한 방법을 제시하고 계산결과와 실험결과와의 비교를 통해서 제안된 방법의 타당성을 제시한다.

I. 서 론

본 연구에서 제안한 투자율 텐서를 이용한 방법은 특히 회전자계 하에서 나타나는 회전자계의 세기와 회전자속밀도의 위상차를 고려할 수 있는 역 데이터 모델링(Back Data Modeling) 기법의 하나이다. 회전자속밀도 및 회전자계의 세기는 삼상 변압기와 같은 시스템의 일부에서 나타나는 것으로 [1] 교번 자속밀도와 자계의 세기에 의한 손실에 비해 상당히 큰 값을 가지게 되며 이를 정확하게 계산하지 못하므로 생기는 손실의 차이를 경험에 의한 팩터값의 조정으로 보충하고 있는 것이 시스템 해석의 현실이다. 따라서 그와 같은 교류손의 한 원인인 회전자계를 정확하게 계산하고자 하는 것이 본 연구의 일차 목표이다.

자속밀도와 자계의 세기간의 비선형적인 벡터 관계를 계산하고자 하는 연구는 전 세계적으로 상당히 진전되어 있어서 여러 알고리즘들이 나와 있다. 그러나 그와 같은 방법을 실제 시스템에 적용시키려면 엄청난 계산 시스템과 시간이 필요하다. 그러나 투자율 텐서에 의한 방법은 실험에 의한 데이터만 갖추어지면 계산하는 데 걸리는 시간이 짧고 계산량이 작다는 이점을 가지고 있다. 또한 회전자계가 발생하는 시스템에서는 회전자계가 부분적으로 생기므로 이와 같은 투자율 텐서와 교번 자계의 계산에 쓰이는 다른 빠른 알고리즘과의 결합이 용이하므로 많은 이점이 있을 것으로 보인다. 이와 같은 이유로 인해 투자율 텐서를 이용하여 2차원 시스템의 해석 [2] 및 3차원 해석 [3]을 위한 노력들이 시도되고 있다.

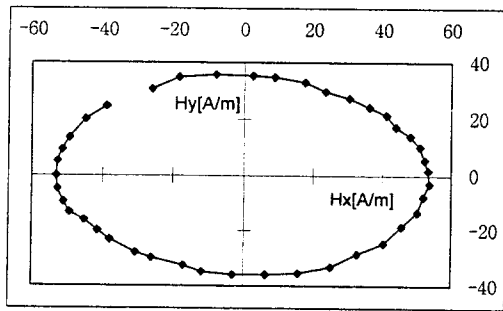
그러나 시스템 및 그 시스템에 사용되는 물질에 따라서

고조파의 영향이 어느 정도 크게 나타날 수도 있으며 고조파 성분을 가지는 회전자속밀도 및 회전자계의 세기의 정확한 해석이 새로운 과제가 되었다. 특히 전압원으로 운영되는 변압기에서 grain-oriented 물질의 경우 회전자속밀도가 고조파성분을 거의 가지고 있지않다고 하더라도 회전자계의 세기는 엄청나게 큰 고조파의 영향을 가지게 된다. 이런 현상을 기존의 방법들만으로 그리고 단순한 2×2 투자율 텐서로도 정확하게 나타내기가 매우 어렵다. 회전자속밀도만을 계산하기 위해서라면 위 방법으로도 어느 정도 정확한 결과를 얻을 수 있지만 회전자계의 세기를 계산하여 보면 상당히 큰 오차를 가지는 것을 확인할 수 있다. 따라서 회전자계의 세기의 정확한 값을 계산하기 위해서 계산되어진 회전자속밀도에 새롭게 정의된 4×4 투자율 텐서를 사용하기도 한다 [4]. 그러나 이 경우에 3차 고조파가 주된 회전자계의 세기 파형은 정확하게 계산할지라도 그 이상의 고조파 성분이 많은 회전자계의 세기 파형은 다른 방법들과 마찬가지로 큰 오차를 가지며 시스템이 놓인 환경이 바뀌게 될 때마다 다시 실험에 의해 데이터를 얻어야되는 어려움이 있다.

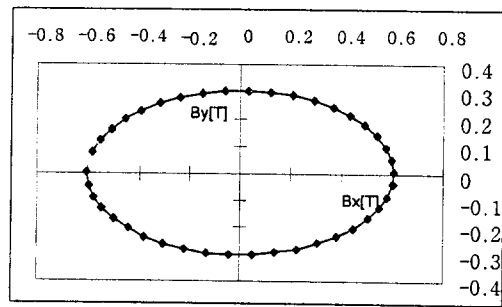
본 연구에서는 2×2 투자율 텐서를 이용하여 회전자속밀도를 계산하고 여기에 각각의 시간단계마다 적용형 투자율 텐서를 적용하여 실측치와 가까운 파형의 회전자계의 세기를 계산하였다.

II. 이차원 투자율 텐서

회전자계 하에서는 회전이력현상으로 인해 자속밀도와

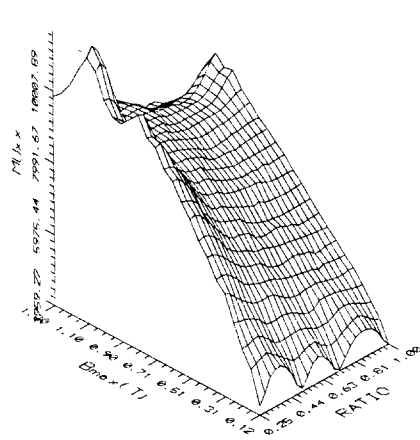


(a) Rotational magnetic field intensity

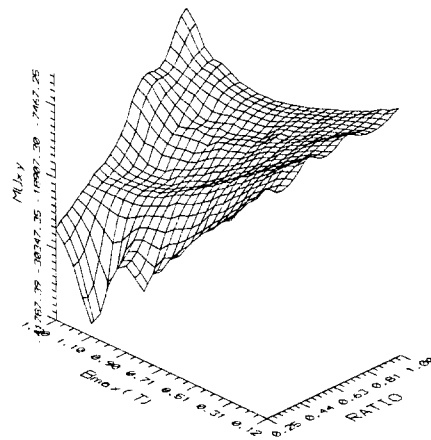


(b) Rotational magnetic flux density

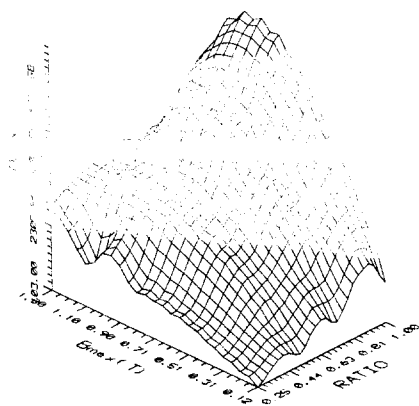
Fig. 1. Experimental example of the rotational magnetic field intensity and the rotational magnetic flux density.



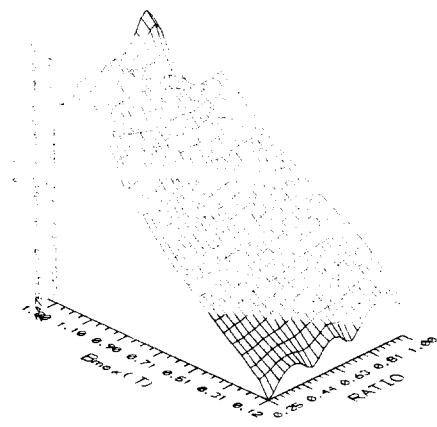
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 2. (a) xx , (b) xy , (c) yx , (d) yy Components of permeability tensor versus B_{max} , a ($p = 0^\circ$).

자계의 세기사이에서 위상차가 발생하게 된다[2, 5]. 이와 같은 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (1)$$

Fig. 1은 이차원 회전자계 실험장치와 같이 60 [Hz]로 회전하는 자계의 세기와 회전자속밀도의 관계를 측정 한 결과로 기준점은 각 파형의 2사분면에 있는 값이며 회전 방향은 시계방향이다. 이로부터 회전자계의 세기의 위상이 앞서감을 알 수 있다.

만약 기본파 성분의 회전자속밀도와 회전자계의 세기만을 고려한다면 식 (1)에서의 텐서행렬은 회전자속밀도의 최대치인 B_{max} , 회전자속밀도의 최대-최소비인 a , 그리고 B_{max} 가 자화용이축과 이루는 각도인 p 에 대한 함수값을 가지게 된다[2, 5]. 따라서 이러한 변수들을 변화시키면서 텐서 데이터를 얻게 되면 기본파성분을 가지는 모든 경우의 자속밀도와 자계의 세기간의 관계를 나타낼 수 있으며 이 관계를 유한 요소법에 적용시키므로해서 회전이력현상이 고려된 회전자속밀도와 회전자계의 세기를 계산할 수 있다. 텐서행렬의 요소는 실험에 의해 얻어진 회전자속밀도와 회전자계의 세기로 부터 계산되어져서 B_{max} , a , p 에 따라서 Fig. 1과 같은 회전자속밀도와 회전자계로부터 Fig. 2와 같은 텐서데이터를 얻을 수 있다. Fig. 2는 Fig. 1과 같이 여러 가지 경우의 회전자계의 세기와 회전자속밀도를 측정하여 식 (1)에 의하여 계산되어진 값들로, a 가 0도인 경우에 B_{max} 와 p 의 가로축에 대하여 Fig. 2 (a)는 μ_{xx} , (b)는 μ_{xy} , (c)는 μ_{yx} , 그리고 (d)는 μ_{yy} 를 나타낸다.

III. 이차원 정식화

유한 요소 정식화 중에서 에너지 범함수를 사용하기 위한 전제 조건은 연산자가 positive-definite 해야 하고 self-adjoint 해야 하는데 여기서 사용되는 투자율 텐서의 경우에 대칭이 아니기 때문에 에너지 범함수를 사용할 수 없다. 따라서 해석 영역이 한 방향(z 방향)으로 무한하여 변위 전류를 무시할 수 있다고 하면 맥스웰 방정식을 사용하여 다음과 같이 정식화 할 수 있다. 아래 식들에서 $\text{vec } \vec{j}$ 는 자유 전류 밀도를, $\text{vec } \vec{A}$ 는 자기 벡터 포텐셜을 나타낸다. 종축방향인 z 방향으로의 자계의 변화량을 무시할 수 있다는 가정하에서 자기포텐셜을 이용하여 식(1)과 (2)로부터 식 (3)을 얻을 수 있다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_{yy} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_{xx} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_{xy} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_{yx} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -j$$

여기서 ν_{ii} 는 투자율 텐서의 역행렬의 원소이다. 이 식은 Galerkin 방법에 의해 정식화된다. 이와 같은 정식화

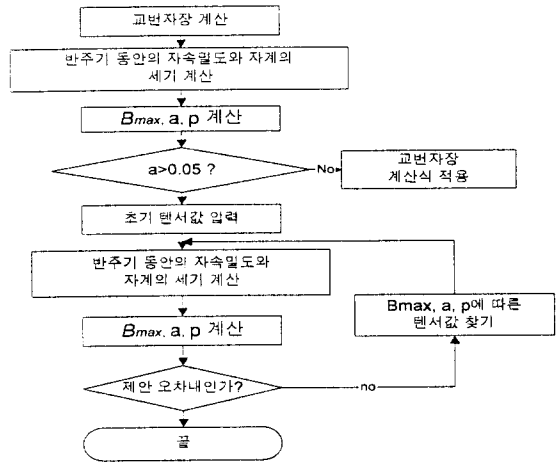


Fig. 3. Flowchart for the two-dimensional calculation of the rotational magnetic field.

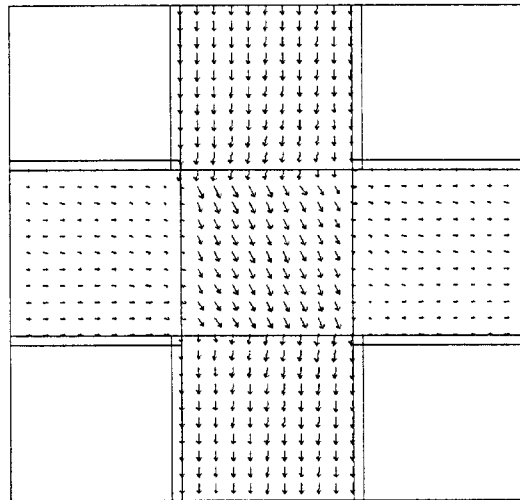


Fig. 4. Two dimensional model.

와 Fig. 3과 같은 계산 흐름에 의해 Fig. 4의 모델에 대하여 회전자속밀도와 회전자계의 세기는 계산되어진다. Fig. 4는 이차원 회전자계 측정을 위한 실험장치를 그대로 모델링한 것으로 x 와 y 방향의 자계를 생성하기 위한 요크와 권덕터, 그리고 가운데는 가로세로 80 [mm]인 시편을 나타낸 것이며 화살표들은 어떤 한 시점에서의 해석 결과 중 자속의 흐름을 보인 것이며 공기중에는 자속이 존재는 하되 그 양이 상대적으로 매우 작으므로 화살표들이 보이지 않는다.

IV. 고조파를 고려한 투자율 텐서

Fig. 5, Fig. 6, 그리고 Fig. 7은 실험에 의해 구해진 고조파가 실린 자속밀도와 자계의 세기를 나타낸 것이다. 이를 통해 회전자속밀도가 증가할수록 회전자계의 세기의 파형에 고조파 성분이 커짐을 알 수 있으며 왜 고조파를 고려한 계산이 필요한가를 알 수 있다.

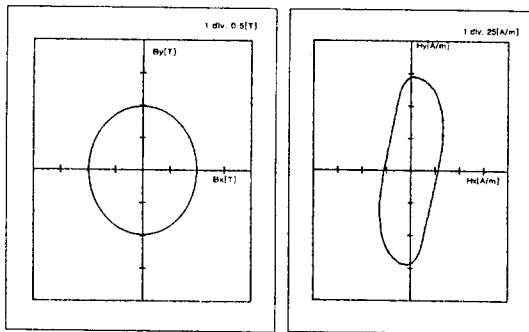


Fig. 5. Rotational magnetic field intensity and flux density in case of 0.98T B_{max} .

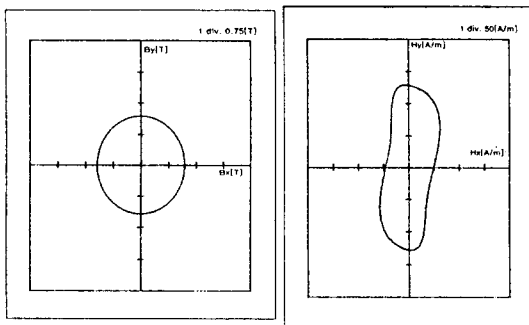


Fig. 6. Rotational magnetic field intensity and flux density in case of 1.18T B_{max} .

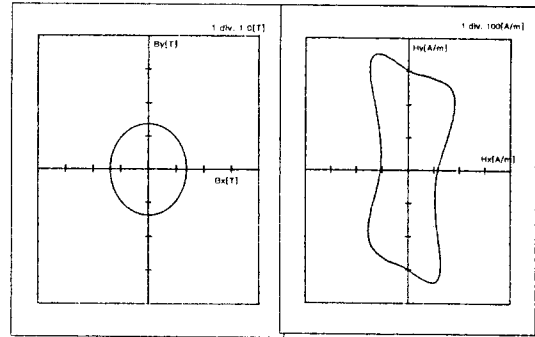


Fig. 7. Rotational magnetic field intensity and flux density in case of 1.38T B_{max} .

위 그림들과 같은 데이터를 이용하여 텐서값들을 찾되 그 값들은 기본파의 경우와 같이 한 주기동안 일정한 값들이 아니고 각 계산 단계마다 다른 값을 가지게 된다. 즉, 회전자계의 세기와 회전자속밀도의 관계를 한 주기동안 나타내기 위해서는 시간분할 방법에 의해서 여러 번의 계산과정을 필요로 하는데, 기본파의 경우에는 앞에서 설명한 바와 같이 각각의 계산과정에서 일정한 값의 텐서가 사용되지만 고조파의 경우에는 Fig. 3의 기본파 계산을 위한 흐름도에서 회전자계의 세기의 계산을 위해서 적용형 텐서, 즉 각각의 계산과정에서 다른 텐서값이 사용되며 이 값들은 실험에 의해서 구해놓은 값들이다. 만약 한 주기동안 같은 값을 이용하려면 텐서 행렬은 2차가 아니라 고려하는 고조파의 종류에 따라서 2차씩 늘어나게 되므로 매우 큰 계산 시스템이 필요하다. 이와 같이 회전자계를 계산하기위해 한 주기동안 일정한 텐서 투자율을 이용해 나타내려면 상당히 큰 계산 시스템이 필요하고 고조파성분들의 비가 다른 각 경우마다 다른 데이터를 이용해야하는 어려움이 있지만 본 논문에서와 같은 방법으로 회전자계를 계산하게 되면 시스템이 놓여있는 환경에 상관없이 고조파 성분이 포함된 자계를 계산할 수 있다.

V. 이차원 시뮬레이션과 결과(기본파)

Fig. 8은 기본파만 고려하여 2×2 투자율 텐서를 이용하여 계산한 회전자속밀도와 같은 투자율 텐서로부터 계산되어진 회전자계의 세기를 나타낸 것이며, Fig. 9은 실험결과를 Fast Fourier Transformation을 통해 기본파만 나타낸 것이다.

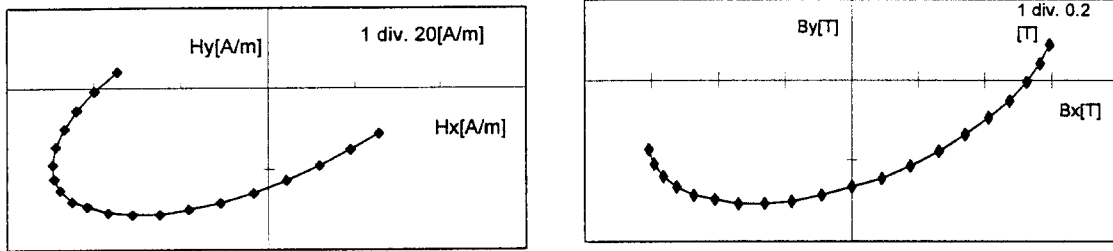


Fig. 8. Calculated results.
- Rotational magnetic field intensity and flux density -

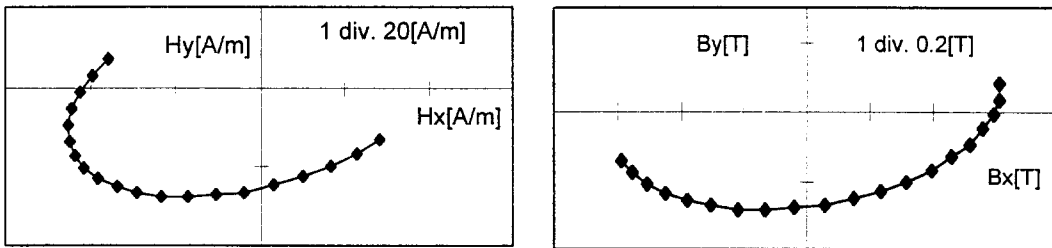


Fig. 9. Experimental results.
- Rotational magnetic field intensity and flux density -

자속밀도와 자계의 세기간의 위상차를 명확히 보이기 위해 반주기 동안의 결과를 나타내었으며 회전방향은 시계방향이다. 본 결과에서 알 수 있듯이 기본파만 고려하는 경우 실제 시스템에서의 field도 상당히 정확하게 계산이 가능하지만 실제로 회전자속밀도와 회전자계의 세기가 모두 기본파 성분만 가지는 경우는 거의 없으며 이들의 관계로부터 계산되어지는 철순부분에서 계산값과 측정값이 차이를 가지게 된다. 따라서 고조파를 고려하는 계산이 필요하다.

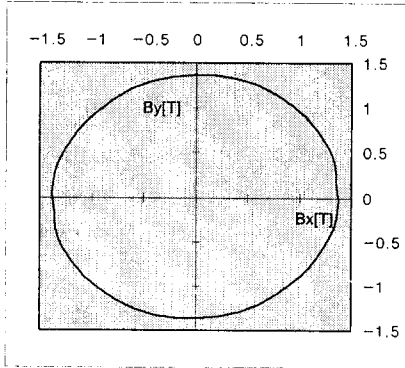
Ⅵ. 이차원 시뮬레이션 결과(고조파 고려)

5장에서 보였듯이 기본파만 고려하여 회전자속밀도와 회전자계의 세기를 계산하는 부분은 측정된 결과와 상당히 근접하였다. 그럼 여기서 기본파 고려방법으로는 정확한 회전자속밀도의 파형을 계산하였다고 가정할 경우 앞에서 설명한 고조파가 고려된 자계의 파형 계산이 실제 측정 파형과 얼마나 근사한 값을 가지는가를 비교할 수 있다. 실제로 정전압원을 주전원으로 하는 시스템에서는 자속밀도의 파형은 회전자계의 세기의 파형에 비하면 고조파 성분을 거의 가지고 있지 않다. Fig. 10은 이러한 비교를 보여주는 것으로 회전

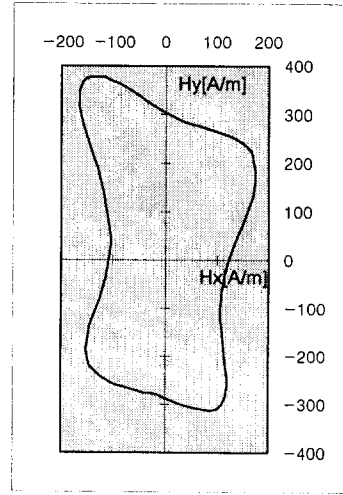
자속밀도 (a)에 대하여 (b)는 실제로 측정된 회전자계의 세기의 파형, (c)는 기본파만 고려하여 계산할 경우의 회전자계의 세기의 파형, 그리고 (d)는 고조파를 고려한 방법에 의해 계산되어진 회전자계의 세기의 파형을 나타낸다. 이 결과를 통해 기본파만 고려할 경우에 실측 파형과 얼마나 큰 차이를 가지는지, 그리고 앞에서 제시한 방법에 의하여 이러한 실측 파형에 가까운 자계를 계산할 수 있음을 알 수 있다.

Ⅶ. 결 론

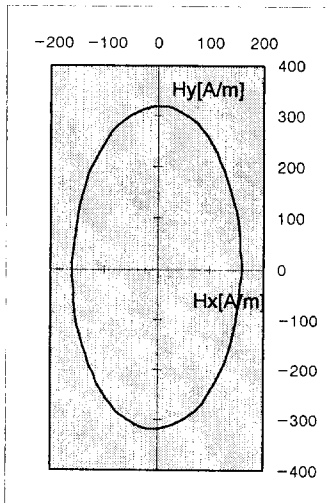
회전자속밀도와 회전자계의 세기간의 위상차와 비선형적인 관계를 2×2 투자율 텐서와 유한요소법을 결합하여 계산하였고 실험을 통하여 그 정확성을 확인함과 동시에 전압원을 주전원으로 하는 시스템의 경우 자속밀도는 고조파성분이 적지만 자계의 세기는 상당히 큰 고조파 성분을 가지고 있는 것을 알 수 있었다. 이와 같은 고조파 성분을 가지는 회전자계의 세기의 계산을 위해 각 계산단계마다 다른 투자율 텐서, 즉 적응형 텐서를 이용하였으며 계산 결과를 실험 결과와 비교함으로써 그 타당성을 검증하였다.



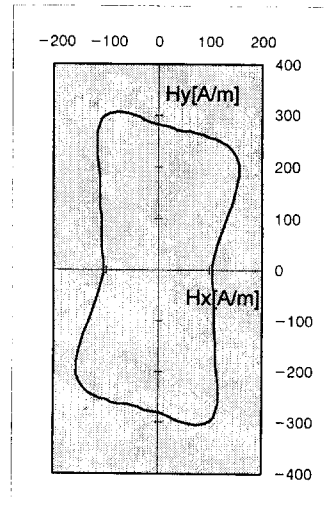
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 10. Comparison of the calculated rotational magnetic field intensity with the experimental one.

- (a) Given rotational magnetic flux density
- (b) Measured rotational magnetic field intensity
- (c) Rotational magnetic field intensity without harmonic components
- (d) Rotational magnetic field intensity with harmonic components

References

[1] A. J. Moses and B. Thomas, "Measurement of Rotating Flux in Silicon Iron Laminations", IEEE Trans. Magn. **9**, 651 (1973).

[2] M. Enokizono, T. Suzuki, J. Sivert, J. Xu, "Rotational Power Loss of Silicon Steel Sheet", IEEE Trans. Magn. **26**, 2562 (1990).

- [3] C. H. Lee, H. K. Kim, J. S. Chun, H. K. Jung
"Finite Element Analysis of the Rotational Magnetic Field", SAEPC'96 73(1996), Hokkaido, Japan.
- [4] M. Enokizono, K. Yuki, S. Kanao, "Magnetic field Analysis by Finite Element Method Taking Rotational Hysteresis into Account", IEEE Trans. Magn. **30**, 3373(1994).
- [5] H. Y. LEE, H. K. Jung, S. Y. Hahn, G. S. Park, "Finite Element Analysis of Rotational Hysteresis Loss using Two Dimensional Permeability Tensor", Journal of KMS, **5**, 16(1995).

Harmonic Rotational Magnetic Field Calculation with the Finite Element Method and the Permeability Tensor

Chang-Hwan Lee, Hong-Kyu Kim, Hyun-Kyo Jung

School of Elec. Eng. Seoul Nat'l Univ.

Derac Son

Department of Physics, Hannam Univ.

(Received 18 February 1997, in final form 17 June 1997)

Recently, many researchers are interested in the analysis of the magnetic fields considering the vector relation between the magnetic flux density and the magnetic field intensity.

In this paper, Finite Element Method with two dimensional tensor permeability is adopted to calculate the magnetic field quantities in the system having the rotational magnetic field. In addition, the method of analyzing the magnetic field considering the harmonic components is introduced.

The validity of the proposed method is proved compared with the experimental results.