

## 추계학적 방법을 이용한 성층화된 흙에서 유효 비포화투수계수의 유도

### Derivation of the Effective Hydraulic Conductivity in Stratified Layered Soil Using Stochastic Approach

윤성용\* / 선우중호\*\*

Yun Soung Yong / Sonu Jung Ho

---

#### Abstract

The effective unsaturated hydraulic conductivity in stratified soils is evaluated using a three-dimensional stochastic approach. Because of the disparity of the correlation scales in a stratified soil, the general stochastic equations are simplified. This allows analytical evaluation of generic expressions for the effective hydraulic conductivities. Simple asymptotic expressions, valid at particular ranges(wetting front, drying condition, wetting condition) of the mean flow characteristics, are also derived. An example of applying the derived theoretical result to a imaginary clay soil is presented. It reveals found that the effective unsaturated hydraulic conductivity showed large-scale hysteresis. Such large-scale hysteresis was produced by the spatial variability of hydraulic soil properties rather than hysteresis of the local parameters. In addition the results show that the effective hydraulic conductivities were larger in the case of accommodating heterogeneity of soil properties rather than neglecting heterogeneity of soil properties.

*Keywords:* stochastic approach, unsaturated hydraulic conductivity, hysteresis, heterogeneity

---

#### 요 지

3차원 추계학적 방법을 사용하여 성층화된 흙에서 유효 비포화투수계수를 유도하였다. 성층화된 흙의 상관길이는 차이가 있기 때문에 추계학식이 단순화되면서 유효 비포화투수계수에 대한 일반식을 해석적으로 유도할 수 있게 된다. 또한 평균흐름이 특정한 범위(습윤전선, 젖음과정, 마름과정)에서 유효한 단순화된 접근식을 유도하였다. 예증으로 이론적인 결과를 가상 점토에 적용하였다. 그 결과 유효 비포화투수계수는 거시적인 이력현상을 나타낼 수 있었다. 거시적인 이력현상이란 미시적인 이력현상이라기 보다는 오히려 흙의 공간적인 변동으로 인하여 발생하는 것이다. 또한 유효 비포화투수계수는 흙의 비균질성을 무시한 경우보다 비균질성을 고려한 경우에서 크게 나타났다.

**핵심용어:** 추계학적 방법, 비포화투수계수, 이력현상, 비균질성

---

\* 안산공업전문대 토목학과 전임강사

\*\* 서울대학교 총장

## 1. 서 론

윤성용과 선우중호(1995)는 스펙트럼 섭동방법을 이용하여 비균질 매질의 비포화 흐름을 해석할 수 있는, 성층화된 흙에서 거시적 시각으로 바라본 추계학적 모형을 개발하였다. 개발된 추계학적 모형은 흙의 변동성이 크기 때문에 공간에 대해 거시적 관점을 가짐과 동시에 해석해를 구하기 위해 시간에도 거시적인 관점을 견지한 이론식이다. 개발된 추계학적 모형에 성층화된 흙을 가정하게되면 복잡한 3차원 적분을 단순화시켜 유효 비포화투수계수의 해석해를 구할 수 있게된다. 여기서 유효 비포화 투수계수란 비균질매질의 비포화투수계수를 평균화함으로써 균질매질의 비포화투수계수와 등가인 비포화투수계수를 말한다. 본 연구의 개략은 다음과 같다. 먼저 유효 비포화투수계수에 대한 일반적인 해석식을 구한다. 여기서 구해진 해석식은 매우 복잡하여 그 해를 구하기가 어렵다. 따라서 흙특성과 평균흐름 특성이 특징하게 나타나는 범위(습윤전선, 젖음과정, 마름과정)에서 유효한 점근식을 사용하여 유효 비포화투수계수의 해석해를 구하였다.

본 연구와 관련된 연구자는 Yeh 등(1985)과 Mantoglou 등(1987)이 있다. 이들은 Gardner식을 이용하여 Richards방정식을 무차원한 후 스펙트럼 섭동방법을 이용하여 유효 비포화투수계수를 유도하였다.

Yeh 등(1990)은 Yeh 등(1985)이 구한 유효 비포화투수계수는 정상흐름에 대한 모형이기 때문에 습윤전선 내의 종단면에서는 비포화흐름의 거동을 해석할 수 없는 한계를 가진다고 언급했다. 또한 Gardner식은 포화와 비포화영역을 구분해내지 못하기 때문에 포화흐름의 영역을 비포화 흐름으로 해석하는 경우가 생길 수 있다. 결국 Yeh 등(1985)이 구한 유효 비포화투수계수는 정상상태에 대한 제한 없이 유도된 것이기 때문에 이를 적용하기에는 한계가 있다.

Mantoglou 등(1987)은 정상흐름에서 구한 Yeh 등(1985)의 유효 비포화투수계수를 확장하여 천이흐름에서의 해석해를 유도하였다. 평균모세관압력이 상대적으로 작은 경우의 유효 비포화투수계수는 Yeh 등(1985)의 결과와 일치하였으며 평균모세관압력이 큰 경우에는 이력현상이 나타났다. 흙과 흐름의 섭동이 완전하게 상관되어 있는 경우는 해석해가 복잡하여 유도하지 않았다. Bosch(1990)는 Yeh 등(1990)이 제안한 單位平均 傾斜方法(unit mean gradient method)으로 Mantoglou 등(1987)의 유효비포화투수계수를 검토하

였는데 마름과정일 때는 일치하였지만 젖음과정일 때는 過剩豫測(overpredict)되었다. 또한 천이흐름에서는 평균 모세관압력이 시간에 대해 빠르게 변화하여야 함에도 불구하고 변화가 적다는 것을 밝혀내면서 Mantoglou 등(1987)의 이력현상을 표현하는데는 한계가 있다는 것을 알아내었다.

이에 본 연구에서는 포화와 비포화영역을 정확히 구분하는 Brooks-Corey식을 이용하였으며 흙과 흐름의 섭동이 완전하게 상관되어 있는 경우는 물론, 습윤전선에 대한 거동과 Mantoglou 등(1987)보다 개선된 거시적인 이력현상을 모의할 수 있는 유효 비포화투수계수를 유도하고자 한다.

## 2. 有效 非飽和透水係數의 誘導過程.

Darcy공식과 질량 보전 원리를 결합하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [K_{ii}(\psi) (J_i + \frac{\partial h}{\partial x_i})] = \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad i=1, 2, 3 \quad (1)$$

여기서  $x_i$ 는 공간적 위치( $x_1$ 은 수직 하방향),  $K_{ii}(\psi)$ 는 비포화투수계수( $K_{11}(\psi)$ 은 성층과 수직방향,  $\psi$ : 모

세관압력),  $J_i = \frac{\partial(H+x_1)}{\partial x_i}$ 는  $x_i$ 방향에서 평균수리경

사,  $H$ 는 공간적 위치  $x=(x_1, x_2, x_3)$ 와 시간  $t$ 에서 모세관압력의 평균( $=E(\psi)$ ),  $h$ 는 모세관압력의 섭동, 그리고  $q_i$ 는 흐름률(flux)이다.

유효 비포화투수계수( $\overline{K_{ii}(H)}$ )는 비포화투수계수의 평균개념이므로 다음과 같이 기대값을 취해 준다.

$$\overline{K_{ii}(H)} = \frac{E[q_i]}{J_i} \quad \text{no sum on } i \quad (2.a)$$

$$\overline{K_{ij}(H)} = 0 \quad i \neq j \quad (2.b)$$

식(2.a)에 흙특성( $\ln K_s, C, \phi_{ae}$ )과 모세관압력( $\psi$ )에 대한 평균과 섭동을 Brooks-Corey식에 대입하여 정리한 다음 이를 식(2a)에 대입하면 다음과 같다(자세한 유도 과정은 부록 참조).

$$\overline{K_{ii}(H)} = BI^n \left\{ 1 - n \left( \sigma_\epsilon^2 + \frac{\tau_i}{J_i} \right) \right\} \text{no sum on } i \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} \sigma_\epsilon^2 = & -\frac{1}{2n} \sigma_f^2 - \frac{(n+1)}{2A^2} \sigma_a^2 - \frac{(n+1)}{2H^2} \sigma_h^2 \\ & + \frac{1}{H} E[fh] + \frac{n}{AH} E[ah] - \frac{1}{A} E[fa] \end{aligned} \quad (4.a)$$

$$\tau_i = -\frac{1}{A} E[a \frac{\partial h}{\partial x_i}] - \frac{1}{n} E[f \frac{\partial h}{\partial x_i}] \quad (4.b)$$

상기 식의 변수는 다음과 같이 정의된다.  $K_s$ 는 포화투수계수,  $C$ 는 함수보유능력,  $\psi_{ae}$ 는 공기유입값,  $f$ 는 포화투수계수를 대수변환한 평균(= $E[\ln K_s]$ )을 나타내며  $A$ 는 공기유입값의 평균(= $E[\psi_{ae}]$ ),  $\Gamma$ 는 함수보유능력의 평균(= $E[C]$ ),  $F$ 는  $\ln K_s$ 의 섭동,  $a$ 는 공기유입값의 섭동,  $\gamma$ 는 함수보유능력의 섭동,  $n$ 은 Brooks-Corey 식의 매개변수,  $\sigma_f^2$ 은 섭동  $f$ 의 분산,  $\sigma_a^2$ 은 섭동  $a$ 의 분산,  $\sigma_h^2$ 은 모세관압력 분산(윤성용과 선우중호, 1997)이다. 또한  $dz_f(k)$ ,  $dz_a(k)$ ,  $dz_r(k)$ 는 각각 wave number  $k$ 에서 흡특성 섭동  $f$ ,  $a$ ,  $r$ 의 Fourier-Stieltjes spectral amplitude이다.

$$b_i = -\frac{1}{H} (\frac{\partial H}{\partial x_i} + J_i), \quad g = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2} - \frac{n J_i}{H} \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$G = \frac{J_i}{H^2} \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{g}{H}, \quad B = \frac{e^F A^n H^{-n}}{\Gamma}$$

$$J_i = \frac{\partial H}{\partial t}$$

섭동  $f$ ,  $a$ ,  $h$ ,  $\partial h / \partial x_i$ 의 相互相關(cross correlation)은 다음과 같다.

$$E[fh] = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} S_{hf}(k_i) dk_i \quad (5.a)$$

$$E[ah] = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} S_{ha}(k_i) dk_i \quad (5.b)$$

$$E[f \frac{\partial h}{\partial x_i}] = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} j k_i S_{hf}(k_i) dk_i \quad (5.c)$$

$$E[a \frac{\partial h}{\partial x_i}] = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} j k_i S_{ha}(k_i) dk_i \quad (5.d)$$

여기서  $k$ 는 wave number,  $S_{hf}$ ,  $S_{ha}$ 는 공스펙트럼 밀도함수(cross spectral density function)이다.

공스펙트럼 密度函数  $S_{hf}$ 와  $S_{ha}$ 는 다음과 같다.

$$S_{hf} = W_f S_{ff} + W_a S_{af} + W_r S_{rf} \quad (6.a)$$

$$S_{ha} = W_f S_{fa} + W_a S_{aa} + W_r S_{ra} \quad (6.b)$$

완전하게 成層化된 흡에서는  $W_f$ ,  $W_a$ ,  $W_r$ 가 다음과 같이 주어진다(윤성용과 선우중호, 1997)

$$W_f = \frac{-ik_1 J_1 - g}{k_1^2 + ik_1 b_1 n + nG} \quad (7.a)$$

$$W_a = -\frac{n}{A} \frac{ik_1 J_1 + g}{k_1^2 + ik_1 b_1 n + nG} \quad (7.b)$$

$$W_r = \frac{J_i}{B \Gamma (k_1^2 + ik_1 b_1 n + nG)} \quad (7.c)$$

지수공분산모형에 대한  $f$ ,  $a$ ,  $r$ 의 공스펙트럴 밀도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$S_{\beta}(k_1) = \frac{\sigma_{\beta}^2 \lambda_1}{\pi(1 + \lambda_1^2 k_1^2)}, \quad \beta = f, a, r \quad (8)$$

여기서  $\lambda_1$ :성층과 직각방향의 상관길이  $f$ 의 분산에 대한  $a$ ,  $r$ 의 분산비를 각각  $\zeta^2$ ,  $\eta^2$ 라고 하면 다음과 같다.

$$\zeta^2 = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_f^2}, \quad \eta^2 = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_f^2} \quad (9)$$

따라서  $f$ ,  $a$ ,  $r$ 의 공스펙트럴 밀도함수는  $f$ 의 스펙트럼 밀도함수로 표현된다. 해석해를 구하기 위하여 上記 식은 다음과 같은 두가지 특별한 경우에 적용하게 된다. 즉, 첫째는  $f$ ,  $a$ ,  $r$ 가 완전하게 상관되어 있는 경우이고 둘째는  $f$ ,  $a$ ,  $r$ 가 상관되어 있지 않은 경우로 나누어 적용한다. 실제 물리적 현상은 흡의 특성이 변할 때 포화투수계수의 섭동( $f$ ), 공기유입값의 섭동( $a$ ), 함수보유능력의 섭동( $r$ )이 어느정도 상관되어 변하겠지만 상관 정도의 자료를 구하기가 어려우므로 위의 극단적인 두가지 경우에 대해 解析解를 구하기로 한다.

(경우1)  $f$ ,  $a$ ,  $r$ 가 相關되어 있지 않은 境遇

$$S_{aa} = \zeta^2 S_{ff}, \quad S_{rr} = \eta^2 S_{ff}, \quad S_{fa} = 0, \\ S_{ar} = 0, \quad S_{rf} = 0 \quad (10.a)$$

(경우2)  $f$ ,  $a$ ,  $r$ 가 完全하게 相關되어 있는 境遇

$$S_{aa} = \zeta^2 S_{ff}, \quad S_{rr} = \eta^2 S_{ff}, \quad S_{fa} = \zeta S_{ff}, \\ S_{ar} = \zeta \eta S_{ff}, \quad S_{rf} = \eta S_{ff} \quad (10.b)$$

## 2.1 $E[fh]$ 項

식(7)의  $W_f$ ,  $W_a$ ,  $W_r$ 를 식(6.a)에 대입하고 이를 식(5.a)에 적용하면  $E[fh]$ 를 구하게 된다.

(경우1)  $f$ ,  $a$ ,  $r$ 가 상관되어 있지 않은 경우

$$E[fh] = \\ 2 \int_0^{\infty} \frac{-k_1^2 (b_1 J_1 n + g) - nG}{k_1^4 + k_1^2 (2nG + b_1^2 n^2) + n^2 G^2} \frac{\sigma_f^2 \lambda_1}{\pi(1 + \lambda_1^2 k_1^2)} dk_1 \quad (11)$$

(경우 2)  $f, a, r$ 가 완전하게 상관되어 있는 경우

$$E[fh] = 2 \int_0^\infty \left\{ \frac{k_1^2(-b_1 n J_1 - \frac{b_1 n^2 J_1 \zeta}{A} - g - \frac{ng\zeta}{A} + \frac{J_1 \eta}{BF})}{k_1^4 + k_1^2(2nG + b_1^2 n^2) + n^2 G^2} + nG \left( \frac{-ng\zeta}{A} - g + \frac{J_1 \eta}{BF} \right) \frac{\sigma_f^2 \lambda_1}{\pi(1 + \lambda_1^2 k_1^2)} \right\} dk_1 \quad (12)$$

식(11)과 식(12)를 일반적 형태인 식(13)으로 표현하면  $E[fh]$ 는 다음과 같다.

$$E[fh] = \frac{2\sigma_f^2 \lambda_1 I_1}{\pi} \quad (13)$$

여기서  $I_1$ 은 다음과 같이 주어진 積分式이다.

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{a_1 k_1^2 + a_2}{k_1^4 + a_3 k_1^2 + a_4} \frac{1}{1 + a_5 k_1^2} dk_1 \quad (14)$$

이때  $I_1$ 의 分母項  $a_3, a_4, a_5$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$a_3 = 2nG + b_1^2 n^2, a_4 = n^2 G^2, a_5 = \lambda_1^2 \quad (15)$$

또한  $I_1$ 의 分子項  $a_1, a_2$ 는 다음과 같다.

(경우 1)  $f, a, r$ 가 상관되어 있지 않은 경우

$$a_1 = -b_1 J_1 n - g, a_2 = -ngG \quad (16)$$

(경우 2)  $f, a, r$ 가 완전하게 상관되어 있는 경우

$$a_1 = -b_1 n J_1 - \frac{b_1 n^2 J_1 \zeta}{A} - g - \frac{ng\zeta}{A} + \frac{J_1 \eta}{BF} \quad (17.a)$$

$$a_2 = nG \left( \frac{-ng\zeta}{A} - g + \frac{J_1 \eta}{BF} \right) \quad (17.b)$$

적분  $I_1$ 은 변수  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 의 함수로 유도된다(윤성용과 선우중호, 1997).

$\Delta = a_3^2 - 4a_4 = b_1^2 n^2 (b_1^2 n^2 + 4nG)$ 가 陽數이고  $nG$ 가 陽數일 때 ( $\Delta > 0, nG > 0$ )

$$I_1 = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_1 (a_4)^{\frac{1}{2}} + a_1 a_4 a_5 - (a_4)^{\frac{1}{2}} a_2 a_5 + a_2 - a_2 a_3 a_5}{nG (b_1^2 n^2 + 4nG)^{\frac{1}{2}} (1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5)} - a_5 \frac{a_1 - a_2 a_5}{(1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5) \lambda_1} \right\} \quad (18.a)$$

$\Delta = a_3^2 - 4a_4 = b_1^2 n^2 (b_1^2 n^2 + 4nG)$ 가 陽數이고  $nG$ 가 陰數일 때 ( $\Delta > 0, nG < 0$ )

$$I_1 = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{-a_1 (a_4)^{\frac{1}{2}} + a_1 a_4 a_5 + (a_4)^{\frac{1}{2}} a_2 a_5 + a_2 - a_2 a_3 a_5}{nG (b_1 n) (1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5)} - a_5 \frac{a_1 - a_2 a_5}{(1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5) \lambda_1} \right\} \quad (18.b)$$

$\Delta = a_3^2 - 4a_4 = b_1^2 n^2 (b_1^2 n^2 + 4nG)$ 가 陰數이고  $nG$ 도 陰數일 때 ( $\Delta < 0, nG < 0$ )

$$I_1 = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{-a_1 (a_4)^{\frac{1}{2}} - a_1 a_4 a_5 + (a_4)^{\frac{1}{2}} a_2 a_5 - a_2 + a_2 a_3 a_5}{nG (b_1 n) (1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5)} - a_5 \frac{a_1 - a_2 a_5}{(1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5) \lambda_1} \right\} \quad (18.c)$$

## 2.2 $E[ah]$ 項

위와 같은 방법으로 식(5.b)와 식(7.b)를 적용하면 다음과 같다.

$$E[ah] = \frac{2\sigma_f^2 \lambda_1 I_1}{\pi} \quad (19)$$

여기서  $I_1$ 은 식(18)에 주어진다. 분모항  $a_3, a_4, a_5$ 은 식(15)와 같고 분자항  $a_1, a_2$ 를 구하면 다음과 같다.

(경우 1)  $f, a, r$ 가 상관되어 있지 않은 경우

$$a_1 = \frac{-n\zeta^2}{A} (b_1 J_1 n + g), a_2 = \frac{-n^2 \zeta^2 g G}{A} \quad (20)$$

(경우 2)  $f, a, r$ 가 완전하게 상관되어 있는 경우

$$a_1 = \zeta \left( -b_1 n J_1 - \frac{b_1 n^2 J_1 \zeta}{A} - g - \frac{ng\zeta}{A} + \frac{J_1 \eta}{BF} \right) \quad (20.a)$$

$$a_2 = nG \zeta \left( \frac{-ng\zeta}{A} - g + \frac{J_1 \eta}{BF} \right) \quad (20.b)$$

## 2.3 $E[f\partial h/\partial x_4]$ 項

$E[f\partial h/\partial x_i]$  ( $i=1,2,3$ )항은 完全 成層된 흙에서는 성층과 직각인 방향( $k_1$ )에 대해서만 고려해 주기 때문에  $E[f\partial h/\partial x_1]$ 경우에만 값이 주어지고  $E[f\partial h/\partial x_2], E[f\partial h/\partial x_3]$ 은 0이 된다. 식(7)의  $W_f, W_a, W_r$ 를 식(5.c)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$E[f\partial h/\partial x_1] = \frac{2\sigma_f\lambda_1 I_1}{\pi} \quad (21)$$

여기서  $I_1$ 은 다음과 같이 주어진 積分式이다.

$$I_1 = \int_0^\infty \left[ a_6 + \frac{a_1 k_1^2 + a_2}{k_1^4 + a_3 k_1^2 + a_4} \right] \frac{1}{1 + a_5 k_1^2} dk_1 \quad (22)$$

이 때  $I_1$ 의 分母項  $a_3, a_4, a_5$ 는 식(15)와 같고  $I_1$ 의  $a_6$ 과 分子項  $a_1, a_2$ 는 각각 다음과 같다.

(경우 1)  $f, a, r$ 가 상관되어 있지 않은 경우

$$a_1 = -(b_1 ng + nGJ_1 + b_1^2 n^2 J_1) \quad (23.a)$$

$$a_2 = -n^2 G^2 J_1, \quad a_6 = J_1 \quad (23.b)$$

(경우 2)  $f, a, r$ 가 완전하게 상관되어 있는 경우

$$a_1 = -J_1 \left( 1 + \frac{n\zeta}{A} \right) (b_1^2 n^2 + nG) + b_1 n \left( \frac{J_1 \eta}{BF} - g - \frac{nG\zeta}{A} \right) \quad (24.a)$$

$$a_2 = -n^2 G^2 J_1 \left( 1 + \frac{n\zeta}{A} \right),$$

$$a_6 = J_1 \left( 1 + \frac{n\zeta}{A} \right) \quad (24.b)$$

식(22)의  $I_1$ 의 적분의 解는 다음과 같다.

$\Delta = a_3^2 - 4a_4 = b_1^2 n^2 (b_1^2 n^2 + 4nG)$ 가 陽數이고  $nG$ 가 陽數일 때 ( $\Delta > 0, nG > 0$ )

$$I_1 = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_1 a_4^{1/2} + a_1 a_4 a_5 - a_4^{1/2} a_2 a_5 + a_2 - a_2 a_3 a_5}{nG (b_1^2 n^2 + 4nG)^{1/2} (1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5)} - a_5 \frac{a_1 - a_2 a_5}{(1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5) \lambda_1} + \frac{a_6}{\lambda_1} \right\} \quad (25.a)$$

$\Delta = a_3^2 - 4a_4 = b_1^2 n^2 (b_1^2 n^2 + 4nG)$ 가 陽數이고  $nG$ 가 陰數일 때 ( $\Delta > 0, nG < 0$ )

$$I_1 = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{a_1 (a_4 a_5 - a_4^{1/2}) + a_2 (a_4^{1/2} a_5 + 1 - a_3 a_5)}{nG (b_1 n) (1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5)} - a_5 \frac{a_1 - a_2 a_5}{(1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5) \lambda_1} + \frac{a_6}{\lambda_1} \right\} \quad (25.b)$$

$\Delta = a_3^2 - 4a_4 = b_1^2 n^2 (b_1^2 n^2 + 4nG)$ 가 陰數이고  $nG$ 도 陰數일 때 ( $\Delta < 0, nG < 0$ )

$$I_1 = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{-a_1 a_4^{1/2} - a_1 a_4 a_5 + a_4^{1/2} a_2 a_5 - a_2 + a_2 a_3 a_5}{nG (b_1 n) (1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5)} - a_5 \frac{a_1 - a_2 a_5}{(1 + a_4 a_5^2 - a_3 a_5) \lambda_1} + \frac{a_6}{\lambda_1} \right\} \quad (25.c)$$

## 2.4 $E[a\partial h/\partial x_4]$ 項

앞 절에서와 마찬가지로 成層된 흙에서는 물 흐름이 성층과 직각인 방향( $k_1$ )에 대해서만 고려해 주기 때문에  $E[a\partial h/\partial x_1]$  경우에만 값이 주어진다.  $E[f\partial h/\partial x_1]$  항을 구하기 위해서는 식(7)의  $W_f, W_a, W_r$ 를 식(5.d)에 대입하여 일반적 형태로 표현하면  $E[a\partial h/\partial x_1]$ 는 다음과 같다.

$$E[a\partial h/\partial x_1] = \frac{2\sigma_f\lambda_1 I_1}{\pi} \quad (26)$$

여기서  $I_1$ 은 식(22)와 같다. 이 때  $I_1$ 의 分母項  $a_3, a_4, a_5$ 는 앞 절과 같고  $I_1$ 의  $a_6$ 와 分子項  $a_1, a_2$ 는 각각 다음과 같다.

(경우 1)  $f, a, r$ 가 상관되어 있지 않은 경우

$$a_1 = -b_1 ng + nGJ_1 - \frac{n\zeta^2 J_1}{A} (b_1^2 n^2 + 2nG) \quad (27.a)$$

$$a_2 = -\frac{n^3 \zeta^2 G^2 J_1}{A}, \quad a_6 = \frac{nJ_1 \zeta^2}{A} \quad (27.b)$$

(경우 2)  $f, a, r$ 가 완전하게 상관되어 있는 경우

$$a_1 = -J_1 \zeta \left( 1 + \frac{n\zeta}{A} \right) (b_1^2 n^2 + nG) + b_1 n \zeta \left( \frac{J_1 \eta}{BF} - g - \frac{nG\zeta}{A} \right) \quad (28.a)$$

$$a_2 = -n^2 G^2 J_1 \zeta \left( 1 + \frac{n\zeta}{A} \right), \quad a_6 = J_1 \zeta \left( 1 + \frac{n\zeta}{A} \right) \quad (28.b)$$

## 3. 유효 비포화투수계수의 점근식

점근식을 풀기 위한 가정은 물리적 타당성을 갖출 어떠한 가정도 사용할 수 있는데, 본 모형에서는 크게  $\partial^2 H/\partial x_i^2 \rightarrow \infty$ 와  $\partial^2 H/\partial x_i^2 \rightarrow 0$ 으로 조건을 나누어 해석해를 구하였다.  $\partial^2 H/\partial x_i^2 \rightarrow \infty$ 이란 물리적으로 습윤전선(wetting front)이 현저하게 나타나는 구간으로서 이후부터는 간단히 '습윤전선'이라 하겠다.  $\partial^2 H/\partial x_i^2 \rightarrow 0$ 일 때  $\partial H/\partial x_i \rightarrow +0$ 인 경우는 수두경사가 양의 값에서 0으로 접근한다는 것으로 물리적 의미는 젖음과정이 진행된후 정상흐름이 되었다는 것이다.

$\partial^2 H / \partial x_i^2 \rightarrow 0$ 일 때  $\partial H / \partial x_i \rightarrow 0$ 인 경우는 수두경사가 음의 값에서 0으로 접근한다는 것으로 물리적 의미는 마름과정이 진행된후 정상흐름이 되었다는 것이다. 이후부터는 전자를 간단히 '젖음과정', 후자를 '마름과정'이라 칭하겠다.

이러한 가정을 사용하여 극한치 가정을 도입한 점근식을 사용하면 적분형태인 식(13), 식(19), 식(21) 그리고 식(26)은 표 1~표 4와 같은 해를 얻는다. 표 1은  $E[fh]$ 항, 표 2는  $E[ah]$ 항, 표 3은  $E[f\partial h/\partial x_1]$ 항, 그리고 표 4는  $E[a\partial h/\partial x_1]$ 항의 결과를 정리하였다.

#### 4. 有效 非飽和透水係數의 決定 및 적용

지금까지 복잡한 수식을 유도한 것은 有效 非飽和透水係數의 解析解를 誘導하기 위해서이다. 표 1~표 4에서 구한 각항의 값을 식(3)에 대입하여 정리하면 유효 비포화투수계수의 해석해가 결정된다.

결정된 有效 非飽和透水係數의 解析解를 표 5 부터 표 8까지 정리하였다. 표 5는  $f, a, r$ 가 상관되어 있지 않은 경우에서 성층과 수직방향의 유효 비포화투수계수 ( $\overline{K_{11}}(H)$ )의 해석해를 정리하였고 표 6은  $f, a, r$

표 1.  $E[fh]$ 항

상관도 경우	상관되어 있지 않은 경우	상관되어 있는 경우
습윤전선	$\sigma_f^2 \frac{H}{n}$	$\sigma_f^2 \frac{H}{n}$
젖음과정	$\sigma_f^2 \left( \frac{H\lambda_1}{n\lambda_1 - H} \right)$	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{H\lambda_1(1 + \frac{n\xi}{A})}{n\lambda_1 - H} \right\}$
마름과정	$\sigma_f^2 \left( \frac{H\lambda_1}{n\lambda_1 + H} \right)$	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{H\lambda_1(1 + \frac{n\xi}{A})}{n\lambda_1 + H} \right\}$

표 2.  $E[ah]$ 항

상관도 경우	상관되어 있지 않은 경우	상관되어 있는 경우
습윤전선	$\sigma_f^2 \left( \frac{H\xi^2}{A} \right)$	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{H\xi(1 + \frac{n\xi}{A})}{n} \right\}$
젖음과정	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{nH\xi^2\lambda_1}{A(n\lambda_1 - H)} \right\}$	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{H\lambda_1\xi(1 + \frac{n\xi}{A})}{n\lambda_1 - H} \right\}$
마름과정	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{nH\xi^2\lambda_1}{A(n\lambda_1 + H)} \right\}$	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{H\lambda_1\xi(1 + \frac{n\xi}{A})}{n\lambda_1 + H} \right\}$

가 완전하게 상관되어 있는 경우에서 성층과 垂直方向의 유효 비포화투수계수의 해석해를 정리하였다. 또한 표 7은  $f, a, r$ 가 상관되어 있지 않은 경우에서 성층과 平行方向에 대해, 표 8은  $f, a, r$ 가 완전하게 상관되어 있는 경우에서 성층과 평행방향의 유효 비포화투수계수 ( $\overline{K_{22}}(H), \overline{K_{33}}(H)$ )의 해석해를 정리하였다.

표 5~표 8에서 유효 비포화투수계수의 첫 번째 항은 흡자료의 산술평균만을 고려한 유효비포화 투수계수이다. 이를테면 흙의 비균질성에 위한 변동을 고려하지 않은 항이라고 할 수 있다.

표 3.  $E[f\partial h/\partial x_1]$ 항

상관도 경우	상관되어 있지 않은 경우	상관되어 있는 경우
습윤전선	$\sigma_f^2 \left( \frac{3H}{2\lambda_1} \right) (i=1)$ 0 (i=2,3)	$\sigma_f^2 \left( \frac{3H}{2\lambda_1} \right) \left( 1 + \frac{n\xi}{A} \right) (i=1)$ 0 (i=2,3)
젖음과정	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{-n\lambda_1}{n\lambda_1 - H} + 1 \right\} (i=1)$ 0 (i=2,3)	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{-n\lambda_1(1 + \frac{n\xi}{A})}{n\lambda_1 - H} + \left( 1 + \frac{n\xi}{A} \right) \right\} (i=1)$ 0 (i=2,3)
마름과정	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{-n\lambda_1}{n\lambda_1 + H} + 1 \right\} (i=1)$ 0 (i=2,3)	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{-n\lambda_1(1 + \frac{n\xi}{A})}{n\lambda_1 + H} + \left( 1 + \frac{n\xi}{A} \right) \right\} (i=1)$ 0 (i=2,3)

표 4.  $E[a\partial h/\partial x_1]$ 항

상관도 경우	상관되어 있지 않은 경우	상관되어 있는 경우
습윤전선	$\sigma_f^2 \left[ \frac{-H}{2n\lambda_1} \right] (i=1)$ 0 (i=2,3)	0 (i=1,2,3)
젖음과정	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{-n^2\xi^2\lambda_1}{A(n\lambda_1 - H)} + \frac{n\xi^2}{A} \right\} (i=1)$ 0 (i=2,3)	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{-n\xi\lambda_1(1 + \frac{n\xi}{A})}{n\lambda_1 - H} + \xi \left( 1 + \frac{n\xi}{A} \right) \right\} (i=1)$ 0 (i=2,3)
마름과정	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{-n^2\xi^2\lambda_1}{A(n\lambda_1 + H)} + \frac{n\xi^2}{A} \right\} (i=1)$ 0 (i=2,3)	$\sigma_f^2 \left\{ \frac{-n\xi\lambda_1(1 + \frac{n\xi}{A})}{n\lambda_1 + H} + \xi \left( 1 + \frac{n\xi}{A} \right) \right\} (i=1)$ 0 (i=2,3)

표 5.  $f, a, r$ 가 상관되어 있지 않은 경우 성층과 수직방향의 유효 비포화투수계수

경우	투수	$\overline{K_{11}}(H)$
습윤전선		$e^F A^n H^{-n} \left\{ 1 + \sigma_f^2 \left( \frac{1}{2n} + \frac{n\xi^2}{A^2} \right) \right\}$
젖음과정		$e^F A^n H^{-n} \left[ 1 + \frac{\sigma_f^2}{n\lambda_1 - H} \left\{ -\frac{3H}{2} + \frac{\lambda_1}{2} - \frac{n\xi^2}{2A^2} (H + 3nH - 2n\lambda_1) \right\} \right]$
마름과정		$e^F A^n H^{-n} \left[ 1 + \frac{\sigma_f^2}{n\lambda_1 + H} \left\{ \frac{3H}{2} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{n\xi^2}{2A^2} (H + 3nH + 2n\lambda_1) \right\} \right]$

표 6.  $f, a, r$ 가 상관되어 있는 경우 성층과 수직방향의 유효 비포화투수계수

경우	투수	$\overline{K_{11}}(H)$
습윤전선		$e^F A^n H^{-n} \left\{ 1 + \sigma_f^2 \left( \frac{1}{2n} + \frac{n\xi^2}{A^2} + \frac{n\xi}{A} + \frac{\xi}{A} \right) \right\}$
젖음과정		$e^F A^n H^{-n} \left[ 1 + \frac{\sigma_f^2}{n\lambda_1 - H} \left\{ -\frac{3H}{2} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{n\xi}{A} (\lambda_1 - 2H) - \frac{n\xi^2}{2A^2} (H + 3nH - 2n\lambda_1) \right\} \right]$
마름과정		$e^F A^n H^{-n} \left[ 1 + \frac{\sigma_f^2}{n\lambda_1 + H} \left\{ \frac{3H}{2} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{n\xi}{A} (\lambda_1 + 2H) + \frac{n\xi^2}{2A^2} (H + 3nH + 2n\lambda_1) \right\} \right]$

두번째 이하의 항은 비균질성에 의해 나타나는 유효 비포화투수계수의 변동을 나타낸 항이다.

유효 비포화투수계수의 해석해를 적용하기 위해서 Topp 등(1967)과 Talsma(1985)의 자료를 토대로 점토류에 대한 흡자료로 재구성하였다. 흡자료의 통계값은  $\sigma_f^2=2.48$ ,  $F=1.75$ ,  $A=8.46$ ,  $\xi=4.55$ ,  $n=32.28$ ,  $\lambda_1=100$  로 가상매질을 가정하였다. 이들 자료로 구성된 가상매질에 유효 비포화투수계수를 적용한다는 것은 점토가 주성분인 비균질매질에 대해 적용한다는 것을 의미한다. 그러나 이력현상을 모의하기 위해서는 젖음과정과 마름과정의 물보유함수의 변수가 달라지게 되므

표 7.  $f, a, r$ 가 상관되어 있지 않은 경우 성층과 수평방향의 유효 비포화투수계수

경우	투수	$\overline{K_{22}}(H), \overline{K_{33}}(H)$
습윤전선		$e^F A^n H^{-n} \left\{ 1 + \sigma_f^2 \left( \frac{1}{2n} + \frac{n\xi^2}{A^2} \right) \right\}$
젖음과정		$e^F A^n H^{-n} \left[ 1 + \frac{\sigma_f^2}{n\lambda_1 - H} \left\{ -\frac{H}{2} + \frac{\lambda_1}{2} - \frac{n\xi^2}{2A^2} (H + nH - 2n\lambda_1) \right\} \right]$
마름과정		$e^F A^n H^{-n} \left[ 1 + \frac{\sigma_f^2}{n\lambda_1 + H} \left\{ \frac{H}{2} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{n\xi^2}{2A^2} (H + nH + 2n\lambda_1) \right\} \right]$

표 8.  $f, a, r$ 가 상관되어 있는 경우 성층과 수평방향의 유효 비포화투수계수

경우	투수	$\overline{K_{22}}(H), \overline{K_{33}}(H)$
습윤전선		$e^F A^n H^{-n} \left\{ 1 + \sigma_f^2 \left( \frac{1}{2n} + \frac{n\xi^2}{A^2} + \frac{n\xi}{A} + \frac{\xi}{A} \right) \right\}$
젖음과정		$e^F A^n H^{-n} \left[ 1 + \frac{\sigma_f^2}{n\lambda_1 - H} \left\{ \left( -\frac{H}{2} + \frac{\lambda_1}{2} \right) \left( 1 + \frac{2n\xi}{A} \right) - \frac{n\xi^2}{2A^2} (H + nH - 2n\lambda_1) \right\} \right]$
마름과정		$e^F A^n H^{-n} \left[ 1 + \frac{\sigma_f^2}{n\lambda_1 + H} \left\{ \left( \frac{H}{2} + \frac{\lambda_1}{2} \right) \left( 1 + \frac{2n\xi}{A} \right) + \frac{n\xi^2}{2A^2} (H + nH + 2n\lambda_1) \right\} \right]$

로  $A$ 와,  $\xi$ 는 서로 다른 값을 적용하여야한다. 그러나 이러한 실제 흡자료를 구하기도 어렵고 평균흐름이 다른 조건에서도 동일한 자료를 이용한 유효 비포화투수계수의 값을 비교하기 위해서 위의 통계값을 그대로 사용하였다.

유효 비포화투수계수에 대한 적용결과를 그림 1부터 그림 4까지 도시하였다. 그림 1은  $f, a, r$ 의 상관 정도에 따른 평균모세관압력에 대한 '젖음과정'과 '마름과정'의 성층과 수직한 유효 비포화투수계수값을 나타낸다.

그림 1에서 보듯이 젖음과정과 마름과정에서 공통적으로 흡특성 심동이 완벽하게 상관되어 있는 경우의 유효

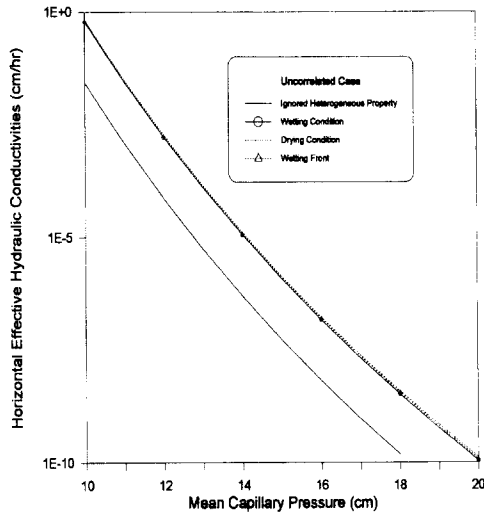


그림 1.  $f, a, \gamma$ 의 상관정도에 따른 평균모세관 압력에 대한 성층과 수직인 유효 비포화 투수계수값

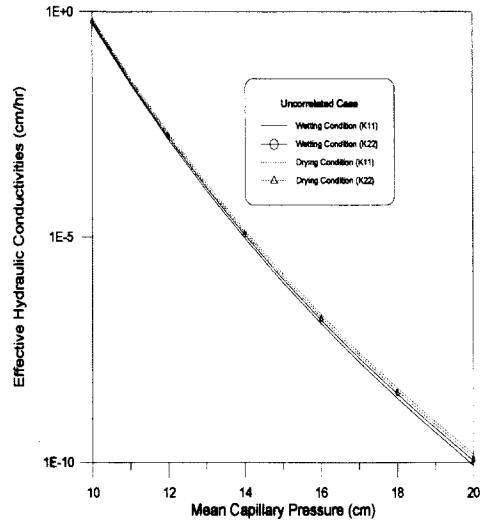


그림 3.  $f, a, \gamma$ 가 완벽하게 상관되어 있는 경우의 평균모세관 압력에 대한 유효 비포화 투수계수값

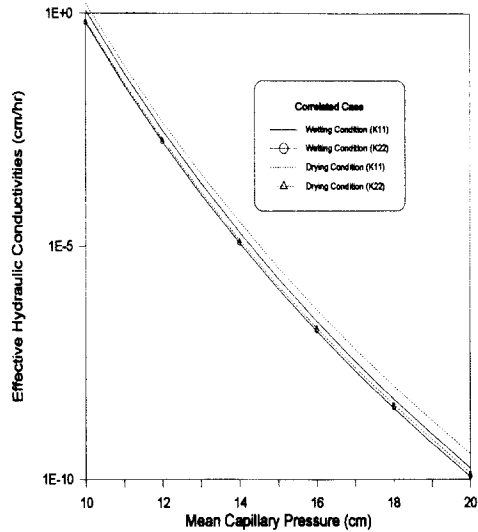


그림 2.  $f, a, \gamma$ 가 상관되어 있지 않은 경우의 평균모세관압력에 대한 유효 비포화투수 계수값

비포화 투수계수가 상관되어 있지 않은 경우보다 크게 나타남을 알 수 있다. 평균모세관압력이 약 60cm에서 70cm에 나타난 '젖음과정'의 경우 유효 비포화투수계수의 값을 살펴보면 곡선이 급격하게 아래로 변하게 됨을

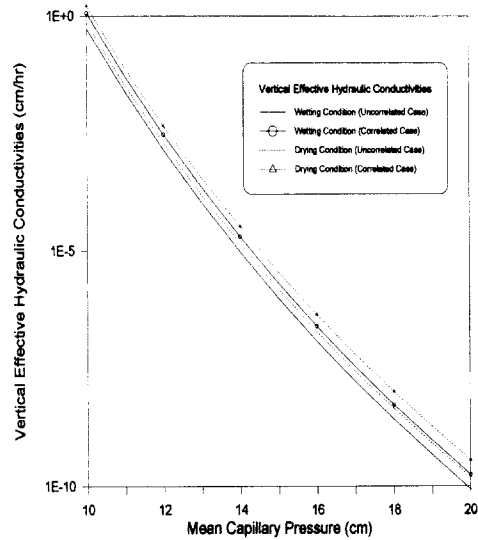


그림 4.  $f, a, \gamma$ 가 상관되어 있지 않은 경우의 평균모세관압력에 대한 성층과 수평한 유효 비포화투수계수값

알 수 있다. 이는 유효 비포화투수계수의 두번째 이하의 항이 음의값을 나타내는 구간( $n\lambda < H$ ) 으로서 물리적으로는 젖음과정이 진행된 후 정상상태의 흐름을 유지하기가 어려운 구간이라는 의미를 내포한다. 즉 유도



된 '젖음과정'의 유효 비포화투수계수는 상대적으로 평균모세관압력이 작은 구간( $n\lambda(H)$ )에서만 작용이 가능하다는 것을 알 수 있다. 그림 2는  $f$ ,  $a$ ,  $r$ 가 상관되어 있지 않은 경우, 그림 3은  $f$ ,  $a$ ,  $r$ 가 완벽하게 상관되어 있는 경우의 평균모세관압력에 대한 '젖음과정'과 '마름과정'의 유효 비포화투수계수값을 나타낸다. 그림 2와 그림 3에서 보듯이 '젖음과정'인 경우 성층과 수평한 유효비포화투수계수값( $\overline{K_{22}}(H)$ )이 수직한 값( $\overline{K_{11}}(H)$ )보다 크게 나타났음에 반해 '마름과정'인 경우에는 성층과 수직한 유효비포화투수계수값이 수평한 값보다 크게 나타났다. 또한 표 5~표 8을 살펴보면 '습윤전선'이 현저하게 나타나는 구간에서는 성층과 수직방향의 유효 비포화 투수계수값과 성층과 수평방향 유효 비포화투수계수값이 같게 유도됨을 알 수 있다. '젖음과정'인 경우의 유효 비포화투수계수의 이방성은 Yeh 등(1990)의 실험결과와 일치하지만 '마름과정'의 이방성과 '습윤전선'의 등방성은 현재로서는 확인할 방법이 없다. 이러한 물리적인 현상은 실내실험이나 현장관측을 통해서 해석해의 정확성을 검증할 수 있다고 생각하지만 본 연구에서는 이를 향후 연구과제로 남겨놓기로 한다.

그림 4는  $f$ ,  $a$ ,  $r$ 가 상관되어 있지 않은 경우 평균모세관압력에 따른 각 평균흐름(습윤전선, 젖음과정, 마름과정)과 비균질성에 의한 변동을 고려하지 않은 흐름의 성층과 수평한 유효 비포화투수계수값을 도시하였다. 그림 4에서 보듯이 비균질성에 의한 변동을 고려하지 않은 흐름은 비균질성을 고려한 흐름과 비교하여 상당히 작은 값을 나타냄을 알 수 있다. 또한 표 5~표 8을 살펴보면  $\sigma^2$ ,  $\sigma_a^2$  커질수록(흙의 비균질성이 커질수록) 유효 비포화투수계수의 값은 커지게 된다. 이는 흙의 비균질성이 커질수록 비포화대의 흐름속도가 빨라지게 된다는 것을 의미한다. Bowman 등(1986)과 Rice 등(1986)은 현장관측을 통해 관측된 흐름속도가 흙특성을 산술평균하여 계산한 속도보다 3배내지 5배 정도 크다는 결과를 발표하였다. 결국 비포화흐름은 비균질성에 의한 변동을 반영하여야만 정확한 거동을 예측할 수 있다는 결론에 도달하게 된다.

## 5. 결 론

윤성용과 선우중호(1997)에 의해 개발된 추계학적 모형을 이용하여 비균질매질의 유효 비포화투수계수의 해석해를 구하였다. 해석해를 구하는 과정에서 성층화 가정과 극한치 가정을 도입한 점근식을 사용하였다. 해석해의 결과 유효 비포화투수계수는 흙의 공간적인

변동으로 인하여 발생하는 거시적인 이력현상을 나타낼 수 있었다. 해석해로 얻어진 유효 비포화투수계수를 살펴본 결과 다음과 같은 사실을 알 수 있었으며 이들 결과에 대한 검증은 향후 연구과제로 남겨 놓기로 한다.

- (1) 흙특성 섭동이 완벽하게 상관계되어 있는 경우의 유효 비포화 투수계수가 상관계되어 있지 않은 경우보다 크다.
- (2) 습윤전선에서 유효 비포화투수계수는 등방성이다.
- (3) '젖음과정'인 경우의 유효 비포화투수계수는 성층과 수평방향의 값이 성층과 수직방향의 값보다 크다.
- (4) '마름과정'인 경우의 유효 비포화투수계수는 성층과 수직방향의 값이 성층과 수평방향의 값보다 크다.
- (5) 흙의 비균질성이 커질수록 유효 비포화투수계수는 커진다.

## 참 고 문 헌

- 윤성용, 선우중호 (1995). "추계학적 방법에 의한 거시 비포화 흐름의 지배방정식 유도." 대한토목학회논문집, 제15권, 제2호, pp. 443-450.
- 윤성용, 선우중호 (1997). "성층화된 비포화 비균질 흙에서 모세관압력 분산." 대한토목학회논문집, 제17권, 제II-3호, pp. 297-308.
- 윤성용, 선우중호 (1997). "추계학적 방법을 이용한 성층화된 흙에서의 유효 비포화투수계수의 이방성비." 대한토목학회논문집, 제17권, 제II-5호, pp. 411-419.
- Bosch, D.D. (1990). *Derivation and application of effective parameters for modeling moisture flow in heterogeneous Unsaturated Porous Media*. Ph.D. Thesis, Univ. of Arizona.
- Bowmans, R.S., and Rice R.C. (1986). "Transport of conservative tracers in the field under intermittend flood irrigation." *Water Resources Research*, Vol. 22, No. 11, pp. 1531-1537.
- Mantoglou, A., and Gelhar, L.W. (1987). "Effective hydraulic conductivities of transient unsaturated flow in stratified soils." *Water Resources Research*, Vol. 23, No. 1, pp. 57-67.
- Rice R.C., Bowmans, R.S., and Jaynes, D.B. (1986). "Percolation of water below an irrigated field." *Soil Sci. Soc. Am.*, Vol. 50,

No. 4, pp. 855-859.

Talsma, T. (1985). "Prediction of hydraulic conductivity from soil water retention data." *Soil Science*, Vol. 140, No. 3, pp. 184-188.

Topp, G.C., Klute, A., and Peters, D.B. (1967). "Comparison of water content-pressure head data obtained by equilibrium, steady-state and unsteady-state method." *Proc. of Soil Sci. Soc. Am.*, Vol. 31, pp. 312-314.

Yeh, T.-C.J., Gelhar, L.W., and Gutjahr, A.L. (1985). "Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogeneous soils: 2. Statistically anisotropic media with variable  $\alpha$ ." *Water Resources Research*, Vol. 21, No. 4, pp. 457-464.

Yeh, T.-C.J., and Harvey, D. (1990). "Effective unsaturated hydraulic conductivity of layered sands." *Water Resources Research*, Vol. 26, No. 6, pp. 1271-1280.

#### 부록 : 有效 非飽和 透水係數 $\{\overline{K}_{ii}(H)\}$ 의 誘導

Brooks-Corey식에 흡특성 변수와 모세관압력수두의 평균과 섭동을 대입하고 테일러 급수로 전개하여 식을 정리하면 다음과 같다(윤성용과 선우중호, 1997).

$$K(\psi) = e^F H^{-n} A^n (1+f+T_f) \left(1 - n \frac{h}{H} + T_h\right) \left(1 + n \frac{a}{A} + T_a\right) \quad (A.1)$$

여기서  $T_f$ ,  $T_h$ ,  $T_a$  는 섭동  $f$ ,  $h$ ,  $a$ 의 곱이 2차 이상인 항의 합을 의미한다. 식(A.1)에서  $T_f$ ,  $T_h$ ,  $T_a$ 에 대한 攝動의 곱이 2차 이하인 項만을 고려하면 다음과 같다.

$$K(\psi) = e^F H^{-n} A^n \left(1+f + \frac{f^2}{2}\right) \left\{1 - n \frac{h}{H} + \frac{n(n+1)}{2} \frac{h^2}{H^2}\right\} \times \left\{1 + n \frac{a}{A} + \frac{n(n+1)}{2} \frac{a^2}{A^2}\right\} \quad (A.2)$$

섭동의 곱이 3차 이상인 항을 무시하고 식(A.2)를 전개하면 다음과 같다.

$$K(\psi) = e^F H^{-n} A^n \left\{1+f + \frac{n}{A} a - \frac{n}{H} h + \frac{f^2}{2} - \frac{n}{H} fh - \frac{n^2}{AH} ah + \frac{n}{A} fa + \frac{n(n+1)}{2} \frac{h^2}{H^2} + \frac{n(n+1)}{2} \frac{a^2}{A^2}\right\} \quad (A.3)$$

식(1), 식(2a) 그리고 식(2b)에서 有效 非飽和 透水係數  $\{\overline{K}_{ii}(H)\}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\overline{K}_{ii}(H) = \frac{E[q_i]}{J_i} = \frac{E[K(\psi) (J_i + \frac{\partial h}{\partial x_i})]}{J_i} \quad (\text{no sum on } i)$$

$$= e^F H^{-n} A^n \left\{1 + \frac{\sigma_f^2}{2} + \frac{n(n+1)}{2A^2} \sigma_a^2 + \frac{n(n+1)}{2H^2} \sigma_h^2 - \frac{n}{H} E[fh] - \frac{n^2}{AH} E[ah] + \frac{n}{A} E[fa]\right\} + \frac{e^F H^{-n} A^n}{J_i} \left\{E\left[f \frac{\partial h}{\partial x_i}\right] + \frac{n}{A} E\left[a \frac{\partial h}{\partial x_i}\right]\right\} \quad (A.4a)$$

$$e^F H^{-n} A^n \left\{1 - n \left(-\frac{1}{2n} \sigma_f^2 - \frac{(n+1)}{2A^2} \sigma_a^2 - \frac{(n+1)}{2H^2} \sigma_h^2 + \frac{1}{H} E[fh] + \frac{n}{AH} E[ah] - \frac{1}{A} E[fa] + \frac{1}{J_i} \left(-\frac{1}{n} E\left[f \frac{\partial h}{\partial x_i}\right] - \frac{1}{A} E\left[a \frac{\partial h}{\partial x_i}\right]\right)\right\} \quad (A.4b)$$

$$\overline{K}_{ij}(H) = 0 \quad i \neq j \quad (A.5)$$

식(A.4b)를 간단히 하기 위해 다음과 같이 치환한다.

$$B = \frac{e^F H^{-n} A^n}{\Gamma} \quad (A.6)$$

$$\sigma_\epsilon^2 = -\frac{1}{2n} \sigma_f^2 - \frac{(n+1)}{2A^2} \sigma_a^2 - \frac{(n+1)}{2H^2} \sigma_h^2 + \frac{1}{H} E[fh] + \frac{n}{AH} E[ah] - \frac{1}{A} E[fa] \quad (A.7)$$

$$\tau_i = -\frac{1}{n} E\left[f \frac{\partial h}{\partial x_i}\right] - \frac{1}{A} E\left[a \frac{\partial h}{\partial x_i}\right] \quad (A.8)$$

식(A.6), 식(A.7) 그리고 식(A.8)을 식(A.4b)에 대입 하면 다음과 같이 간단해진다.

$$\overline{K}_{ii}(H) = B \Gamma \left\{1 - n \left(\sigma_\epsilon^2 + \frac{\tau_i}{J_i}\right)\right\} \quad (\text{no sum on } i) \quad (A.9)$$

$$\overline{K}_{ij}(H) = 0 \quad i \neq j \quad (A.10)$$

<최종본 접수일 : 1997년 11월 12일>