선형파의 파수 산정

조 용 식 (세종대학교 토목공학과 조교수 및 수운산업연구소 연구위원)

지형 또는 외부 흐름에 의한 파랑의 반사율과 통과율의 정확한 산정은 해안구조물의 경제적인 설계를 위해 매우 중요한 작업이다. 본 연구에서는 먼저 선형파의 파수를 산정하는 기존의 근사 해석적 방법을 조사하고, 매우 정확한 파수를 제공하는 수치기법을 개발한다. 수치기법은 Newton-Raphson 방법과 bisection 방법을 결합한 것이며, 수치기법에 의해 계산된 파수는 소수점이하 10자리까지 정확하다.

1. 서 론

외해에서 발달한 파랑은 수심이 상대적으로 얕은 해안선으로 전파되어 오는 동안 해저지형의 변화와 외부 흐름의 영향 등에 의해 파랑에너지의 일부는 반사되고 일부는 해안선을 향해 계속 진행한다. 따라서, 연안 구조물을 경제적으로 설계하기 위해서는 입사파의 정확한 반사율과 통과율을 산정해야 할 경우가 있다. 본 기사에서는 정확한 반사율과 통과율을 산정하기 위한 필요한 선형파의 파수(wave number)를 계산하는 방법을 제안한다.

일반적으로 선형파의 파수를 계산하기 위해서는 분산방정식(dispersion relation)을 해석해야 한다. 파랑의 주기와 수심이 주어진 경우 분산방정식은 파수의 음함수가 되기 때문에 분산방정식을 해석하기 위해서는 근사적인 해석적 방법 또는 수치기법을 사용해야 한다. 조파기 근처에서의 파랑의 거동, 수심이 급격히 변하는 해저지형을 통과하는 파랑의 특성과 외부 흐름을 통과하는 파랑의 변화 등을 정확히 해석하기 위해서는 진행파(propagating mode) 뿐만 아니라 산란파(evanescent modes)의 영향도 고려해야 하므로, 진행파의 분산방정식과 산란파의 분산방정식을 모두 해석하여야 한다. 특히, Kirby와 Dalrymple (1983)은 트렌치지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율을 산정하면서 진행파와 더불어 16개의 산란파를 고려하였다.

본 연구에서는 다음 장에서 분산방정식을 해석하는 기존의 근사적 방법을 조사하고, 제3장에서는 보다 정확한 파수를 제공하는 수치기법을 제안한다. 제4장에서는 근사적 방법과 수치기법에 의한 파수를 비교하고, 제5장에서는 결론을 기술한다. 아울러, 수치기법을 이용한 컴퓨터 프로그램을 부록에 첨부한다.

2. 해석적 방법

미소진폭파 이론에서 두 개의 자유수면 경계조건을 이용하여 선형 분산방정식을 유도할 수 있다(Mei, 1989). 먼저 진행파의 분산방정식은

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (1)$$

으로 주어지며, 산란파의 분산방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\omega^2 = -gK_n \tan K_n h \quad (2)$$

식 (1)과 (2)에서 ω 는 각진동수, g는 중력가속도, h는 수심, k와 K_n는 각각 진행파와 산란파의 파수를 나타내며, 아래첨자 n은 산란파의 수를 의미한다. 식

(1)에서 tanh는 주기함수가 아니므로 식 (1)을 만족하는 파수는 오직 하나뿐인 반면, tan는 주기가 π인 주기함수이므로 식 (2)를 만족하는 파수는 무수히 많음에 유의해야 한다.

2.1 진행파

Hunt(1979)는 분산방정식 (1)을 해석하기 위해서 tanh를 Taylor 급수로 전개한 후 다시 Pade 근사해법을 이용하여 진행파의 파수에 관한 다음과 같은 근사적인 해를 제안하였다.

$$\frac{c^2}{gh} = [y+(1+0.6667y+0.35550y^2+0.16084y^3+0.06320y^4+0.02174y^5+0.00654y^6+0.00039y^8+0.00011y^9+0.00011y^9)^{-1}]^{-1} \quad (3)$$

식 (3)에서 $c\,(=\omega/k)$는 파속이며, $y=\omega^2 h/g$으로 주어진다. Hunt는 식 (3)이 $0\leq y\leq\infty$의 범위에서 대략 0.01%의 정확도를 갖는 파수를 제공한다고 주장하였다. 아울러, 식 (3)을 보다 간략히 하여 다음과 같은 식을 유도하였다.

$$\frac{c^2}{gh} = [y+(1+0.6522y+0.4622y^2+0.0864y^4+0.0675y^5)^{-1}]^{-1} \quad (4)$$

식 (4)는 $0\leq y\leq\infty$의 범위에서 대략 0.1%의 정확도를 갖는 파수를 제공하는 것으로 알려 졌다. Hunt는 또한 식 (2)에 대해서도 Taylor 급수를 이용하여 비슷한 식을 유도할 수 있다고 제안하였다.

Wu와 Thornton(1986)는 Hunt(1979)의 연구를 근거로의 $y<1$범위에서 진행파의 파수에 관한 다음과 같은 근사적인 해를 제안하였다.

$$kh = y^{1/2}\left[1+\frac{y}{6}\left(1+\frac{y}{5}\right)\right] \quad (5)$$

식 (5)에서 $y=\omega^2 h/g$이며, 0.05%의 정확도를 갖는 파수를 제공하는 것으로 알려졌다. 또한, $y>1$의 범위에서

$$kh = y = (1+2\alpha+2\alpha^2) \quad (6)$$

을 제안하였다. 식 (6)은 0.01%의 정확도를 갖는 파수를 제공하는 것으로 알려졌으며, α는 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha = \exp[-2y-2.52y\exp(-1.84y)]$$

2.2 산란파

일반적으로 산란파의 분산방정식을 직접 해석하는 것은 물론 근사적으로 해석하는 것 또한 쉽지 않을 뿐만 아니라 산란파의 역할이 진행파와 역활과 비교하여 별로 중요하지 않기 때문에 이를 해석하고자 하는 시도 또한 많지 않다. McKee(1988)는 산란파의 분산방정식을 해석하기 위한 다음과 같은 2차방정식을 유도하였다.

$$\left(\alpha_n+\frac{\omega^2 h}{g}\right)\xi_n^2+\left[\frac{\omega^2 h}{g}\beta_n+\alpha_n\left(\gamma_n-\frac{\pi}{2}\right)\right]\xi_n - \alpha_n\beta_n\frac{\pi}{2} = 0 \quad (7)$$

식 (7)에서 α_n, β_n과 γ_n은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)}{\gamma_n}\beta_n,$$

$$\beta_n = \frac{(n\pi^2-4n+2)}{2(8n-n\pi^2-2)},$$

$$\gamma_n = \frac{\beta_n(2n-1)\pi}{(2n-1)\pi+4n\beta_n}$$

식 (7)을 해석하면 두 개의 근을 구할 수 있는데 두 개의 근중에서 하나만이 양의 값을 가지며, 이를 ξ_+이라 하면 구하고자 하는 파수 $K_n=[(n-1/2)\pi+\xi_+]/h$으로 주어진다. 그러나, McKee는 식 (7)에 의해 구해진 산란파의 파수는 Pade 근사해법에 의한 결과보다 더욱 큰 오차를 포함하고 있다고 보고하였다. 따라서, 식 (7)의 결과를 직접 사용하는 것보다는 이를 다시 Newton-Raphson 방법과 같은 반복 수치기법의 초기값으로 사용하여 정확한 파수를 구할 것을 추천하

고 있다. 따라서, 식 (7)을 이용하여 산란파의 파수를 구할 경우에는 수치기법에 의존해야 한다.

3. 수치기법

분산방정식을 해석하여 파수를 구할 때 앞에서 언급한 근사적인 방법을 사용하는 것은 매우 불편할 뿐만 아니라 파수의 정확도 또한 감소된다. 더욱이, 컴퓨터의 급속한 발달로 인해 수치기법을 이용한 계산이 한층 쉬울 뿐만 아니라 정확도가 향상되므로 수치기법을 이용하는 것이 바람직하다. 따라서, 본 연구에서는 수치기법을 이용하여 분산방정식을 효과적으로 정확하게 해석하는 방법을 제안한다.

진행파의 분산방정식 (1)은 Newton-Raphson 방법으로 쉽게 해석이 가능하지만 산란파의 분산방정식 (2)는 주기함수인 tan를 포함하고 있기 때문에 단순한 Newton-Raphson 방법으로 해석하기에는 어려움이 많다. 산란파의 분산방정식 (2)에서 $K_n h$는 고유값(eigenvalue)이며, $(n-1/2)\pi < K_n h < n\pi$를 만족한다. 따라서, $K_n h$을 구하기 위해서는 반복 수치기법을 이용하는 것이 바람직하지만, 진행파의 파수와는 달리 여러 개의 파수가 존재하므로 Newton-Raphson 방법을 사용하는 경우에는 해가 $(n-1/2)\pi < K_n h < n\pi$의 범위내에 존재하지 않을 수 있다. 따라서, 본 기사에서는 Newton-Raphson 방법과 bisection 방법을 조합하여 산란파의 분산방정식을 해석한다. Newton-Raphson 방법과 bisection 방법을 이용한 컴퓨터 프로그램을 부록에 첨부하였으며, 이와 같은 수치기법에 관한 보다 상세한 설명은 여러 문헌을 참고할 수 있다(예: Press 등, 1986).

4. 결과비교

표 1은 h = 0.1m, 및 h = 1.0m등 각각 천해역, 중간수심역 및 심해역을 대표하는 세경우의 수심에 대한 Hunt(1979)에 의해 제안된 식 (3)과 (4), Wu와 Thornton(1986)의 근사적 방법 및 수치기법에 의해 계산된 진행파의 파수를 비교한 것으로 식 (3)에 의해 계산된 파수는 h = 0.01m일 때 소수점이하 6자리, h = 0.1m일 때 소수점이하 4자리, h = 1.01 m일 때 소수점이하 3자리까지 수치기법에 의해 계산된 결과와 일치한다. 그러나, 식 (4)의 결과는 소수점이하 1자리 또는 2자리까지만 일치한다. 전체적으로 식(3) 또는 (4)의 결과는 심해역보다는 천해역에서의 결과가 수치기법에 의한 결과와 더욱 잘 일치하고 있는데, 이는 식 (3)과 (4)를 유도하는 과정에서 쌍곡선함수 tanh를 Taylor 급수를 이용하여 kh에 대하여 전개하였기 때문이다. 즉, kh가 작을수록 정확해에 더욱 근사한 해를 제공한다. Wu와 Thornton의 근사해법에 의한 파수는 대략 소수점이하 3 또는 4자리까지 정확해와 일치하고 있다.

표 2는 표 1의 파수를 분산방정식에 다시 대입하여 계산한 오차, 즉 $\omega^2+gk\tanh kh$의 값을 비교한 것이다. 표에 나타나 것과 같이 본 기사에서 개발된 수치기법에 의해 계산된 파수는 소수점이하 12자리까지 정확한 것을 알 수 있다. 식 (3)과 (4) 및 Wu와 Thornton의 근사적 방법에 의해 계산된 파수는 소수점이하 1-4자리까지만 정확한 것을 알 수 있다. 따라서, 보다 정확한 반사율과 통과율을 산정하기 위해서는 근사적인 해석적 방법보다는 수치기법을 이용하여

Table 1: Comparison of calculated wave numbers : $\omega = (\pi g)^{1/2}$

구 분	h=0.01m	h=0.1m	h=1.0m
Hunt - 식 (3)	17.817880363399	5.915933078368	3.153244935196
Hunt - 식 (4)	17.820875206458	5.913629727762	3.155193533892
Wu와 Thornton	17.817927537182	5.916907604837	3.153063806026
수치기법	17.817880789835	5.915924986697	3.153080680053

Table 2: Comparison of errors: error = $\omega - gk \tanh kh$

구 분	h=0.01m	h=0.1m	h=1.0m
Hunt - 식 (3)	0.000001459357	−0.000075847673	−0.001641920390
Hunt - 식 (4)	−0.010248367171	0.021512166104	−0.021119793000
Wu와 Thornton	−0.000159979742	−0.009211080683	0.000168675910
수치기법	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000

Table 3: Comparison of reflection coefficients: $k_1 h_1$ = 0.75

구 분	n =0	n =4	n =8	n =16
BDS	0.07078085	0.11678659	0.11815288	0.11866856
FDS	0.20333157	0.22390794	0.22471002	0.22493236

파수를 산정하는 것이 바람직하다.

마지막으로, 표 3은 $h_1=h_1$, $h_2=h_1/2$, $h_3=h_1/3$으로 표시되는 계단(BDS, backward double step)과 $h_1=h_1$, $h_2=2h_1$, $h_3=h_2=3h_1$으로 표시되는 계단(FDS, forward double step)을 통과하는 파랑의 반사율을 비교한 것으로 n은 산란파의 수를 나타내며, 계단의 폭은 각각 $2h_1$과 $2h_3$으로 고정하였다. 표 3에 나타난 것과 같이 산란파를 고려하지 않았을 경우(n=0)와 고려하였을 경우의 반사율은 많은 차이를 보이고 있으므로 보다 정확한 반사율과 통과율을 산정하기 위해서는 반드시 산란파의 영향을 고려해야 한다.

5. 결 론

본 기사에서는 분산방정식을 매우 정확하고 빠르게 해석하는 수치기법을 제안하였다. 수치기법은 Newton-Raphson 방법과 bisection 방법이 사용되었으며, 수치기법에 의한 결과는 기존의 근사 해석해의 결과와 비교하였다. 수치기법에 의해 계산된 진행파와 산란파의 파수는 대략 소수점이하 10자리까지 정확한 것으로 판명되었다. 개발된 수치기법 해안공학과 관련된 연구뿐만 아니라 실무에서도 쉽게 이용할 수 있을 것이다.

〈참고문헌〉

Hunt, J.N. (1979). "Direct solution of wave dispersion relation." Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, Vol. 105, No. WW4, pp. 457-459.

Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1983). "Propagation of obliquely incident water waves over a trench." Journal of Fluid Mechanics, Vol. 133, pp. 47-63.

McKee, W.D. (1988). "Calculation of evanescent wave modes." Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, Vol. 114, No. 3, pp. 373-378.

Mei, C.C. (1989). The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, World Scientific, pp. 740.

Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A and Vetterling, W.T. (1986). Numerical Recipes, Cambridge University Press, pp. 818.

Wu, C.-S. and Thornton, A.M. (1986). "Wave numbers of linear progressive wave." Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, Vol. 112, No. 4, pp. 536-540.