N차 수렴성의 Newton-Raphson방법

N'th Order Convergent Newton-Raphson Method

박 남 식 (동아대학교 공과대학 토목공학과 전임강사)

1. 서 론

수공학 분야를 포함한 많은 학문 분야의 정량적 분석에는 여러 종류의 방정식이 등장한다. 본 학술기사에서는

(1)과 같은 형태의 비선형 대수식의 수치해를 구하는 문제에 대하여 논하고자 한다.

$$f(x)=0 \tag{1}$$

일반적으로 비선형식의 수치해를 구하는 데에는 반복법이 사용된다. 반복법은 주어진 초기값에 대하여 수치해의 정확도를 반복적으로 개선하는 방법으로 bisection, false position, secant, 혹은 Newton-Raphson 등을 들 수 있다(Conte and de Boor, 1980).

반복법의 성능을 나타내는 척도로 반복법의 안정성과 수렴의 빠르기(수렴 차수)가 있다 (Press et. al, 1992). 두 가지 기준 모두 중요하지만 본 기사에서는 널리 사용되는 Newton-Raphson방법의 수렴 차수를 향상시키는 방법을 소개하고자 한다.

반복법들은 각기 다른 수렴성을 가지고 있는데 수렴성은 일반적으로 충분히 큰 정수 k에 대하여 다음으로 표시된다.

$$e_{k+1} \le C(x_k)^p \tag{2}$$

여기서 e_k는 k번 째 반복 과정의 수치해(x_k)의 오차로 다음과 같이 정의된다.

$$e_k = |xk - a| \tag{3}$$

위에서 a는 (1)의 해, C와 p는 수렴특성을 나타내는 상수이다. (2)는 수렴차수 p의 값이 크면 클수록 오차가 빨리 감소함을 의미한다. 참고로, bisection 방법의 경우 $p=1$; secant 방법:$p=1.618$; Newton-Raphson $p=2$로 Newton-Raphson 방법의 수렴성이 가장 우수하다.

2. 표준 Newton-Raphson 방법

표준 Newton-Raphson 방법은 주어진 초기 값 x_0에 대하여 반복해를 다음의 반복식으로부터 구한다.

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)'} \qquad k=0,\ 1,\ 2,\cdots \tag{4}$$

일반적으로 (4)는 2차적으로 수렴(즉, $p=2$)하는 것으로 알려져 있다. 그러나 Gerlach (1994)는$f(x)$가 충분히 미분가능하고

$$\begin{aligned} &f(x)=0,\\ &f'(a)\neq 0,\\ &f''(a)=\cdots=f^{(M-1)}(a)=0,\\ &f^{(M)}(a)\neq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

이면 표준 Newton-Raphson 반복식 (4)는M차적으로 수렴한다는 것을 증명하였다. 그런데 일반적으로 $f''(a)\neq 0$인 경우 $M=2$이므로, 표준 Newton-Raphson방법은 2차적으로 수렴한다.

3. 개선된 Newton-Raphson방법

Gerlach(1994)는 $f(x)$가 (5)를 만족할 때 (1)의 해를 다음의 수정된 반복식으로부터 얻을 수 있다는 것을 증명하였다.

$$x_{k+1}=x_k-\frac{F_N(x_k)}{F_N'(x_k)'} \qquad k=0,\ 1,\ 2,\cdots \qquad (6)$$

여기서 $N \geq M$인 임의의 정수 N에 대하여 정의되는 F_N은 다음과 같이 유도된다.

$$F_N(x)=f(x), \qquad N=M$$

$$F_{N+1}(x)=\frac{F_N(x)}{(F_N'(x))^{1/N}} \qquad k=0,\ 1,\ 2,\cdots \qquad (7)$$

(6)은 수정된 Newton-Raphson 반복식으로 $N(\geq M)$차적으로 수렴한다. 따라서 임의의 N에 대하여 F_N의 sequence를 유도하면 임의의 수렴차수를 가진 Newton-Raphson 반복식을 유도할 수 있음을 의미한다. 그러나 (7)에서는 F_{N+1}이 F_N의 분수형태로 나타나기 때문에 N이 증가함에 따라 F_N의 형태가 복잡해지는 단점이 있다.

Ford와 Pennline(1996)은 Gerlach(1994)의 수정된 Newton-Raphson 반복법을 다음과 같이 나타낼 수 있음을 입증하였다.

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)\frac{Q_N(x)}{(Q_N'(x))^{1/N}} \qquad (8)$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

여기서 임의의 정수 $N \geq M$에 대하여 정의되는 Q_N은

$$Q_N(x)=f(x), \qquad N=M$$

$$Q_{N+1}(x)=f'(x)Q_N(x)-\frac{1}{N-1}f(x)Q_N'(x)$$
$$N \geq M \qquad (0)$$

(9)의 recursion formula는 (7)의 분수형태에 비하여 단순하므로 적용이 더 용이하다.

4. 예 제

수정된 Newton-Raphson 반복식 (8)과 (9)의 수렴성을 확인하기 위하여 다음의 비선형식을 사용하였다.

$$f(x)=(x-2)(x+3)=0 \qquad (10)$$

(10)의 2차식은 $x=2$에서 $f(2)=0$, $f'(2) \fallingdotseq 0$, $f''(2) \fallingdotseq 0$이므로 (4)에 의거, $M=2$이며, 표준 Newton-Raphson방법이 (10)에 적용되면 2차적으로 수렴됨을 알 수 있다. Ford와 Pennline(1996)의 개선된 방법을 적용하기 위하여 Q_N을 $N=2,\cdots\cdots,6$에 대하여 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_2&=1 \\ Q_3&=2x+1 \\ Q_4&=3x^2+3x+7 \\ Q_5&=4x^3+6x^2+28x+13 \\ Q_6&=5x^3+10x^2+70x^2+65x+55 \end{aligned} \qquad (11)$$

위의 함수들로부터 2, 3, 4, 5차적으로 수렴하는 Newton-Raphson 반복식들을 유도할 수 있다. 예를 들면, 3차 수렴성을 지닌 개선된 반복식은 다음과 같다.

$$x_{k+1}=x_k-\frac{fQ_3}{Q_4}=x_k-\frac{(x^3_k+x_k-6)(2x_k+1)}{3x^3_k+3x+7} \qquad (12)$$

여기서 $N=2$는 표준 Newton-Raphson 방법이다. 각각의 반복식에 $x_0=2.7$의 초기값을 적용하여 반복해를 구하고, 각 반복해에 포함되는 오차를 표 1에 수록하였다. 표 1의 오차는 symbolic algebra package MAPLE(Char et. al, 1991)을 이용하여 계산된 것으로 9개의 유효숫자를 가진다. 또한 표 1에서 $N=3,\ 4,\ 5$의 경우 지나치게 작은 오차는 포함시키지 않았다. 표 1에서 나타나듯이 모든 N에 대하여 오차가 점차 감소하므로 반복해들은 $x=2$에 수렴함을 알 수 있다. 그리고 N값이 클수록 수렴성이 좋다는 것을 명백히 나타낸다. 오차들을 e_k+1 vs. e_k의 형태

표 1. N차적으로 수렴하는 Newton-Raphson 반복식으로부터 얻어지는 해의 오차

반복 \ 지수	N: 2	3	4	5
1	.07656250000	.009277792805	.001137526531	.0001396683676
2	.001137526531	.3176718017 x 10-7	.1338261407 x 10-13	.8502558191 x 10-22
3	.2586756217 x 10-6	.1282318718 x 10-23	.2565983162 x 10-57	.7109974564 x 10-113
4	.1338261407 x 10-13	.8434278475 x 10-73	.3468208480 x 10-232	.2907101652 x 10-568
5	.3581887186 x 10-28	.2399958873 x 10-220	.1157472737 x 10-931	
6	.2565983162 x 10-57	.5529315732 x 10-663		
7	.1316853918 x 10-115			

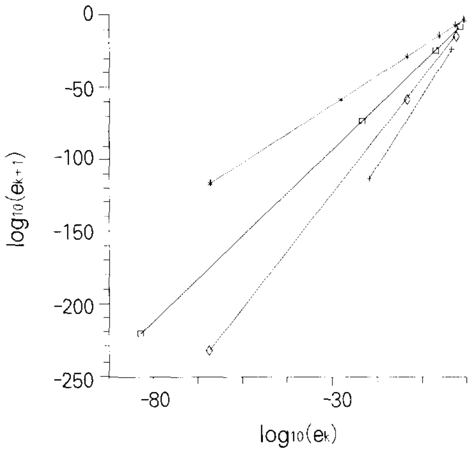

그림 1. N차 Newton-Raphson 방법의 수렴특성 (위에서부터 N = 2, 3, 4, 5)

로 대수지에 도시하여 얻어지는 직선들의 기울기로부터 수렴 차수가 명확하게 드러난다(그림 1).

5. 토 의

본 기사에서는 널리 사용되는 Newton-Raphson 방법의 수렴성을 향상시킬 수 있는 방법을 소개하였다. 이 방법은 2차적으로 수렴하는 Newton-Raphson방법을 임의의 차수로 향상시키는 방법을 제시하므로 비선형식의 수치해를 구하는데 실질적인 도움이 될 수 있다.

그러나 서론에서 언급하였듯이 반복법의 유용성은 수렴성뿐 아니라 반복계산의 안정성에도 의존한다. 본 기사에서 소개된 개선된 Newton-Raphson방법은 표준 Newton-Raphson방법의 한계(즉, locally convergent)를 그대로 지니고 있음을 유의해야 한다. 또한 표준 Newton-Raphson방법은 vector식에도 적용이 가능하지만 본 기사에서 소개된 방법은 vector식으로의 확장이 간단히 이루어지지 않는다는 단점이 있다.

〈참고문헌〉

1. Char, B.W, Geddes, K.O., Gonnet, G.H., Leong, B.L., Monagan, M.B., and Watt, S.M., Maple V, Library Reference Manual, Springer-Verlag, 1991.
2. Conte, S.D., and de Boor, C., Elementaray Numerical Analysis, 3rd ed., Mc-Graw-Hill, 1980.
3. Ford, W.F. and Pennline, J.A., Acclerated Convergence in Newton's Method, SIAM Review, Vol. 38, No. 4, 658-659, 1996.
4. Gerlach, J., Acclerated Convergence in Newton's Method, SIAM Review, Vol. 36, No. 2, 272-276, 1994.
5. Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., and Flannery B.P., Numerical Recipes, 2nd edition, Cambridge University Press, 1992.