

〈논 문〉

일반 경계 조건을 가진 얇은 물체에 대한 직접 경계 요소법의 개발

Development of the Direct Boundary Element Method for Thin Bodies with General Boundary Conditions

이 강 덕*·이 덕 주**

Kang-Duck Ih and Duck-Joo Lee

(1997년 5월 23일 접수 ; 1997년 8월 9일 심사완료)

Key Words : Thin Bodise(얇은물체), Helmholtz Intergral Equation(헬름홀쯔 적분방정식), Normal Derivative Integral Equation(수직미분-적분방정식), Direct Boundary Element Method(직접경계요소법), Indirect Boundary Element Method(간접경계요소법), Combined Helmholtz Integral Equation(결합된 헬름홀쯔 적분방정식), Combined Normal Derivative Integral Equation(결합된 수직미분-적분방정식)

ABSTRACT

A direct boundary element method (DBEM) is developed for thin bodies whose surfaces are rigid or compliant. The Helmholtz integral equation and its normal derivative integral equation are adopted simultaneously to calculate the pressure on both sides of the thin body, instead of the jump values across it, to account for the different surface conditions of each side. Unlike the usual assumption, the normal velocity is assumed to be discontinuous across the thin body. In this approach, only the neutral surface of the thin body has to be discretized. The method is validated by comparison with analytic and/or numerical results for acoustic scattering and radiation from several surface conditions of the thin body; the surfaces are rigid when stationary or vibrating, and part of the interior surface is lined with a sound-absorbing material.

1. 서 론

지금까지의 연구에 의하면, 헬름홀쯔(Helmholtz) 적분방정식을 이용하는 전형적인 경계요소법은 얇은 물체에 대해서 신뢰성 있는 해를 구하기 어려운 것으로 알려져 있다. 이 어려움의 주된 원인은 얇은

물체의 위아래 면에 분포시킨 격자간 거리가 너무 가까워 준 특이성(quasi-singular) 문제가 발생하기 때문이다.

Seybert⁽¹⁾ 등은 다중영역법(multi-domain)을 이용하여 얇은 물체 문제에 적용하였다. 다중영역법은 전체 음장을 가상 면을 사용하여 몇 개의 보조 영역(subdomain)으로 나누고 각각의 보조 영역에 대하여 헬름홀쯔 적분방정식을 세운 후 가상 면에서의 값을 연성 시켜 전체 음장을 해석하는 방법이다. 이 방법의 개념은 비교적 단순하지만 격자 형성 등 전

* 현대자동차(주) 차량시험2팀

** 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

처리 과정(preprocess)에 많은 노력이 필요하고 가상면이 넓은 경우에는 매우 큰 행렬식을 풀어야 하는 문제가 있는 것으로 알려져 있다.

Martinez⁽²⁾는 헬름홀츠 적분방정식을 이용한 전형적인 경계요소법이 얇은 물체에서 신뢰성 있는 해를 구하지 못하는 문제를 thin shape breakdown(이하 TSB)라 정의하고 체계적인 해석을 통해 수직 미분-적분방정식(normal derivative integral equation)이 TSB를 해결할 수 있을 뿐만 아니라 해의 비유일성 문제도 발생시키지 않는 강건한 방법임을 밝혔다. 그러나, 수직미분-적분방정식은 $O(1/r^3)$ 의 극특이성 커널을 포함하고 있기 때문에 이를 정규화 시키는 특별한 기술이 필요하다.

또한, Wu와 Wan⁽³⁾은 최근 논문에서, 헬름홀츠 적분방정식이 얇은 물체에 대해서는 퇴화(degenerate)하기 때문에 직접경계요소법으로 TSB 문제를 해결할 수 없음을 증명하였다. 그들은 Martinez가 제안한 대로 수직 미분-적분방정식을 이용하여 직접경계요소법을 성공적으로 얇은 물체에 적용하였다. 그들은 Maue⁽⁴⁾와 Mitzner⁽⁵⁾가 제안한 극특이성 커널 정규화식을 사용하였다. 최근에는 이 방법을 연장하여 일반 물체와 얇은 물체가 복합된 문제에 적용한 사례가 발표된 바 있다^(6,7). 그러나, 이 방법은 물체가 강제인 경우에만 한정된다.

앞에서 언급한 연구 성과 외에도 다른 접근 방법을 통하여 얇은 물체를 해석하는 방법도 있다. Hamdi와 Ville⁽⁸⁾, Wu⁽⁹⁾는 변분법(variational formulation)을 사용하였고, Malbéqui 등⁽¹⁰⁾은 간접경계요소법을 사용하였는데 이 방법들도 얇은 물체 양면이 강제조건을 갖는 경우에 대해서만 연구 결과를 발표하였다. Martinez는 모달 경계적분방정식을 사용하여 원통 내부에 쌍극 음원이 있는 경우 회절 현상을 해석한 바 있다. 이 때 원통 내부 면은 강제⁽¹¹⁾인 경우와 흡음재가 있는 경우⁽¹²⁾로 나누어 발표되었다. 그러나, 아직까지 직접경계요소법을 사용하여 양면이 서로 다른 재질로 되어 있는 문제를 해석한 예는 없다.

본 논문은 결합된 헬름홀츠 적분방정식(combined Helmholtz integral equation)과 결합된 수직미분-적분방정식(combined normal derivative integral equation)을 사용하여 일반적 경계조건을 갖는 얇은 물체에 직접경계요소법을 적용할 수 있도록 식을 확장하였다. 이 방법은 얇은 물체의 두께 방향으로의 압력 및 속도 불연속을 가정함으로써 가능하였다. 극특이성 문제는 Maue의 정규화 공식을 사용하였다. 구석진 부위에서의 고체각(solid angle)과 극특이성 공식을 동시에 사용하기 위해 결합된 헬름홀츠 적분방정식에는 요소의 꼭지점에 배치점(collocation point)

을 주고 결합된 수직미분-적분방정식에는 요소내부에 배치점을 주는 방식을 사용하였으며 끝단에 존재하는 회절 특이성을 해결하기 위해 1/4점 요소를 사용하였다.⁽¹⁴⁻¹⁶⁾

2. 일반적 경계조건을 갖는 얇은 물체에 대한 경계적분방정식

Fig. 1은 얇은 물체에 대한 결합된 수직미분 적분방정식을 유도하기 위한 개념도이다. 헬름홀츠 적분방정식을 적용하기 위하여 음장을 가상면 s 로 외부 음장 Ω^+ 와 내부 음장 Ω^- 로 나눈다. 얇은 물체는 수학적으로 물체 양 표면의 중심면 S 로 표현할 수 있다. 외부 음장에서의 속도포텐셜을 ϕ^+ 라 하고 내부 음장에서는 ϕ^- , 1차 음원을 ϕ_{sc} 로 한다. 속도포텐셜은 $\vec{v} = -\nabla\phi$ 로 정의하고 시간에 대해서 $e^{+i\omega t}$ 규약을 사용하면 음압은 속도포텐셜과 $p = ik\rho_0 a_0 \phi$ 의 관계를 갖는다. 여기서 k 는 파동수, ρ_0 는 매질의 밀도, a_0 는 음속을 나타내며 $i = \sqrt{-1}$ 이다. Green의 2차 등치식(Green's second identity)을 헬름홀츠 방정식에 적용하면 각각의 영역에 대해서 다음과 같은 적분방정식을 얻을 수 있다.

$$C^+(P)\phi^+(P) = \int_{S^+} G(P, Q) \frac{\partial \phi^+(Q)}{\partial n} - \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \times \phi^+(Q) dS(Q) + 4\pi\phi_{sc}(P, X_{sc}) \quad (1)$$

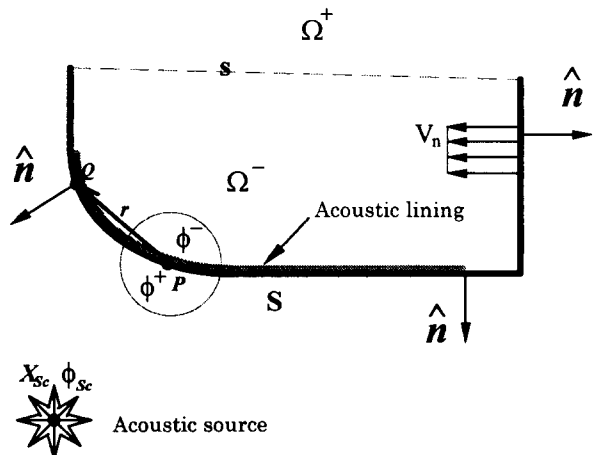


Fig. 1 Mathematical model for a thin-body coated in different materials.

$$C^-(P)\phi^-(P) = \int_{S^+} G(P, Q) \frac{\partial \phi^-(Q)}{\partial n} - \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \phi^-(Q) dS(Q) \quad (2)$$

여기서 P 와 Q 는 각각 배치점(collocation point)과 얇은 물체 표면 위의 검사점(control point), X_{Sc} 는 1 차 음원의 위치이다. C^+, C^- 는 각 영역에 대해 배치점 P 에서의 입체각이다. 수직 미분에서 방향 벡터 \hat{n} 은 얇은 물체 표면에서 외부 영역 Ω^+ 으로 향하는 방향이며 $G(P, Q)$ 는 자유 음장 Green함수로 거리 $r=|P-Q|$ 에 대해 e^{-ikr}/r 로 정의된다.

식 (1)과 식 (2)을 더하면 결합된 헬름홀츠 적분방정식(combined Helmholtz integral equation)을 얻을 수 있다.

$$C^+(P)\phi^+(P) + C^-(P)\phi^-(P) = - \int_S G(P, Q) \left(\frac{\partial \phi^+(Q)}{\partial n} - \frac{\partial \phi^-(Q)}{\partial n} \right) dS(Q) + \int_S \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} (\phi^+(Q) - \phi^-(Q)) dS(Q) + 4\pi\phi_{Sc}(P, X_{Sc}) \quad (3)$$

가상면에서의 적분은 압력과 법선 속도 연속 조건으로 인해 사라진다. 우변의 첫째 항은 법선 속도 연속 가정을 폐기하면 서로 상쇄되지 않고 남아있게 된다.

식 (3)에 \hat{n}_p 방향으로 방향 미분을 취하면 결합된 수직미분 적분방정식(combined normal derivative integral equation)을 얻을 수 있다.

$$C^+(P) \frac{\partial \phi^+(P)}{\partial n_p} + C^-(P) \frac{\partial \phi^-(P)}{\partial n_p} = - \int_S \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_p} \left(\frac{\partial \phi^+(Q)}{\partial n} - \frac{\partial \phi^-(Q)}{\partial n} \right) dS(Q) + \int_S \frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial n \partial n_p} (\phi^+(Q) - \phi^-(Q)) dS(Q) + 4\pi \frac{\partial \phi_{Sc}(P, X_{Sc})}{\partial n_p} \quad (4)$$

일반적으로 얇은 물체에 의한 음향 방사나 산란 문제에서 수직 속도 항, $\partial \phi / \partial n$ 는 두께 방향에 대해서 같다는 가정을 하지만 양 면의 재질이 다른 경우나 서로 다른 속도로 진동하고 있는 경우, 연속 가정을 계속 사용할 수는 없다. 따라서, 두께 방향으로의 압력 불연속 뿐만 아니라 수직 속도 불연속도 존재하게 된다.

식 (3)과 식 (4)에서 결정되어야 할 미지수는 $\partial \phi^\pm / \partial n, \phi^\pm$ 로 모두 4 가지이다. 두 적분방정식을

풀기 위해서는 두 개의 추가식이나 조건이 더 필요하게 된다. 두 개의 추가 조건은 경계 조건으로부터 얻을 수 있다. 적용할 일반 경계 조건은

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^+}{\partial n} &= -\alpha^+ \phi^+ - \beta^+ \\ \frac{\partial \phi^-}{\partial n} &= +\alpha^- \phi^- + \beta^- \end{aligned} \quad (5a, b)$$

이다. 여기서 $\alpha^\pm = i\rho_0 a_0 k Y^\pm$ 는 어드미턴스로 흡음과 관련된 양이고 β^\pm 는 수직 진동 속도와 관련된 양이다.

경계 조건과 함께 끝 단 회절 효과를 고려하기 위해 끝 단에서의 다음 조건식을 만족해야 한다.

$$\phi^+ = \phi^- \quad (5c)$$

이 조건은 끝 단을 따라 음압은 연속적이어야 함을 의미한다.

경계조건 (5a) 및 (5b)를 식 (3), (4)에 대입하면 결합된 헬름홀츠 적분방정식과 결합된 수직미분-적분방정식은 각각 다음과 같이 재정리할 수 있다.

$$C^+(P)\phi^+(P) + C^-(P)\phi^-(P) = + \int_S \left(\alpha^+ G(P, Q) + \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right) \phi^+(Q) dS(Q) + \int_S \left(\alpha^- G(P, Q) - \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right) \phi^-(Q) dS(Q) + \int_S (\beta^+ + \beta^-) G(P, Q) dS(Q) + 4\pi\phi_{Sc}(P, X_{Sc}) \quad (6)$$

그런데, 결합된 수직미분-적분 방정식에서는 $O(1/r^3)$ 의 극특이성 함수인 $\partial^2 G / \partial n \partial n_p$ 가 존재하는데 이를 직접 적분할 수 없기 때문에 정규화가 필요한데 이를 위해서는 배치점에서의 미분값이 유일하게 존재해야 한다. 그런데 구석이나 모서리 부분이 존재하는 물체에도 상관 없이 사용하기 위해서는 C^1 요소를 사용해야 한다. 미분값이 유일하게 존재하는 배치점은 smooth하기 때문에 고체각은 항상 2π 가 된다. 따라서 결합된 수직미분-적분방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} 2\pi\alpha^+ \phi^+(P) - 2\pi\alpha^- \phi^-(P) &= + \int_S \left(\alpha^+ \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_p} + \frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial n \partial n_p} \right) \phi^+(Q) dS(Q) + \int_S \left(\alpha^- \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_p} - \frac{\partial^2 G(P, Q)}{\partial n \partial n_p} \right) \phi^-(Q) dS(Q) + \int_S (\beta^+ + \beta^-) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_p} dS(Q) + 4\pi \frac{\partial \phi_{Sc}(P, X_{Sc})}{\partial n_p} + 2\pi(\beta^+ - \beta^-) \end{aligned} \quad (7)$$

식 (6)과 식 (7)을 한꺼번에 계산하면 양면에서의 속도 포텐셜(음압)을 구할 수 있지만, 두 식에서 사용하는 배치점 P는 다른 위치에 있다는 점을 기억해야 한다.

3. 수치 적용을 위해 처리해야 할 문제들

직접경계요소법을 얇은 물체에 적용하는데 있어서 처리해야 할 문제들을 정리하면 크게 네 가지로 정리할 수 있다. 특이 적분(singular integral) 문제, 끝단에서의 회절 특이성 처리 문제, 해의 비유일성 문제, 그리고 구석이나 모서리 등에서 발생하는 기하학적 불연속(geometrical discontinuity) 처리 문제 등이다.

특이 적분(Singular integral)

경계요소법의 해의 질을 결정하는 것은 특이 적분의 정확도와 밀접한 관련이 있다. 왜냐하면 특이 적분 항은 행렬식의 대각항(diagonal term)을 차지하지만 행렬의 다른 항들에 비해 그다지 크지 않기 때문이다(weak form). 극특이성을 갖는 커널 $\partial^2 G(P, Q)/\partial n \partial n_p$ 는 $O(1/r^3)$ 의 차수를 갖고 이를 Maue⁽⁴⁾와 Mitzner⁽⁵⁾가 유도한 Maue 적분방정식을 이용하면 특이 커널은 $O(1/r^2)$ 로 한 차수 낮출 수 있다.

$$\int_S \frac{\partial^2 G}{\partial n \partial n_p} \phi dS = \int_S \{ (\vec{n}_p \times \nabla_p G) \cdot (\vec{n} \times \nabla \phi) + k^2 (\vec{n}_p \cdot \vec{n}) G \phi \} dS \quad (8)$$

$O(1/r^2)$ 의 특이 커널 적분은 국소 극좌표계(local polar coordinate)를 사용하면 특이성의 차수를 또한 차수 낮출 수 있어 일반적인 가우스 적분법(Gaussian quadrature)으로도 정확한 적분을 수행할 수 있다.

끝단 회절 효과 처리(Treatment of knife edge diffraction)

셸은 두께가 0 이므로 셸 끝 단에서의 압력 혹은 속도포텐셜은 $[[\phi]] = 0$ 이어야 한다. 그런데 이 조건은 경계조건 (5c)의 적용에서 이미 고려가 되었기 때문에 음함수적으로 식 (6)과 식 (7)에 포함되어 있다. 그러나 셸 끝 단에서는 $O(1/\sqrt{r})$ 의 강한 회절 특이성이 발생한다. 이러한 특이성을 제거 하기 위해서는 여러 가지 방법이 있으나 여기서는 1/4-절점 요소(quarter point element)를 사용하였다. 1/4-절점 요소는 통상적인 요소의 중간 절점을 요소 변의 중

간에 두지 않고 셸 끝 단 쪽으로 1/4 위치에 두는 요소를 말한다.

계산 관점에서 끝 단 조건의 영향은 오히려 미지수의 갯수를 줄여주는 이점이 있다. 그러므로 행렬식을 만들 때 끝 단에 해당하는 절점은 행렬식에서 제거해야 한다.

해의 비유일성(Nonuniqueness of the solution)

비유일성 문제는 특정 주파수에서 해가 유일하게 구해지지 않는 현상을 말한다. 해의 비유일성 문제를 피하기 위해서는 특별한 조치가 필요하다. 그 중 가장 간단한 방법이 CHIEF point를 물체 내부에 추가적으로 삽입하여 overdetermined 된 행렬식을 푸는 방법이 있으나 이 방법을 적용하기 위해서는 물체 내부의 고유 진동에 해당하는 주파수에서 nodal 면 상에 추가점이 놓이지 말아야 한다. 일반적인 형상에서 물체 내부의 고유 진동수의 갯수는 다음과 같이 주파수와 물체 체적의 함수이다.⁽⁸⁾

$$n_{eigen} = \frac{Vk^3}{6\pi^2} \quad (9)$$

여기서 V는 물체의 체적이고 k는 파동수를 나타낸다. 식 (9)에 의하면 체적이 크거나 고주파수로 갈수록 고유 진동수의 갯수는 증가하나, 얇은 물체에서

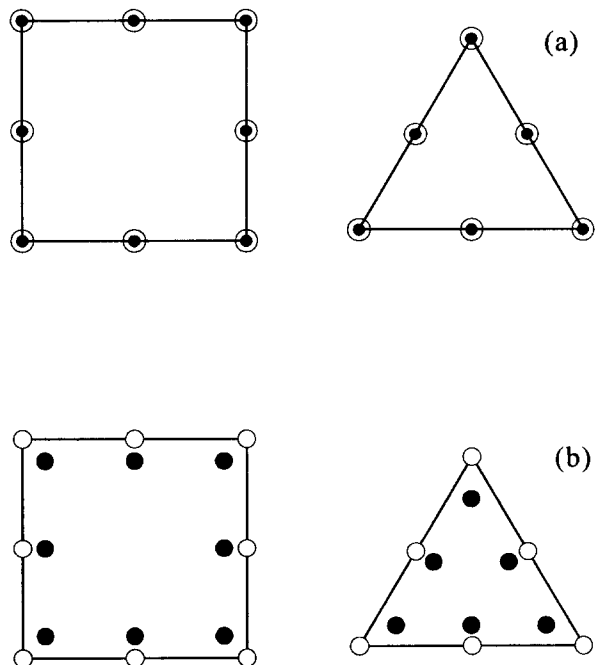


Fig. 2 Configuration of the master elements. (a) master elements for equation (6); (b) master elements for equation (7). (hollow circle : nodal points; flooded circle : collocation points)

는 체적이 없으므로 물체 내부의 고유 진동수의 갯수는 0이다. 그러므로 얇은 물체에 대한 해의 유일성은 항상 보장된다.

기하학적 불연속 처리 (Treatment of geometrical discontinuity)

앞 절에서 언급하였듯이 식 (6)과 식 (7)에서의 배치점은 서로 다른 위치라는 것을 밝혔다. 이는 Fig. 2에 그림으로 표현하였는데 mesh (a)는 배치점이 노달 point 와 일치하고 mesh (b)는 서로 다른 위치에 있음을 알 수 있다. 본 고에서 사용된 mesh는 두 가지 고려하에서 선택되었는데, 행렬식의 대각항 (diagonal term)이 되고 해의 정확도에 큰 영향을 미치기 때문에 정확한 계산이 요망되는 특이 적분 (singular integral)과 기하학적 불연속이 되는 모서리나 구석에서의 입체각 효과를 충분히 고려할 수 있어야 한다는 점이였다. 식 (6)에서 최대 특이성은 $O(1/r^2)$ 으로 일반적인 mesh (a)로 충분히 적분 가능하고 배치점이 노달 point 와 일치하기 때문에 기하학적 불연속을 취급하기에 용이한 mesh이다. 그러나, 식 (7)에서는 mesh (a)로 특이 적분을 정확하게 수행할 수 없기 때문에 식 (8)을 사용하여 정규화해야 하는데 식 (8)을 사용할 수 있는 조건이 배치점에서 미분 가능한 C^1 연속 조건을 만족해야 한다는 것이다. 따라서, 식 (7)에는 mesh (b)를 사용하였다.

4. 수치 적용

이산화를 위하여 8-절점 사각형 요소와 6-절점 삼각형 요소를 사용하였다. 요소상의 좌표계와 물리량은 절점상의 값들을 가지고 다음과 같이 근사화한다.

$$\begin{aligned}
 x_i(\vec{\xi}) &= \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\vec{\xi}) X_{i\alpha}, \\
 \phi(\vec{\xi}) &= \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\vec{\xi}) \phi_{\alpha} \quad (10) \\
 (i=1,2,3), (\alpha=1,2,\dots,6 \text{ or } 8)
 \end{aligned}$$

여기서 $N_{\alpha}(\vec{\xi})$ 은 2차 형상 함수이고 $X_{i\alpha}, \phi_{\alpha}$ 는 절점 좌표와 절점상의 속도포텐셜이다. 이산화를 수행하면 식 (6)과 식 (7)은 다음과 같은 행렬식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{++} & \mathbf{A}_{+-} \\ \mathbf{A}_{-+} & \mathbf{A}_{--} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_+ \\ \mathbf{F}_- \end{Bmatrix} \quad (11)$$

이 행렬식의 각 성분은 다음과 같이 정의된다.

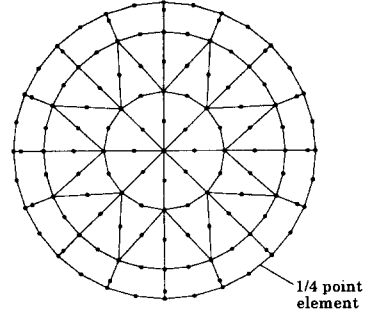


Fig. 3 Mesh for a disk problem.

$$\mathbf{A}_{++} = - \int_{S_+} \left[a^+(Q(\vec{\xi}))G(P, Q(\vec{\xi})) + \frac{\partial G(P, G(\vec{\xi}))}{\partial n} \right] N(\vec{\xi}) dS_m \quad (12a)$$

$$\mathbf{A}_{+-} = - \int_{S_+} \left[a^-(Q(\vec{\xi}))G(P, Q(\vec{\xi})) - \frac{\partial G(P, G(\vec{\xi}))}{\partial n} \right] N(\vec{\xi}) dS_m \quad (12b)$$

$$\mathbf{A}_{-+} = - \int_{S_-} \left[a^+(Q(\vec{\xi}))\frac{\partial G(P, G(\vec{\xi}))}{\partial n_p} + \frac{\partial^2 G(P, G(\vec{\xi}))}{\partial n \partial n_p} \right] N(\vec{\xi}) dS_m \quad (12c)$$

$$\mathbf{A}_{--} = - \int_{S_-} \left[a^-(Q(\vec{\xi}))\frac{\partial G(P, G(\vec{\xi}))}{\partial n_p} - \frac{\partial^2 G(P, G(\vec{\xi}))}{\partial n \partial n_p} \right] N(\vec{\xi}) dS_m \quad (12d)$$

$$\mathbf{F}_+ = \int_S (B^+ + B^-)G(P, Q(\vec{\xi})) ds + 4\pi \phi_{sc}(P, X_{sc}) \quad (12e)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_- &= \int_S (B^+ + B^-)\frac{\partial G(P, G(\vec{\xi}))}{\partial n_p} ds \\
 &+ 4\pi \frac{\partial \phi_{sc}(P, X_{sc})}{\partial n_p} \quad (12f) \\
 &+ 2\pi\{B^+ - B^-\}
 \end{aligned}$$

여기서 $N(\vec{\xi})=(N_1, N_2, N_3, \dots, N_6 \text{ or } N_8)$ 이다.

배치점의 갯수는 항상 절점의 수보다 많기 때문에 과잉 행렬식이 형성되며 이것은 최소 사승법으로 풀 수 있다. 만약 얇은 물체가 $NNODE$ 개의 절점으로 이산화 되고 이중 $NEDGE$ 개의 절점이 끝 단에 놓여있고 배치점의 수는 $JMAX$ 개라고 가정하자. 그러면 구성되는 행렬식은 $JMAX \times 2NNODE$ 가 된다. ϕ_k^+, ϕ_k^- 를 k 번째 절점에 해당하는 속도포텐셜이라고 하고 $\{A_k^+\}$ 와 $\{A_k^-\}$ 를 그 절점에 해당하는

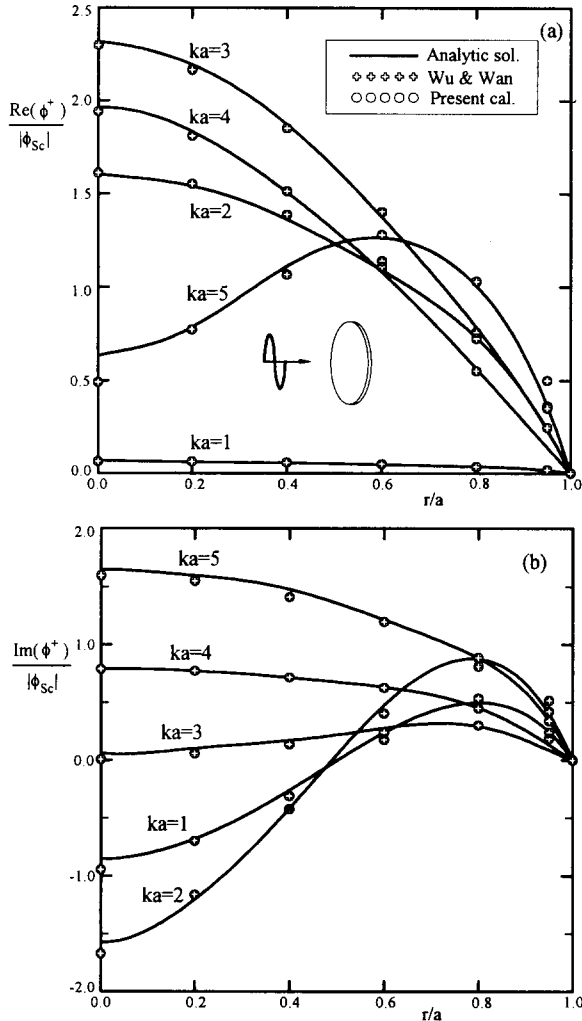


Fig. 4 Normalized scattered velocity potential on the illuminated surface.

열 벡터라고 하고 ϕ_k^+ , ϕ_k^- 중에 하나는 식 (5c) 를 만족시키기 위해 대체되어야 한다. 그런데 이것은 $\{A_k^+\}$ 나 $\{A_k^-\}$ 중에 하나를 $\{A_k^+ + A_k^-\}$ 로 대체하고 나머지 하나를 없애버림으로써 쉽게 구현할 수 있다. 최종적으로 풀어야 할 행렬식은 $JMAX \times (2NNODE - NEDGE)$ 가 된다.

5. 결과 및 토론

본 고에서 제안한 얇은 물체에 대한 직접경계 요소법을 검증하기 위해 우선 강체이고 직경이 a 인 원형 디스크에 의한 평행파 반사 문제를 풀었다. 입사파는 $\phi_{sc} = e^{-ika}$ 로 정의할 수 있다. 본고에서 제안한 방법에 의한 해를 문헌 (3)과 비교하기 위해 같

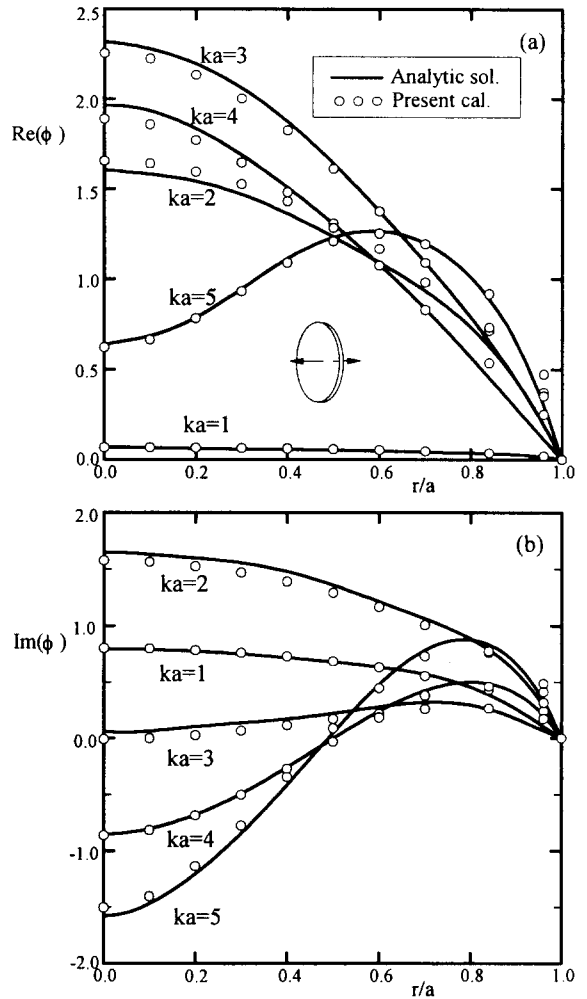


Fig. 5 Normalized velocity potential of the vibrating circular disk.

은 격자를 사용하였다. 즉, Fig. 3과 같이 16개의 8-절점 사각형 요소와 32개의 6-절점 삼각형 요소로 디스크를 묘사하였다. 계산한 무차원 파동수 ka 는 1, 2, 3, 4 및 5 였다.

강체에서는 디스크 양면의 어드미턴스 α^+ , α^- 는 모두 0이고 수직속도 β^+ , β^- 도 0이다. 디스크의 앞면은 평행파를 직접 맞는 면이고 뒷면은 평행파를 등진 면으로 정의한다. Fig. 4는 디스크 앞면에서의 산란된 속도포텐셜의 실수부와 허수부를 각각 문헌 (3)에 있는 엄밀해와 비교한 것으로 현재 제안된 방법으로 강체인 경우, 매우 잘 일치하는 해를 얻을 수 있음을 알 수 있었다

두 번째 검증은 같은 원형 디스크가 강체 진동하는 문제에 적용하였다. 이와 같은 원형 디스크의 진동에 의한 음향 방사문제는 앞에서의 산란 문제와 같은 해석해를 갖는다. 그러나, 계산시 경계 조건에 차이가 있

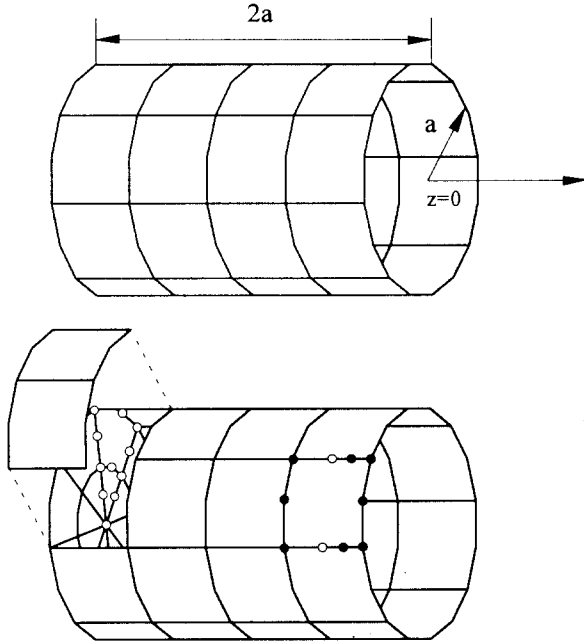


Fig. 6 Duct geometry and the used mesh. 40 eight-node quadrilateral and 8 six-node triangular elements are used. (Flooded circle: element for the knife edge, hollow circle: regular element)

다. 산란 문제는 경계 조건이 $\alpha^+ = \alpha^- = \beta^+ = \beta^- = 0$ 이지만 방사 문제는 β^+, β^- 가 진동 속도로 주어진다. 해석 결과 Fig. 5와 같이 방사 문제에서도 매우 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었다.

다음은 역시 강체이고, Fig. 6과 같이 한쪽이 막힌 원형 통에 의한 평행파 산란 문제에 적용하였다. 원형 통의 반경은 a 이고 높이는 $2a$ 이다. 사용된 격자는 사각형 요소 40개와 삼각형 요소 8개이다. 원형 통 입구부 끝단에는 1/4-절점 요소가 사용되었다. 평행파는 원형 통의 입구부로 수직 입사한다.

Fig. 7은 배치점의 영향을 나타낸 것이다. 여기서는 Fig. 2의 mesh (b)만을 써서 계산한 결과를 Wu와 Wan⁽³⁾이 계산한 결과와 비교한 것이다. 그 결과 기하학적 불연속을 무시할 수 없음을 알 수 있다. Fig. 8은 전장에서 언급한 바와 같이 mesh (a)는 결합된 헬름홀츠 적분방정식에 사용하고 mesh (b)는 결합된 수치미분-적분 방정식에 사용하여 계산한 결과를 Wu와 Wan의 계산 결과와 비교한 것이다. 원형 통의 측면 벽과 바닥면 모두에서 서로 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

마지막으로 본 고에서 제안한 직접 경계요소법을 일반적인 경계 조건을 갖는 경우에 적용하였다. Fig.

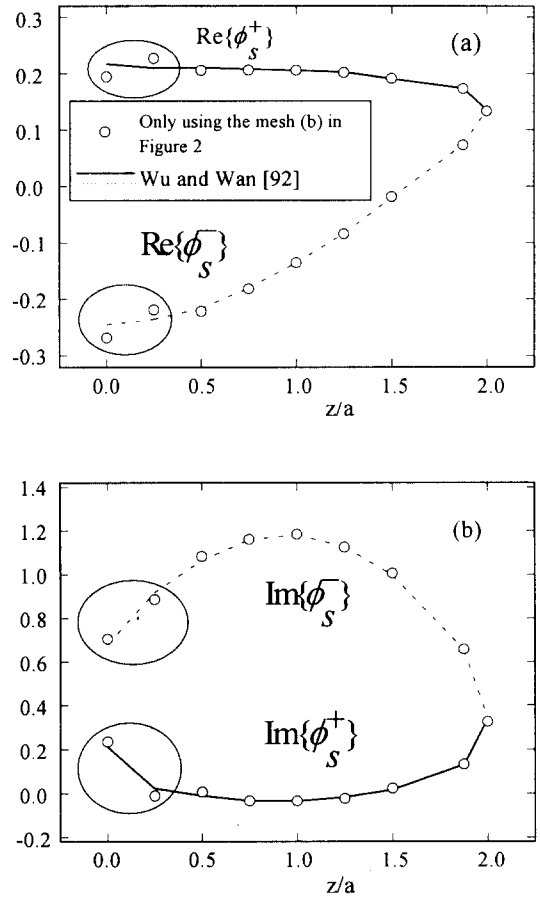


Fig. 7 Solid-angle effect at corners and vertexes. Solid and dotted lines represent the results of Wu and Wan calculation in (3). Hollow circle is the result by using element for both equations (6) and (7). Plotted quantity is the scattered velocity potential on the surface of the wall. (a) Real part on the side wall; (b) Imaginary part on the side wall

9과 같이 바닥면의 반경의 절반이 흡음재로 도포된 경우 원형 통에 의한 산란 현상을 계산한 것이다. 이때 흡음재의 어드미턴스는 $\alpha^- = k^2 3^{-1} (1 + j0.3)^{-1}$ 이다. 계산 결과는 다중영역법(1)에 의한 결과와 서로 비교하였다. 그 결과 Fig. 10에서 보는 바와 같이 서로의 계산 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있었다.

이상에서 고찰한 바와 같이 일반적인 경계 조건을 갖는 얇은 물체에 대해 개발된 직접 경계요소법은 강체조건, 진동조건, 흡음조건 등 일반적인 경계 조건을 갖는 얇은 물체에 적용 가능한 것을 확인할 수 있었다. 또한, 모서리나 구석 등 기하학적 불연속이 있는 경우에도 정확하게 음장을 모사할 수 있음

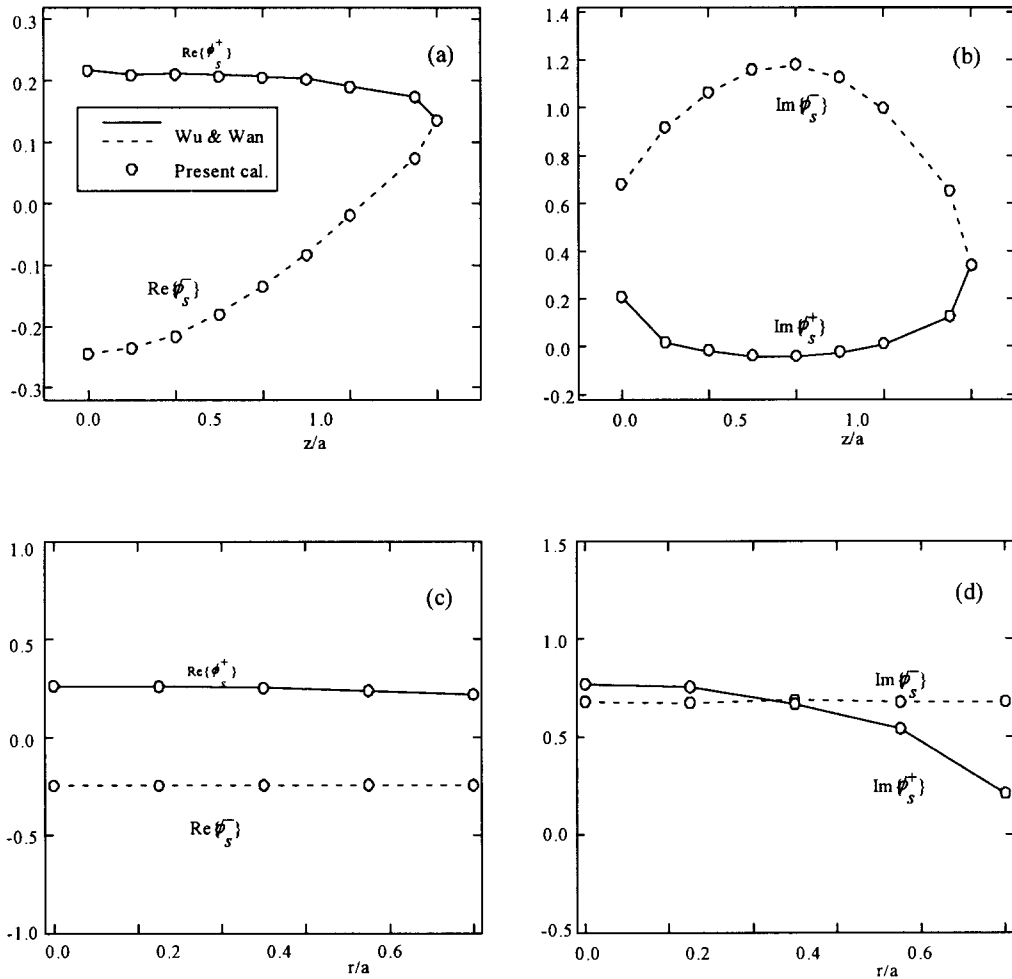


Fig. 8 Scattered velocity potential on the wall surface. (a) Real parts on the side wall; (b) Imaginary parts on the side wall; (c) Real parts on the bottom wall; (d) Imaginary parts on the bottom wall.

을 확인할 수 있었다.

6. 결 론

강체나 컴플라이언트한 면을 갖는 얇은 물체에 두께 방향으로의 속도 불연속 가정을 도입하여 직접 경계 요소법이 적용 가능하도록 새로운 방법을 제안하였다. 결합된 헬름홀츠 적분방정식과 결합된 수직 미분-적분방정식을 동시에 계산하여 얇은 물체의 양면이 서로 다른 경계 조건을 갖는 문제에도 적용 가능하도록 하였다. 또한 구석이나 모서리 부분에서의 기하학적 불연속을 해결하기 위해 배치점의 위치를 조절하여 고체각의 영향이 제대로 구현되도록 하였다. 이와 같이 제안한 방법을 강체의 산란 및 방사 문제에 적용하여 검증하였고, 흡음재가 한쪽만 도포

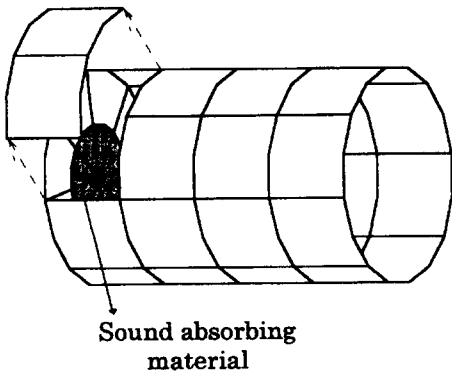


Fig. 9 Circular cylindrical shell in which a sound absorbing material is partly mounted.

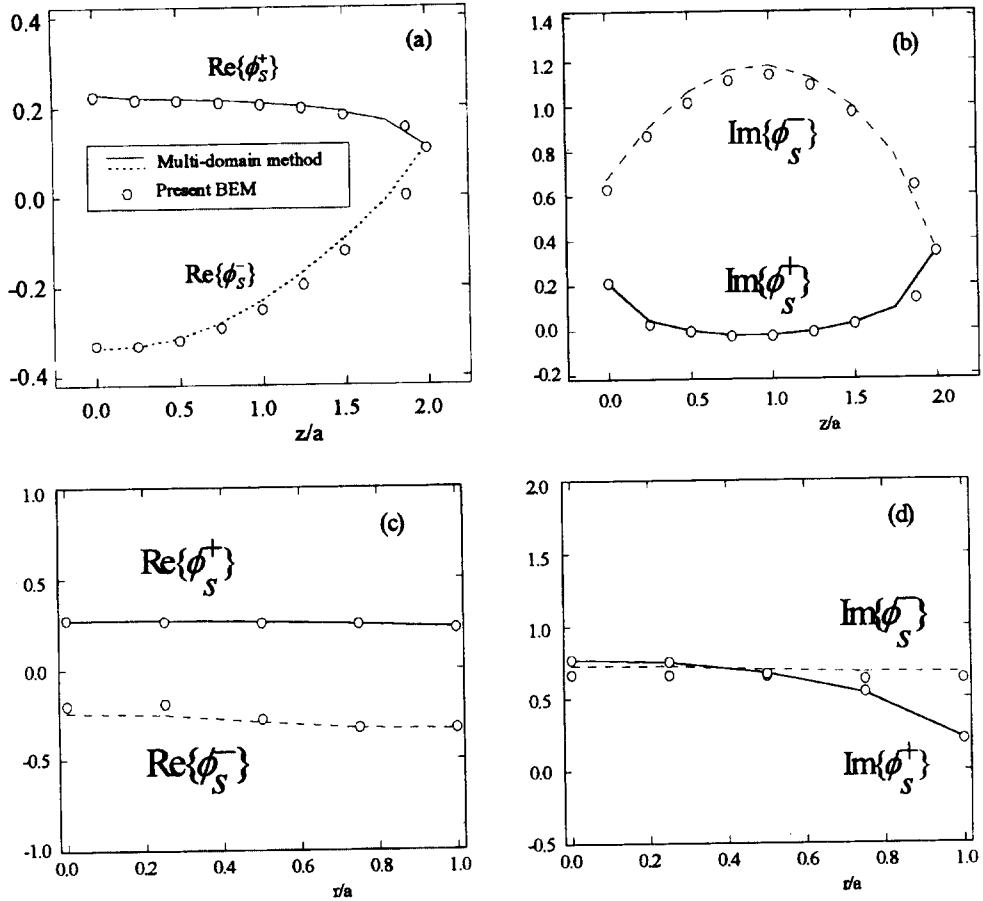


Fig. 10 Scattered velocity potential on the wall surface when $ka=1.0$ and the absorbing material with $\alpha=k^2 3^{-1}(1+i0.3)^{-1}$ is partly covered on the inner side of bottom surface. ($r=\sqrt{x^2+y^2}$)

된 문제에도 적용하여 방법의 타당성을 검증하였다.

이상에서 개발된 얇은 물체에 대한 직접경계요소법은 다중영역법에 비하여 필요 없는 가상면에 대한 격자화가 필요없기 때문에 전처리 과정이 간단하고, 간접경계요소법에 대해서는 구석이나 모서리 등과 같은 기하학적 불연속점에서의 해의 정확도가 뛰어나다. 이와 함께 재질의 영향 및 진동 속도 등의 경계 조건을 쉽게 줄 수 있기 때문에 얇은 물체에 의한 음향 산란 및 방사에 의한 음장 해석에 유용하게 적용할 수 있을 것이다.

참고 문헌

(1) Seybert, A.F., Cheng, C.Y.R. and Wu, T.W., 1990, "The Solution of Coupled Interior/Exterior Acoustic Problems using the Boundary Element

Method", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 88, pp.1612~1618.
 (2) Martinez, R., 1991, "The Thin-Shape Breakdown (TSB) of the Helmholtz Integral Equation," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 90, pp.2728~2738.
 (3) Wu, T.W. and Wan, G.C., 1992, "Numerical Modeling of Acoustic Radiation and Scattering from thin Bodies using a Cauchy Principal Integral Equation," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 92, pp.2900~2906.
 (4) Maue, A.W., 1949, "Zur Formulierung Eines Allgemeinen Beugungsproblems Durch Eine Integralgleichung," Z. Phys., Vol. 126, pp.601~618.
 (5) Mitzner, K.M., 1966, "Acoustic Scattering from an Interface between Media of Greatly Different Density," J. Math. Phys., Vol. 7, pp.2053~2060.
 (6) Tanaka, M, Sladek, V. and Sladek, S., 1994,

- Regularization Techniques Applied To Boundary Element Method," Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, pp.457~499.
- (7) Wu, T.W., 1995, "A Direct Boundary Element Method For Acoustic Radiation And Scattering From Mixed Regular and Thin Bodies," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 97, pp.84~91.
- (8) Hamdi, M.A. and Ville, J.M., 1986, "Sound Radiation from Ducts: Theory And Experiment," J. Sound Vib., Vol. 107, pp.231~242.
- (9) Wu, X.F., Pierce, A.D. and Ginsberg, J.H., 1987, "Variational Method for Computing Surface Acoustic Pressure on Vibrating Bodies, Applied to Transversely Oscillating Disks", Ieee J. Osc. Eng., Vol. Oe-12, pp.412~418.
- (10) MalbéQui, P., Glandier, C. And Reynier, C., 1993, "Anaysis of Sound Propagation and Radiation In A Curved Duct using a Boundary Integral Method: Comparison with Experiment," Aiaa Aeroacoustic Conference at Long Beach, CA 93~4376.
- (11) Martinez, R., 1988, "Diffracting Open-Ended Pipe Treated as a Lifting Surface," Aiaa J., Vol. 26, pp.396~404.
- (12) Martinez, R., 1990, "A Boundary Integral Formulation for Thin-Walled Shapes of Revolution," J. Acous. Soc. Am, Vol. 87, pp.523~531.
- (13) Wu, T.W., Seybert, A.F. and Wan, G.C., 1991, "On the Numerical Implementation of Cauchy Principal Value Integral to Insure a Unique Solution for Acoustic Radiation and Scattering", J. Acoust. Soc. Am, Vol. 90, pp.554~560.
- (14) Seybert, A.F., Jia, Z.H. and Wu, T.W., 1992, "Solving Knife-Edge Scattering Problems using Singular Boundary Elements," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 91, pp.1278~1283.
- (15) Henshell, D., 1975, "Crack Tip Finite Elements are Unnecessary," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 9, pp.495~507.
- (16) Barsoum, R., 1976, "On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics," Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, pp.25~37.