

## 역삼각형의 직립 제어에 관한 연구

오 영 석\* · 유 영 호\*\*

### A Study on the Upright Control of an Inverted Triangle

Y. S. Oh\* · Y. H. Yu\*\*

**Key words** : Inverted Triangle(역삼각형), upright control(직립제어), prediction estimator(예측추정자), current estimator(동시추정자)

#### Abstract

This paper presents a method for designing a control system to stand upright inverted triangle. A linearized model is obtained from the nonlinear system by Taylor series expansion and a state controller is designed based on the model. After implementing the control system which is combined control law and estimator with reference input, experiments are carried out to stand upright inverted triangle at any angular position.

#### 1. 서 론

본 연구의 제어대상으로서 역삼각형 구조물의 꼭지점을 고정시키지 않고 좌우로 기울어질수 있게 제작하였다. 삼각형 내부의 양변에 일정 질량의 제어추를 두고 이것을 DC모터로서 이동시켜 역삼각형 무게중심이 중심축으로부터 기울어지는 각도를 제어하였다. 시스템 모델링과 시뮬레이션을 거쳐 제어시스템을 설계하고 마이크로프로세서를 이용하여 제어시스템을 구현하였다. 본 연구의 대상 시스템은 무게중심이 기울지면서 역삼각형 내부에 있는 제어추의 움직임에 의해 정현,여

현 성분이 발생하는 비선형 시스템이다. 유도된 비선형 상태방정식을 Taylor급수로 전개하여 선형화하고 선형상태방정식을 이산상태방정식으로 변환하였다. 상태피드백제어에서는 모든 상태를 알아야하므로 현재의 출력을 측정하여 현재의 상태를 예측할 수 있는 동시상태추정자(current estimator)를 설계하여 상태를 추정하였으며 극배치방법을 이용하여 피드백이득  $K$ 를 구하였다. 동시상태추정자와 피드백이득  $K$ 를 이용하여 역삼각형의 중심축이 임의의 각도로 기울어 질 수 있도록 기준입력을 갖는 제어기를 설계 하였다. 시스템은 2개의 DC모터와 모터드라이브회로, 인텔

\* 한국해양대학교 대학원 제어계측공학과 (원고접수일 : 97년 10월)

\*\* 한국해양대학교 자동화정보공학부 조교수

80C196KC를 이용한 컨트롤러 3개와 역삼각형구조물로 구성되었다. 제어기로부터 출력되는 제어 추의 위치 명령값을 내부 연산에 의해 PWM값으로 변환되어 DC모터드라이브회로에 인가 된다. 각 물체의 위치 정보는 10회전의 포텐쇼미터를 사용하고 각도의 계측은 1회전의 포텐쇼미터를 사용하였다. 설계된 상태추정자와 제어기의 시뮬레이션은 PC상에서 MATLAB를 이용하여 실행하였다. 구현된 제어시스템을 제작된 역삼각형구조물시스템에 적용하여 응답실험을 행하였다.

2. 시스템의 모델링

Fig. 1에서와 같이 역삼각형 내부양변에 일정 질량의  $m_L, m_R$ 를 두고 이를 DC모터로써 움직일 수 있게 하여 역삼각형을 임의의 각도에 직립할 수 있도록 한다. 역삼각형이 시계 방향으로 넘어지고 있다고 가정하고 역삼각형의 질점  $m_T$ 가 중심축으로부터 넘어지지 않게  $m_L, m_R$ 를 움직여서 임의의 각도  $\theta$ 에서 직립할 수 있도록 제어 하고자 한다. 시계방향을 +, 반시계방향을 -로 정의 하고 운동 방정식을 유도한다.

역삼각형이  $\theta$ 만큼 기울어졌을 때 중력에 의한 모우먼트는

$$\Sigma Mg = m_T gx_T \sin\theta + m_R gx_R \sin(\theta_R + \theta) - m_L gx_L \sin(\theta_L - \theta) \quad (1)$$

이 되고  $\theta$ 만큼 회전하므로써 발생하는 모우먼트는

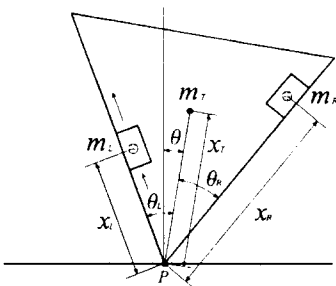


Fig. 1 Schematic diagram of inverted triangle

$$\Sigma M_\theta = m_T x_T^2 \ddot{\theta} + m_R x_R^2 \ddot{\theta} + m_L x_L^2 \ddot{\theta} \quad (2)$$

가 된다. 식(1)과 식(2)를 합하면

$$m_T gx_T \sin\theta + m_R gx_R \sin(\theta_R + \theta) - m_L gx_L \sin(\theta_L - \theta) = m_T x_T^2 \ddot{\theta} + m_R x_R^2 \ddot{\theta} + m_L x_L^2 \ddot{\theta} \quad (3)$$

이 되고, 여기서 회전변위  $\theta$ 가 미세하다고 하면  $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$  로 둘 수 있으므로 식(3)은

$$m_T gx_T \theta + m_R gx_R \sin\theta_R + m_R gx_R \theta \cos\theta_R - m_L gx_L \sin\theta_L + m_L gx_L \theta \cos\theta_L = m_T x_T^2 \ddot{\theta} + m_R x_R^2 \ddot{\theta} + m_L x_L^2 \ddot{\theta} \quad (4)$$

로 근사화 할수 있다. 식(4)에서  $a_1 = m_T gx_T, c = m_R gx_R \sin\theta_R, a_2 = m_R gx_R \cos\theta_R, a_3 = m_L g \sin\theta_L, a_4 = m_L g \cos\theta_L, b_1 = m_T x_T^2, b_2 = m_R x_R^2, b_3 = m_L$  로 두고 정리 하면

$$(a_1 + a_2)\theta - (a_3 - a_4)\theta x_L + c = b_1 \ddot{\theta} + b_2 \ddot{\theta} + b_3 x_L^2 \ddot{\theta} \quad (5)$$

가 된다.

역삼각형 시스템의 왼쪽편  $m_L$ 를 움직이는 DC모터에 대한 운동 방정식은 Fig. 2의 스텝 응답실험을 통하여 원형 2차 계통의 페루프 방정식으로 유도한다.

Fig. 2로부터

$$\left. \begin{aligned} t_r &= 0.144 \text{ sec} \\ t_d &= 0.102 \text{ sec} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

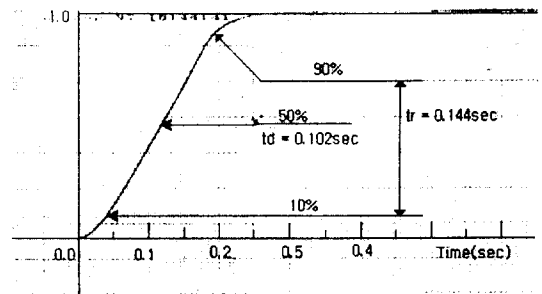


Fig. 2 Step response of the DC MOTOR

이 된다. 원형2차 계통의 페루프 방정식은

$$\frac{X_L(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (7)$$

이고  $t_r, t_d$ 는

$$\left. \begin{aligned} t_r &= \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n} \\ t_d &= \frac{0.8+2.5\zeta}{\omega_n} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

이 되며 식(6)과 식(8)로부터

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= 0.4067 \\ \omega_n &= 12.5812 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

가 된다. 식(7)과 식(9)로부터 DC 모터의 운동 방정식을 유도하면

$$\ddot{x}_L + 10.252 \dot{x}_L + 158.634x_L = 158.634u \quad (10)$$

과 같다. 식(6)의 시뮬레이션 결과를 Fig. 3에 나타내었으며 Fig. 2와 Fig. 3의  $t_r$ 과  $t_d$ 가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. Fig. 2와 3에서 오버슈트가 서로 상이한 것은 실제 DC모터 구동 프로그램에서 시작과 끝 부근에서 가감속 프로그램으로 DC 모터 구동을 원활하게 했기 때문으로 생각된다.

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}, x_3 = x_L, x_4 = \dot{x}_3 = \dot{x}_L$$

로 두고 식(5)와 (10)을 상태방정식으로 정리하면 식(11)과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{(b_1 + b_2 + b_3 x_3^2)} \\ &\quad ((a_1 + a_2)x_1 - (a_3 - a_4 x_1)x_3 + c) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -158.63x_3 - 10.25x_4 + 158.6u \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

식(11)은 비선형 시스템이므로 직립상태  $x_0(t)$ ,  $u_0(t)$ 에서 선형화하기 위하여  $\Delta x_i = x_i - x_{0i}$ 라 두고 Taylor급수로 전개한 후 모든 고차항을 무시하면 아래의 식을 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\ y &= C\Delta x \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

단,

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -158. & -10. \end{pmatrix}$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 158.63]^T, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

이 되며 여기서,

$$a_{21} = \frac{1}{(b_1 + b_2 + b_3 x_{03}^2)}((a_1 + a_2) + a_4 x_{03}) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} a_{23} &= \frac{1}{(b_1 + b_2 + b_3 x_{03}^2)^2}(((a_1 + a_2)x_{01} + c)2b_3 x_{03} \\ &\quad + (a_3 - a_4 x_{01})(b_1 + b_2 + b_3 x_{03}^2) - 2b_3 x_{03}^2) \end{aligned} \quad (14)$$

이다. 본 연구에서는

$$m_T = 3.05\text{kg}, m_L = m_R = 0.64\text{kg},$$

$$x_T = 21.4\text{cm}, x_R = 25.0\text{cm}, g = 981\text{cm/s}^2$$

이며 직립상태  $x_0 = [0.0 \ 0.0 \ 25.0 \ 0.0]^T$ 가 된다. 이 경우 직립상태에서 근사화된 식(12)의  $A, B, C$ 는

$$A = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0165 & 0.0000 & 0.2475 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -158.63 & -10.25 \end{bmatrix},$$

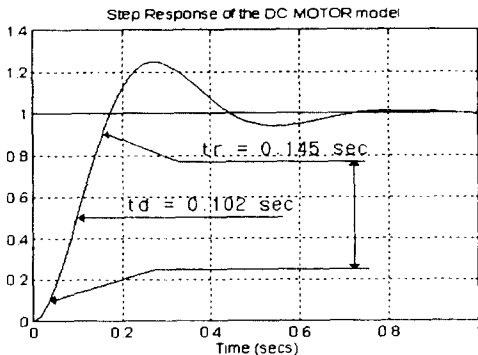


Fig. 3 Step response of DC motor model

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 158.634 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (15)$$

가 된다.

식(12)의 연속상태방정식에서 샘플링시간을 0.1 sec 로 하여 이산화상태방정식으로 변환하면

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Hx(k) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

단,

$$x(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k)]^T,$$

이며 제어대상 시스템의 각 계수를 대입하면

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0.1000 & 0.0011 & 0.000 \\ -0.0016 & 0.9999 & 0.0199 & 0.008 \\ 0 & 0 & 0.4863 & 0.0481 \\ 0 & 0 & -7.5958 & 0.0056 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = [0.0001 \ 0.0048 \ 0.5137 \ 7.5958]^T$$

$$H = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (17)$$

이 된다.

### 3. 제어 시스템 설계

#### 3.1 Estimator 설계

상태 피드백 제어에서는 모든 상태를 알아야 하지만, 측정이 어렵거나 측정의 정도가 저하될 경우가 있으므로 상태추정자를 설계하여 상태를 추정하고 이 상태를 피드백하여 제어한다. 상태추정자에는 예측상태추정자, 동시상태추정자등이 있지만 본 연구에서는 예측상태추정자를 기본으로 하여 현재의 출력값으로 현재의 상태를 추정하는 동시상태추정자를 설계한다. 예측상태추정자의 구조는 Fig. 4와 같다.

Fig. 4의 예측상태추정자로부터

$$\hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L_p [y(k) - H\hat{x}(k)] \quad (18)$$

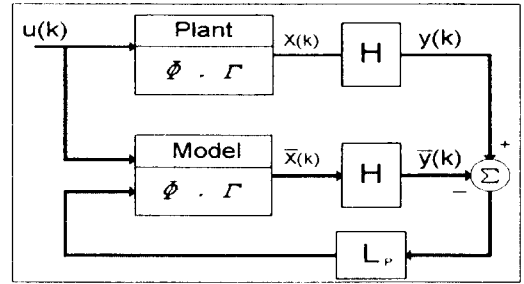


Fig.4 Prediction estimator

이 되고 식(16)과 식(18)로부터

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

라 두면

$$\tilde{x}(k+1) = [\Phi - L_p H] \tilde{x}(k) \quad (19)$$

이 되고 상태추정자의 오차  $\tilde{x}(k)$  가 0으로 수렴하여야 한다. 식(19)의 특성방정식

$$\det |zI - \Phi + L_p H| = 0 \quad (20)$$

에서  $L_p$ 는 상태추정자의 특성방정식의 근이 주어진다. 아크만(Ackermann)의 공식을 이용하여 구할 수 있다.

Fig. 5에서 동시상태추정자는

$$\begin{aligned} \hat{x}(k) &= \bar{x}(k) + L_c [y(k) - H\bar{x}(k)] \\ \bar{x}(k) &= \Phi \bar{x}(k-1) + \Gamma u(k-1) \\ \bar{x}(k+1) &= \Phi \bar{x}(k) + \Gamma u(k) \\ &\quad + \Phi L_c [y(k) - H\bar{x}(k)] \end{aligned} \quad (21)$$

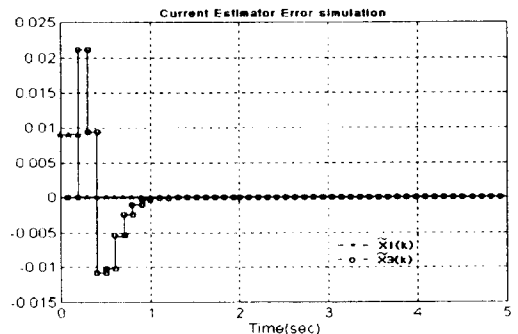


Fig. 5 Current estimator

가 되며 식(21)를  $\hat{x}(k)$ 에 관하여 정리하면

$$\hat{x}(k) = [\Phi - L_C H \Phi] \hat{x}(k-1) + [\Gamma - L_C H \Gamma] u(k-1) + L_C y(k) \quad (22)$$

이 된다. 식(16)에서 식(22)을 빼면 동시상태추정 오차는

$$\tilde{x}(k+1) = [\Phi - \Phi L_C H] \tilde{x}(k) \quad (23)$$

이 되며 식(23)의  $\tilde{x}(k)$ 가 0으로 수렴하여야 한다. 두 추정자의 피드백 이득  $L_p, L_c$ 의 관계는 식(18), 식(21)로부터

$$L_p = \Phi L_c, L_c = \Phi^{-1} L_p \quad (24)$$

가 된다. 본 연구에서의 특성 방정식의 Pole을  $z = [0.1 \pm 0.01i, 0.3 \pm 0.01i]$ 에 두고  $L_p, L_c$ 를 구하면

$$L_p = [1.6917 \ 5.0928 \ -106.4993 \ 705.7342]^T$$

$$L_c = [0.9975 \ 7.975 \ -93.844 \ -1265.3]^T \quad (25)$$

이 되며 식(23)을  $\hat{x}_1(0) = 0.009$ 으로 하여 시뮬레이션한  $\tilde{x}_1(k), \tilde{x}_3(k)$ 의 그래프는 Fig. 6과 같으며 0.3초후에  $\tilde{x}_1$ 이 0이 되어 정확히 상태를 추종 하였음을 보여준다.

### 3.2 제어칙 설계

식(16)에서 제어칙을

$$u(k) = -Kx(k) \quad (26)$$

로 하면 식(16)은

$$x(k+1) = \Phi x(k) - \Gamma Kx(k) \quad (27)$$

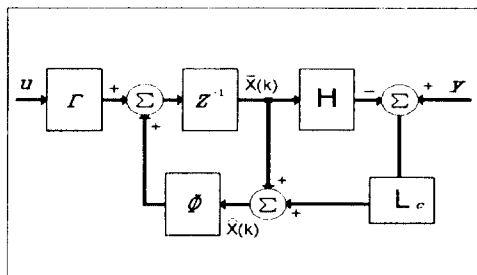


Fig. 6 Time history of  $\tilde{x}(k+1)$

이 되고 이의 특성 방정식은

$$\det |zI - \Phi + \Gamma K| = 0 \quad (28)$$

이 된다. 식(28)의 K는 시스템 특성 방정식의 근이 주어지면 아르만의 공식을 이용하여 구할수 있다. 본 연구에서의 시스템 특성방정식의 근을  $0.1 \pm 0.01i, 0.3 \pm 0.01i$ 로 하면

$$K = [168.4937 \ 57.6361 \ 1.1812 \ 0.0779] \quad (29)$$

가 된다.

### 3.3 Reference 입력을 가지는 제어기 설계

위에서 구한  $L_c, K$ 를 이용하여 동시상태추정자와 기준입력을 가지는 제어시스템을 설계한다. 기준입력이 있는 시스템은 Fig. 7과 같이 제어기의 입력을 시스템 출력과 기준입력의 오차라고 볼수 있으므로 식(23)에서  $u(k) = -K\hat{x}(k)$ 를 대입하면

$$\hat{x}(k) = [\Phi - \Gamma K - L_c H \Phi + L_c H \Gamma K] \hat{x}(k+1) + L_c [y(k) - ref] \quad (30)$$

이 된다. 제어대상시스템의 각 계수를 대입하면

$$[\Phi - \Gamma K - L_c H \Phi + L_c H \Gamma K] = \begin{bmatrix} 0.0024 & 0.0002 & 0.0000 & 0.0000 \\ -8.6502 & -0.0283 & -0.0064 & 0.0005 \\ -5.6981 & -20.7641 & -0.0283 & 0.0074 \\ -35.9498 & -318.5511 & -15.3255 & -0.5960 \end{bmatrix} \quad (31)$$

이 된다.

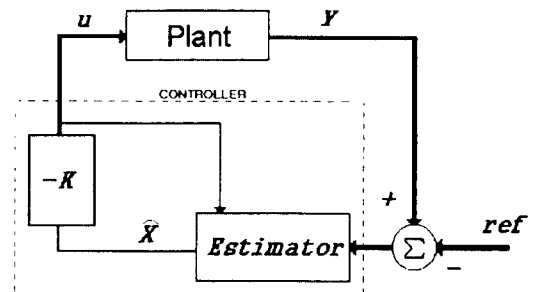


Fig. 7 Tracking control system

### 3. 4 H/W 설계

#### (1) MOTOR 구동부

DC 모터의 구동부는 Fig. 8과 같이 구성되어 있다. 모터의 구동은 H브릿지형의 드라이브와 마이크로프로세서 인텔 80C196KC를 사용하였다. 80C196KC로부터의 PWM값을 모터의 제어 입력으로 하였다. 위치정보는 포텐쇼미터를 사용하여 10Bit로 A/D변환하여 얻어진다. A/D채널0으로부터 제어추의 위치를 피드백하여 제어기로부터의 제어추위치명령값에 추종하도록 PWM을 발생하는 DC모터제어기를 제작하였다.

#### (2) 전체 시스템 구성

전체 제어 시스템의 구성은 Fig. 9와 같다. 제어기

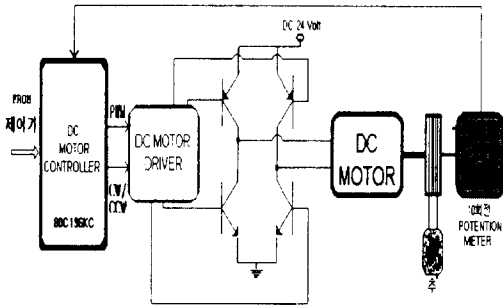


Fig. 8 DC motor driving part

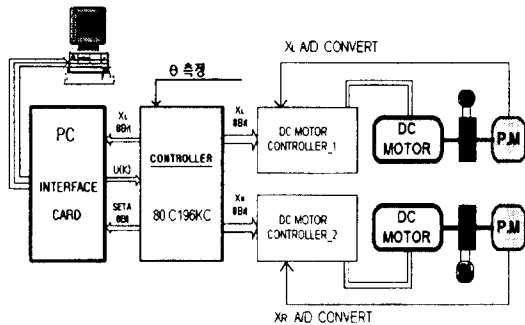


Fig. 9 Overall configuration of control system

는 DC모터제어기와 병렬 통신으로 제어입력값과 출력값을 송수신한다. 또한 제어시스템은 상위 시스템과 병렬로서 통신이 가능하도록 설계되었다.

### 4. 시뮬레이션

역삼각형은 정삼각형으로 한번의 길이가 48cm이고 제어추의 변위 한도는 25.6cm이며 제어추의 무게는 640g으로서 역삼각형의 기울기가 커지면 제어추 변위 한도를 넘게 되므로 제어가능한 범위 내에서 시뮬레이션을 행하였다. Fig. 10과 Fig. 11은 초기상태가 0.5도 기울어졌을 때 0도로 직립할 때를 시뮬레이션한 것으로 Fig. 10은 기울어진 각도를, Fig. 11은 제어추의 위치 명령값을 그린 것이다.

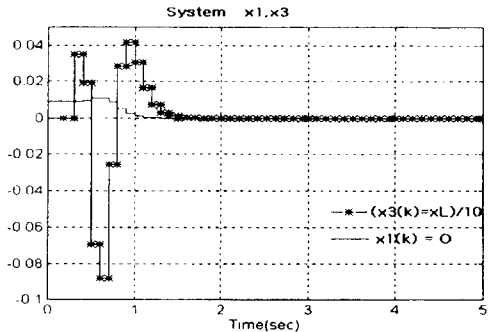


Fig. 10 Responses of  $\hat{x}_1(k)$  and  $\hat{x}_3(k)$  when initial condition is 0.5 degree

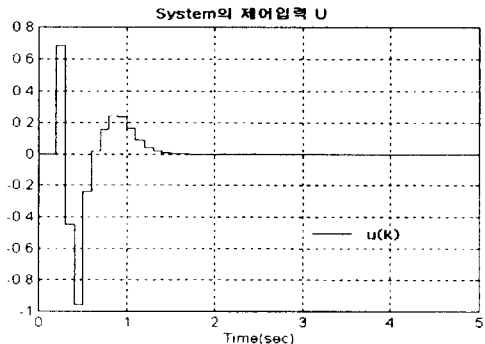


Fig. 11 Response of  $u(k)$  when initial condition is 0.5 degree

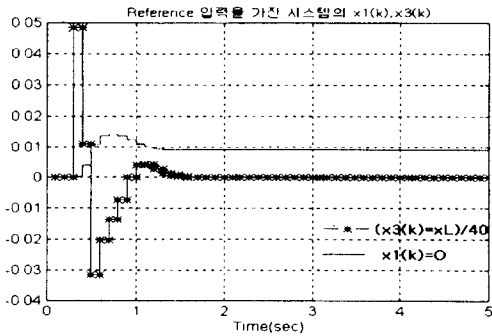


Fig. 12 Responses of  $\hat{x}_1(k)$  and  $\hat{x}_3(k)$  when reference is 0.5 degree

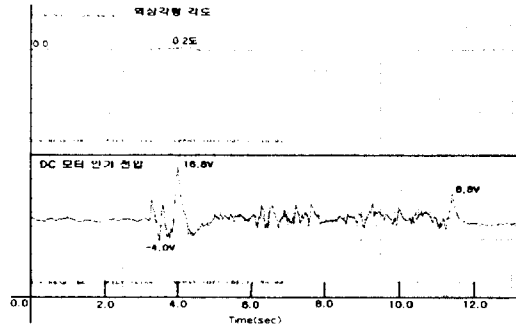


Fig. 14 Responses to a disturbance change

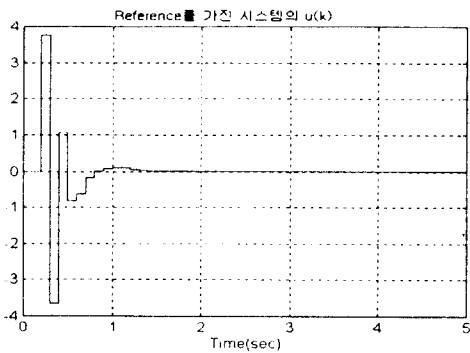


Fig. 13 Response of  $u(k)$  when reference is 0.5 degree

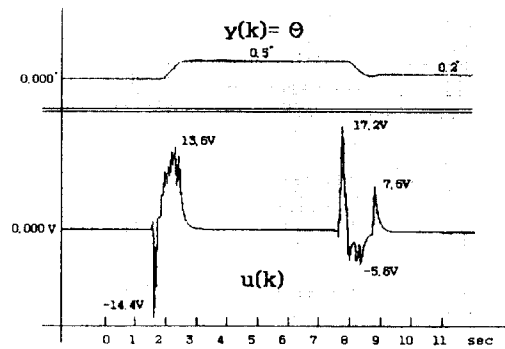


Fig. 15 Responses to reference changes

Fig. 12와 Fig. 13은 기준변위각을 0.5도로 하였을 때의 시뮬레이션으로 Fig. 12는 변위각을, Fig. 13은 제어추의 위치 명령값을 나타낸다.

### 5. 시스템의 응답 실험

Fig. 14는 실 시스템에서 초기위치를 0으로 하고 외란이 가해졌을 때의 응답실험이며 Fig. 15는 목표각을 0도에서 0.5도로, 0.5도에서 0.2도로 변화하였을 때의 각변위와 DC모터에 인가되는 전압을 그린 것이다. Fig. 14, 15에서와 같이 외란이 인가된 경우나 목표치를 변경한 경우에도 만족하게 추종하여 제어되고 있음을 알 수 있다.

### 6. 결 론

본 연구에서는 역삼각형과 같은 비선형 불안정 시스템을 선형화하여 모델링하고 상태추정자를 이용한 상태피드백제어시스템을 설계하고 구성하여 시뮬레이션과 응답실험을 통하여 원만히 제어될 수 있음을 확인하였다. 제어추 구동모터 용량의 제한과 역삼각형 크기의 제한에 의해 광범위한 각변화에 대한 응답실험을 행할 수는 없었으나, 외란이 인가되는 경우와 직립각도를 변화시키는 경우에도 원활하게 제어되는 것을 확인할 수 있었다.

본 연구에서는 한쪽 제어추만 사용하여 실험하

였으나 양쪽 제어추 모두를 사용하는 경우에는 보다 광범위한 각도변화에서도 원활히 제어될 수 있을 것으로 생각된다.

참고문헌:

- 1) Gene F. Franklin and J. David Powell, "Digital Control of Dynamic Systems", Addison Wesley, 1990
- 2) Chi-Tsong Chen, "Linear System Theory and Design", 1984, Holt, Rinehart and Winston
- 3) Benjamin C. Kuo, "Automatic Control Systems", 1996, Prentice Hall
- 4) Katsuhiko Ogata, "Modern Control Engineering", 1990, Prentice Hall
- 5) William L. Brogan, "Modern Control Theory", 1991, Prentice Hall
- 6) Katsuhiko Ogata, "Discrete Time Control Systems", 1991, Prentice Hall
- 7) Bahram, Shahian and Michael, "Control System Design Using MATLAB", 1993, Prentice Hall
- 8) Ohm社, "i8096 A. 프로그래밍", 1993, Ohm
- 9) 李注憲, "모터 제어 기술", 1996, 성안당
- 10) 河注植 劉永吳, "自動制御應用", 1994, 태화출판사
- 11) intel, "Microcontroller Handbook", Intel
- 12) 朴鎮鎬, "TURBO C 수치해석" 1996, 영진출판사