⊙ 研究論文

다관절 보의 진동해석 알고리즘 개발에 관한 연구(Ⅱ)

문덕홍* · 최명수** · 홍승수** · 강현석**

On Development of Vibration Analysis Algorithm of Beam with Multi - Joints(Ⅱ)

D. H. Moon · M. S. Choi · S. S. Hong · H. S. Kang

Key words : Transfer Influence Coefficient Method(전달영향계수법), Transfer Matrix Method(전달매트릭스법), Forced Vibration(강제진동), Coupled Vibration(연성진동), Multi - Joints Beam(다관절보)

Abstract

The authors apply the transfer influence coefficient method to the 3 - dimensional vibration analysis of beam with multi - joints and formulate a general algorithm to analyse the longitudinal, flexural and torsional coupled forced vibration.

In this paper, a structure which is mainly found in the robot arms, cranes and so on, has some crooked parts, subsystems and joints, but has no closed loop in this system. It is modeled as the beam of a distributed mass system with massless translational, rotational and torsional springs in each node, and joint elements of release or roll at node which the displacement vector is discontinuous.

The superiority of the present method to the transfer matrix method in the computation accuracy was confirmed from the numerical computation results. Moreover, we confirmed that boundary and intermediate conditions could be controlled by varying the values of the spring constants.

1. 서 론

최근, 개인용 컴퓨터가 과거의 대형계산기에 못지 않는 성능을 지니게 됨에 따라 과거의 대형 계산기에서나 가능했던 대용량의 계산까지도 개인용 컴퓨터에서 가능해지고 있다. 그러나 대형 컴퓨터용의 해석기법을 개인용 컴퓨터에 적용하는데 있어 계산정도와 계산시간 및 메모리 등이 문제점으로 되고 있다. 이로 인하여 개인용 컴퓨터에 적합한 고속 · 고정도의 구조해석 및 진동해석 알고리즘의 개발이 요망되고 있다.

이미 발표된 바 있는 진동해석 기법인 전달영향

* 부경대학교 (원고접수일 : 96년 11월)
** 부경대학교 대학원

계수법(Transfer Influence Coefficient Method ; TICM)은 동적영향계수의 축차 전달개념을 이용하는 수법으로서, 고속의 계산이 가능하고, 고차의 고유진동수를 계산해야 하는 경우와 구조물의 중간에 경탄성 지지 등이 존재하는 경우 등에 대해서도 해석 알고리즘상에 특별한 변화를 주지 않고, 고정도로 진동해석을 수행하는 것이 가능하다. 그리고, 개인용 컴퓨터에 의한 진동해석에 적합한 해석기법이라는 것이 이전의 연구[1~8]에서 보고되었다. 그리고 전달영향계수법의 유용성은 여러 구조물에 대한 자유진동해석 연구의 결과로부터 확인된 바가 있지만, 강제진동해석 기법에 대한 연구결과는 그다지 없다.

본 연구에서는 다관절 보에 대한 종 · 굽힘 · 비틀림 연성 자유진동 해석 알고리즘[8]으로부터 확장하여, 다관절 보의 강제진동 해석에 전달영향계수법의 개념을 적용해서, 응답을 구하기 위한 해석 알고리즘을 정식화한다. 이 해석 대상계는 로봇암, 공장자동화기기, 굴삭기, 공작기계, 자동차의 동력전달장치 등에서 많이 찾아볼 수 있다.

또한, 간단한 수치계산 모델을 통해서, 본 해석기법과 전달매트릭스법에 의한 수치실험 결과를 비교 검토하여 본 해석기법의 유용성 및 실용성을 보고한다.

2. 전달영향계수법에 의한 강제진동해석

2. 1 해석대상계의 모델링

해석 알고리즘의 정식화에 있어서 다음과 같은 가정을 한다.

(1) 해석 대상계는, Fig. 1과 같이, 하나의 주계(main system)에 다수의 분지계(subsystem)가 결합되어 있으나, 폐루프(closed loop)를 형성하지는 않는다.

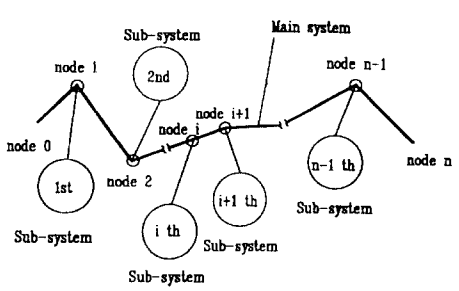


Fig. 1 Analytical model

(2) 모든 굴곡점, 분지계와의 결합점, 기초 지지점 및 중간 연결점(변위벡터의 불연속점)은 절점(node)이 되고, 절점에서는 반드시 분할한다.

(3) 분지계 자체도 또 다른 분지계나 굴곡부를 가질 수 있고, 분할 방법은 주계와 동일하다.

(4) 주계와 분지계에서 절점 사이의 부재를 각각 주부재와 분지부재라 부르고, 일정한 분포 질량을 갖는 보로 간주한다.

(5) 주계의 양쪽 끝과 분지계의 주계와 결합되어 있지 않는 반대쪽 끝은 항상 절점이 된다.

(6) 주계와 분지계 사이의 결합점과 굴곡점은 릴리스(release)나 롤(roll)과 같은 관절 요소로 간주한다.

(7) 관절에서는 내부 질량과 외부 질량이 각각 좌우측의 보에 단단히 결합되어 있고, 내부 질량과 외부 질량 사이에는 서로 직교하는 세개의 병진(전단) 스프링 및 감쇠, 두개의 회전 스프링 및 감쇠와 하나의 비틀림 스프링 및 감쇠로 연결된다.

해석 대상계의 주계는 가정(2)에 따라 n개의 주부재로 분할된다. 즉, Fig. 1에서 각각의 분할점을 좌단에서부터 우단으로 순서대로 절점 0, 1, 2,…, n이라 한다. 임의의 절점 i에서 절점 0과 절점 n을 향하는 쪽을 각각 절점 i의 좌측 및 우측이라 하고, 분지계에서는 주계와 결합되어있지 않는 쪽의 끝을 좌단, 결합되어있는 쪽의 끝을 우단이라 한다.

또한, 본 연구에서는 변위벡터 $\boldsymbol{d}$, 힘벡터 $\boldsymbol{f}$, 동적영향계수 매트릭스 $\boldsymbol{T}$, 보정벡터 $\boldsymbol{s}$등 위에 사용한 기호 및 상하 첨자에 따라 다음과 같이 구별해서 사용하고 있다.

(1) 『－』의 有無 : 절점의 좌우측의 물리량
(2) 『∧』와 『∨』 : 관절의 중간 좌우측의 물리량
(3) 『⌒』 : 기초지지요소에 관한 물리량
(4) 『～』 : 분지계에 관한 물리량
(5) 『＊』 : 주계에 직접 결합하고 있는 분지계 또는 기초지지 요소의 물리량을 분지부재 또는 기초지지 요소 좌표계로 표시한 물리량
(6) 『상첨자 i』 : i번째 기본요소인 주부재에 축을 일치시킨 직교좌표계로 표시한 물리량
(7) 『하첨자 i』 : 절점 i내지 i번째 기본요소의 주부재 및 분지계에 관한 물리량

2.2 동적영향계수 매트릭스

Fig. 2는 전달영향계수법을 적용할 경우의 기본 개념도를 나타낸다. 즉, Fig. 2 (a)의 ①은 주계의 좌단에서 임의의 절점 $i-1$의 우측까지의 구조물을 나타내고, 이 우단에 주부재, 분지부재, 기초 지지부, 굴곡부 및 관절 요소로 구성된 i번째 기본 요소를 단단하게 결합시킨다.

관절 요소내의 내부 질량 ($\bar{m}_i$)과 외부 질량(m_i) 사이에는 X, Y, Z축방향의 병진 스프링(k_{xi}, k_{yi}, k_{zi}) 및 감쇠 (c_{xi}, c_{yi}, c_{zi})가 존재하고, Y, Z축 주위의 회전 스프링(K_{yi}, K_{zi}) 및 감쇠(C_{yi}, C_{zi})와 비틀림 스프링(K_{xi}) 및 감쇠(C_{xi})로 구성되어 있고, 내부 질량과 기초 사이에도 병진, 회전, 비틀림 스프링($\hat{k}_{xi}$, $\hat{k}_{yi}$, $\hat{k}_{zi}$, $\hat{K}_{xi}$, $\hat{K}_{yi}$, $\hat{K}_{zi}$) 및 감쇠($\hat{c}_{xi}$, $\hat{c}_{yi}$, $\hat{c}_{zi}$, $\hat{C}_{xi}$, $\hat{C}_{yi}$, $\hat{C}_{zi}$)가 존재한다. 또 $\bar{J}_i$, $\bar{J}_{pi}$및 J_i, J_{pi}는 각각 관절 내외부의 관성 모멘트와 극관성 모멘트를 나타낸다. 그리고, u_i는 관절의 내부질량에 작용하는 강제력 또는 강제변위를 나타낸다.

Fig. 2(b)는 각 부재 좌표계로 표시한 절점 i의 상태변수, 즉, X축방향, Y축방향, Z축방향 변위 $(x, y, z)_i^t$, X축둘레, Y축둘레, Z축둘레 각변위$(\theta, \phi, \varphi)_i^t$, X축방향, Y축방향, Z축방향 전단력 $(f_x, f_y, f_z)_i^t$ 및 X축둘레, Y축둘레, Z축둘레 모멘트 $(M_x, M_y, M_z)_i^t$의 정방향을 나타낸다.

임의의 절점 i에서 변위벡터와 힘벡터 그리고 그 사이의 관계는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{d}_i^t = {}^t(x^R, \theta^R, y^R, \varphi^R, z^R, \phi^R, x^I, \theta^I, y^I, \varphi^I, z^I, \phi^I)_i^t$$

$$\boldsymbol{f}_i^t = {}^t(f_x^R, M_x^R, f_y^R, M_z^R, f_z^R, M_y^R, f_x^I, M_x^I, f_y^I, M_z^I, f_z^I, M_y^I)_i^t$$

$$\boldsymbol{d}_i^t = \boldsymbol{T}_i^t \bar{\boldsymbol{f}}_i^t + \boldsymbol{s}_i^t \quad (1)$$

$$\tilde{\boldsymbol{d}}_i^t = \tilde{\boldsymbol{T}}_i^t \tilde{\boldsymbol{f}}_i^t + \tilde{\boldsymbol{s}}_i^t \quad (2)$$

$$\hat{\boldsymbol{d}}_i^t = \hat{\boldsymbol{T}}_i^t \hat{\boldsymbol{f}}_i^t + \hat{\boldsymbol{s}}_i^t \quad (3)$$

$$\hat{\boldsymbol{d}}_i^t = \hat{\boldsymbol{T}}_i^t \hat{\boldsymbol{f}}_i^t + \hat{\boldsymbol{s}}_i^t \quad (4)$$

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{d}}_i^t = \overset{\vee}{\boldsymbol{T}}_i^t \overset{\vee}{\boldsymbol{f}}_i^t + \overset{\vee}{\boldsymbol{s}}_i^t \quad (5)$$

$$\boldsymbol{d}_i^t = \boldsymbol{T}_i^t \boldsymbol{f}_i^t + \boldsymbol{s}_i^t \quad (6)$$

$$\boldsymbol{d}_i^{t+1} = \boldsymbol{T}_i^{t+1} \boldsymbol{f}_i^{t+1} + \boldsymbol{s}_i^{t+1} \quad (7)$$

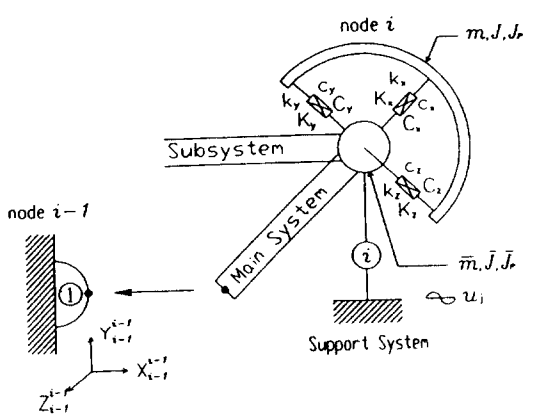
여기서, $\boldsymbol{T}_i^t$는 동적영향계수 매트릭스(12×12)이고, $\boldsymbol{s}_i^t$는 강제력 또는 강제변위로 인한 보정벡터량이고, 첨자 R, I는 요소의 실수부 및 허수부를 나타낸다.

Fig. 3에서는 오일러 각(a_a, a_b, a_c)의 정방향을 정의하고 있고, 따라서, 좌표계 $O-X_i^t Y_i^t Z_i^t$상의 단위벡터 (e_1, e_2, e_3) 및 $O-X_i^{t+1} Y_i^{t+1} Z_i^{t+1}$상의 단위벡터 (u_1, u_2, u_3)사이의 관계는 다음과 같다.

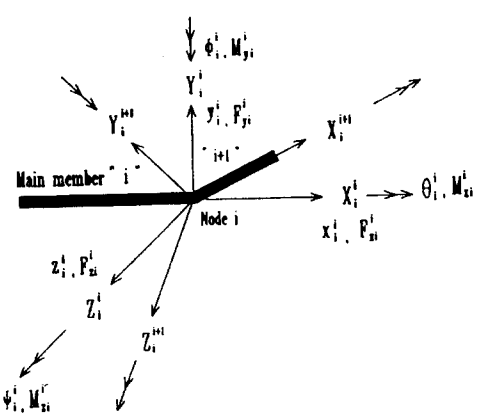
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}''(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

여기서,

$$\boldsymbol{R}'' = (\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c) \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$



(a) Convention in series connection



(b) Definition of positive direction of state variables

Fig. 2 Fundamental concept of the transfer influence coefficient method

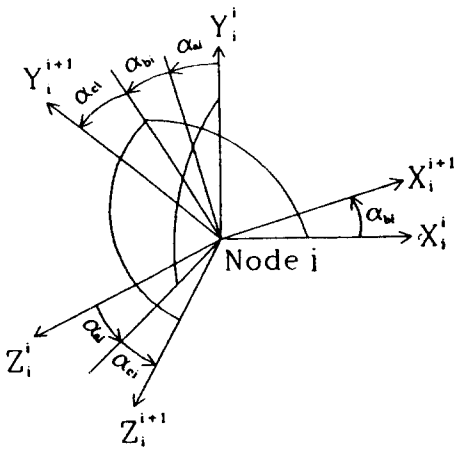


Fig. 3 Definiton of the Euler angle

$$R_{11}=\cos\alpha_b$$
$$R_{12}=\cos\alpha_a\sin\alpha_b$$
$$R_{13}=\sin\alpha_a\sin\alpha_b$$
$$R_{21}=-\sin\alpha_b\cos\alpha_c$$
$$R_{22}=\cos\alpha_a\cos\alpha_b\cos\alpha_c-\sin\alpha_a\sin\alpha_c$$
$$R_{23}=\sin\alpha_a\cos\alpha_b\cos\alpha_c+\cos\alpha_a\sin\alpha_c$$
$$R_{31}=\sin\alpha_b\sin\alpha_c$$
$$R_{32}=-\cos\alpha_a\cos\alpha_b\sin\alpha_c-\sin\alpha_a\cos\alpha_c$$
$$R_{33}=-\sin\alpha_a\cos\alpha_b\sin\alpha_c+\cos\alpha_a\cos\alpha_c$$

가 되고, 절점 i에 있어서, $i+1$번째 주부재 좌표계와 i번째 주부재 좌표계에 대한 상태벡터 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{d}_i^{i+1}=\boldsymbol{R}(\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c)_i\,\boldsymbol{d}_i^i$$
$$\boldsymbol{f}_i^{i+1}=\boldsymbol{R}(\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c)_i\,\boldsymbol{f}_i^i \qquad (8)$$

여기서, $\boldsymbol{R}(\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c)_i$는 좌표변환 매트릭스로서, 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{R}_i=diag(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{R}')_i$$
$$\boldsymbol{R}'(\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c)_i$$
$$=\begin{bmatrix} R_{11} & 0 & R_{12} & 0 & R_{13} & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & R_{13} & 0 & -R_{12} \\ R_{21} & 0 & R_{22} & 0 & R_{23} & 0 \\ 0 & R_{31} & 0 & R_{33} & 0 & -R_{32} \\ R_{31} & 0 & R_{32} & 0 & R_{33} & 0 \\ 0 & -R_{21} & 0 & -R_{23} & 0 & R_{22} \end{bmatrix}$$

또한, $\boldsymbol{R}(\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c)_i$는 다음과 같은 성질이 있다.

$$[\boldsymbol{R}(\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c)_i]^{-1}={}^t\boldsymbol{R}(\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c)_i$$
$$=\boldsymbol{R}(-\alpha_c,-\alpha_b,-\alpha_a)_i \qquad (9)$$

따라서, (1)~(7) 및 (8), (9)식으로부터, 절점 i와 $i+1$에서의 동적영향계수 매트릭스 및 보정벡터 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{T}_i^{i+1}=\boldsymbol{R}(\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c)_i\,\boldsymbol{T}_i^i\,{}^t\boldsymbol{R}(\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c)_i$$
$$\boldsymbol{s}_i^{i+1}=\boldsymbol{R}(\alpha_a,\alpha_b,\alpha_c)_i\,\boldsymbol{s}_i^i \qquad (10)$$

2.3 동적영향계수 매트릭스의 전달

동적영향계수 매트릭스의 필드 전달식은 종래의 전달매트릭스법[9]에서 사용되는 필드 전달 매트릭스를 변형시켜 유도한다.

$$\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{d}}\\ \bar{\boldsymbol{f}}\end{bmatrix}_i^l=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{f}\end{bmatrix}_{i-1}^i \qquad (11)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{f}\end{bmatrix}_{i-1}^i=\begin{bmatrix}{}^t\boldsymbol{D} & -{}^t\boldsymbol{B}\\ -{}^t\boldsymbol{C} & {}^t\boldsymbol{A}\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{d}}\\ \bar{\boldsymbol{f}}\end{bmatrix}_i^l \qquad (12)$$

여기서, $\boldsymbol{A}_i$, $\boldsymbol{B}_i$, $\boldsymbol{C}_i$ 및 $\boldsymbol{D}_i$는 일정한 등분포 질량을 갖는 보 요소의 부분 매트릭스(12×12)이며, 이들 요소가 오일러 보(Euler beam)인 경우 다음식으로 주어진다.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A''^R & -A''^I\\ A''^I & A''^R\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}B''^R & -B''^I\\ B''^I & B''^R\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}C''^R & -C''^I\\ C''^I & C''^R\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}D''^R & -D''^I\\ D''^I & D''^R\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{A}''=diag(\cos\gamma,\cos\beta_T,\boldsymbol{A}',\boldsymbol{A}')$$
$$\boldsymbol{B}''=diag(l\sin\gamma/(\gamma EA),\,l\sin\beta_T/\beta_T GI_p,\boldsymbol{B}',\boldsymbol{B}')$$
$$\boldsymbol{C}''=diag(-\mu l\omega^2\sin\gamma/\gamma,\,-\mu l j_x^2\omega^2\sin\beta_T/\beta_T,\boldsymbol{C}',\boldsymbol{C}')$$
$$\boldsymbol{D}''=diag(\cos\gamma,\cos\beta_T,\boldsymbol{D}',\boldsymbol{D}')$$
$$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}C_0 & lC_1\\ \beta^4C_3/l & C_0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}'=\begin{bmatrix}-alC_3 & aC_2\\ -aC_2 & aC_1/l\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-\beta^4C_1/al & -\beta^4C_2/a\\ \beta^4C_2/a & \beta^4lC_3/a\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{D}'=\begin{bmatrix}C_0 & -\beta^4C_3/l\\ -lC_1 & C_0\end{bmatrix}$$
$$C_0=(\cosh\beta+\cos\beta)/2,\qquad C_1=(\sinh\beta+\sin\beta)/2\beta$$
$$C_2=(\cosh\beta-\cos\beta)/2\beta^2,\qquad C_3=(\sinh\beta-\sin\beta)/2\beta$$

$$a = l^2 / E_c I, \qquad \beta^4 = \mu a l^2 \omega^2$$
$$\gamma = l\omega(\mu / E_c A)^{1/2}, \qquad j_x^{\,2} = I_p / A$$
$$\beta_T = l\omega\sqrt{\mu j_x^{\,2} / G_c I_p}$$
$$E_c = E(1+i\eta)$$
$$G_c = G(1+i\eta)$$

여기서, η는 구조 감쇠계수, E_cA, E_cI, G_cI_p는 구조 감쇠가 포함된 종강성, 굽힘강성, 비틀림강성, μ, l은 선밀도, 길이이며, ω는 각진동수이다. 또한, 보요소를 티모센코 보(Timoshenko beam)[9]로 간주할 경우에는 상기의 부분 매트릭스의 요소가 다른 것을 제외하고는 알고리즘이 완전히 일치한다.

우선 절점 $i-1$의 우측과 절점 i의 좌측간의 동적영향계수 매트릭스의 전달식은 식 (1), (7), (12)로부터,

$$\boldsymbol{U}_i^{\,l}\,\bar{\boldsymbol{T}}_i^{\,l} = \boldsymbol{H}_i^{\,l}$$
$$\boldsymbol{U}_i^{\,l}\,\bar{\boldsymbol{s}}_i^{\,l} = \boldsymbol{s}_{i-1}^{\,l} \qquad (13)$$

여기서,

$$\boldsymbol{U}_i^{\,l} = {}^{t}\boldsymbol{D}_i + \boldsymbol{T}_{i-1}^{\,l}\,{}^{t}\boldsymbol{C}_i$$
$$\boldsymbol{H}_i^{\,l} = {}^{t}\boldsymbol{B}_i + \boldsymbol{T}_{i-1}^{\,l}\,\boldsymbol{A}_i \qquad (14)$$

이다.

i 번째 관절의 좌측과 중간 좌측간의 힘의 평형관계로부터,

$$\bar{\boldsymbol{f}}_i^{\,l} + \tilde{\boldsymbol{f}}_i^{\,l} + \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\,l} = \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\,l} + \boldsymbol{q}_i^{\,l} \qquad (15)$$
$$\tilde{\boldsymbol{f}}_i^{\,l} = (\tilde{\boldsymbol{T}}_i^{\,l})^{-1}(\tilde{\boldsymbol{d}}_i^{\,l} - \tilde{\boldsymbol{s}}_i^{\,l}) = \tilde{\boldsymbol{P}}_i^{\,l}(\tilde{\boldsymbol{d}}_i^{\,l} - \tilde{\boldsymbol{s}}_i^{\,l}) \qquad (16)$$
$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\,l} = \hat{\boldsymbol{P}}_i^{\,l}(\hat{\boldsymbol{d}}_i^{\,l} - \boldsymbol{b}_i^{\,l}) \qquad (17)$$

여기서,

$$\bar{\boldsymbol{d}}_i^{\,l} = \tilde{\boldsymbol{d}}_i^{\,l} = \hat{\boldsymbol{d}}_i^{\,l}$$
$$\tilde{\boldsymbol{P}}_i^{\,l} = (\tilde{\boldsymbol{T}}_i^{\,l})^{-1} = \tilde{\boldsymbol{R}}_i(\tilde{\boldsymbol{T}}_i^{*})^{-1}\,{}^{t}\tilde{\boldsymbol{R}}_i$$
$$\hat{\boldsymbol{P}}_i^{\,l} = \hat{\boldsymbol{R}}_i(\hat{\boldsymbol{P}}_i^{*})^{-1}\,{}^{t}\hat{\boldsymbol{R}}_i, \quad \boldsymbol{b}_i^{\,l} = \hat{\boldsymbol{R}}_i\,\boldsymbol{b}_i^{*}$$
$$\hat{\boldsymbol{P}}_i^{*} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{P}}_K - \hat{\boldsymbol{P}}_M & -\hat{\boldsymbol{P}}_C \\ \hat{\boldsymbol{P}}_C & \hat{\boldsymbol{P}}_K - \hat{\boldsymbol{P}}_M \end{bmatrix}_i^{*}$$
$$\hat{\boldsymbol{P}}_K = diag(\hat{k}_x, \hat{K}_x, \hat{k}_y, \hat{K}_z, \hat{k}_z, \hat{K}_y)$$
$$\hat{\boldsymbol{P}}_C = diag(\hat{C}_x\omega, \hat{C}_x\omega, \hat{C}_y\omega, \hat{C}_z\omega, \hat{C}_y\omega)$$
$$\hat{\boldsymbol{P}}_M = diag(\bar{m}_x\omega^2, \bar{J}_x\omega^2, \bar{m}_y\omega^2, \bar{J}_z\omega^2, \bar{m}_z\omega^2, \bar{J}_y\omega^2)$$
$$\boldsymbol{q}_i^{\,l} = {}^{t}(q_x^R, q_\theta^R, q_y^R, q_\phi^R, q_z^R, q_\phi^R, q_x^l, q_\theta^l, q_y^l, q_\phi^l, q_z^l, q_\phi^l)_i$$
$$\boldsymbol{b}_i^{\,l} = {}^{t}(b_x^R, b_\theta^R, b_y^R, b_\varphi^R, b_z^R, b_\phi^R, b_x^l, b_\theta^l, b_y^l, b_\phi^l, b_z^l, b_\phi^l)_i$$

$\boldsymbol{q}_i^{\,l}$, $\boldsymbol{b}_i^{\,l}$는 강제력 및 강제변위의 진폭벡터이다.

따라서, 관절 i의 좌측과 중간 좌측간의 동적영향계수 매트릭스의 전달식은 (1), (2), (4), (15)로부터,

$$\boldsymbol{G}_i^{\,l}\,\hat{\boldsymbol{T}}_i^{\,l} = \bar{\boldsymbol{T}}_i^{\,l}$$
$$\boldsymbol{G}_i^{\,l}\,\hat{\boldsymbol{s}}_i^{\,l} = \bar{\boldsymbol{T}}_i^{\,l}(\tilde{\boldsymbol{P}}_i^{\,l}\,\tilde{\boldsymbol{s}}_i^{\,l} + \hat{\boldsymbol{P}}_i^{\,l}\,\boldsymbol{b}_i^{\,l} + \boldsymbol{q}_i^{\,l}) + \bar{\boldsymbol{s}}_i^{\,l} \qquad (18)$$

단, $\boldsymbol{G}_i^{\,l} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_i^{\,l}\,(\tilde{\boldsymbol{P}}_i^{\,l} + \hat{\boldsymbol{P}}_i^{\,l}))$이고, $\boldsymbol{I}$는 12×12의 매트릭스이다.

관절 i의 중간 좌우측간의 힘의 평형관계로부터,

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\,l} = \check{\boldsymbol{f}}_i^{\,l} = \hat{\boldsymbol{P}}_i^{\,l}(\check{\boldsymbol{d}}_i^{\,l} - \hat{\boldsymbol{d}}_i^{\,l}) \qquad (19)$$

여기서,

$$\hat{\boldsymbol{d}}_i^{\,l} = \check{\boldsymbol{d}}_i^{\,l}, \ \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\,l} = \check{\boldsymbol{f}}_i^{\,l}, \ \check{\boldsymbol{d}}_i^{\,l} = \boldsymbol{d}_i^{\,l}$$
$$\hat{\boldsymbol{P}}_i^{\,l} = \begin{bmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix}_i^{\,l}$$
$$\boldsymbol{P}_K = diag(k_x, K_x, k_y, K_z, k_z, K_y)$$
$$\boldsymbol{P}_C = diag(c_x\omega, C_x\omega, c_y\omega, C_z\omega, c_z\omega, C_y\omega)$$

관절 i의 중간 좌우측간의 동적영향계수 매트릭스의 전달식은 식(4), (5), (19)으로부터,

$$\hat{\boldsymbol{P}}_i^{\,l}\,\check{\boldsymbol{T}}_i^{\,l} = (\boldsymbol{I} + \hat{\boldsymbol{P}}_i^{\,l}\,\hat{\boldsymbol{T}}_i^{\,l}), \quad \check{\boldsymbol{s}}_i^{\,l} = \hat{\boldsymbol{s}}_i^{\,l} \qquad (20)$$

그리고, 관절 i의 중간 우측과 우측간의 힘의 평형관계로부터,

$$\check{\boldsymbol{f}}_i^{\,l} + \boldsymbol{P}_i^{\,l}\,\boldsymbol{d}_i^{\,l} = \boldsymbol{f}_i^{\,l} \qquad (21)$$

여기서,

$$\boldsymbol{P}_i^{\,l} = \begin{bmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{bmatrix}_i^{\,l}$$
$$\boldsymbol{P}_M = diag(m_x\omega^2, J_x\omega^2, m_y\omega^2, J_z\omega^2, m_z\omega^2, J_y\omega^2)$$

따라서, 식(5), (6), (21)로부터

$$\boldsymbol{G}_i^{\,l}\,\boldsymbol{T}_i^{\,l} = \check{\boldsymbol{T}}_i^{\,l}, \quad \boldsymbol{G}_i^{\,l}\,\boldsymbol{s}_i^{\,l} = \check{\boldsymbol{s}}_i^{\,l} \qquad (22)$$

여기서, $\boldsymbol{G}_i^{\,l} = \boldsymbol{I} + \check{\boldsymbol{T}}_i^{\,l}\,\boldsymbol{P}_i^{\,l}$이다.

본 해석 기법은 시작단 즉, 절점0에서의 동적영향계수 매트릭스와 보정벡터 $\boldsymbol{T}_0^0$, $\boldsymbol{s}_0^0$를 먼저 구해서 최종단까지 전달시켜야 하지만 질량 및 관성 모멘트가 없는 경우에는 이를 구할수 없는 경우가 있기 때문에 알고리즘을 일반화하기위하여 $\bar{\boldsymbol{T}}_1^{\,1}$, $\bar{\boldsymbol{s}}_1^{\,1}$을 직접 구한다.

계의 좌단은 자유이기 때문에 $\bar{f}_0=0$이고, 첫번째 주부재 좌표계로 표시한 좌단에서의 힘의 평형 관계식은 다음과 같다.

$$\hat{f}_0^1=f_0^1+q_0^1 \tag{23}$$

식 (23)에 식 (7), (17)을 대입하여 정리하면,

$$\hat{P}_0^1 T_0^1=I$$
$$\hat{P}_0^1 s_0^1=(\hat{P}_0^1 b_0^1+q_0^1) \tag{24}$$

다시, 식 (13)의 양변에
$\hat{P}_0^1$을 곱해서 식(24)를 대입하면 다음과 같다.

$$U_1^1 \bar{T}_1^1=H_1^1$$
$$U_1^1 \bar{s}_1^1=\hat{P}_0^1 b_0^1+q_0^1 \tag{25}$$

여기서,

$$U_1^1=\hat{P}_0^1 {}^1D_1+{}^1C_1$$
$$H_1^1=\hat{P}_0^1 {}^1B_1+{}^1A_1 \tag{26}$$

계의 우단(절점 n)에서는 동적영향계수 매트릭스 T_i^i와 보정벡터 s_i^i가 1~n까지 전달되어 계산된 값들을 이용하여 $\bar{d}_i^i$, d_i^i와 $\bar{f}_i^i$, $\check{f}_i^i$, f_i^i를 우단에서 좌단까지 역으로 계산한다. 우단의 경계조건은 스프링지지로 가정하므로 항상 자유($f_n^n=0$)이다. 따라서, 식 (6)으로부터 $d_n^n=s_n^n$을 얻는다.

d_i^i 및 f_i^i가 기지의 값일 때 식 (21), (19), (15), (12), (7)으로부터 $\check{f}_i^i$, $\bar{d}_i^i$, $\bar{f}_i^i$, f_{i-1}^i, d_{i-1}^i를 구한다. 좌단에서는 T_0^0, s_0^0를 구하지 않았기때문에 식 (12)로부터 d_0^1 구한다.

3. 수치계산 결과

본 연구에서는 다수의 굴곡부나 분지계 또는 관절 요소를 갖는 구조물을 해석 대상계로 하여, 종 · 굽힘 · 비틀림 연성 강제진동을 해석하기 위한 알고리즘을 정식화하였다. 이를 검증하기 위하여 종래의 전달매트릭스법에 의한 알고리즘도 정식화해서, 간단한 수치 계산 모델에 대해 수치실험을 행하고, 자유진동과도 비교 · 검토하였다.

Fig. 4는 수치 계산 모델을 나타내고, ⊙는 관절 요소를 의미한다. 또한, 그림속의 O - $X^1Y^1Z^1$ 좌표계는 1번 주부재의 좌표계를 나타내고, 2, 3, 4, 5,

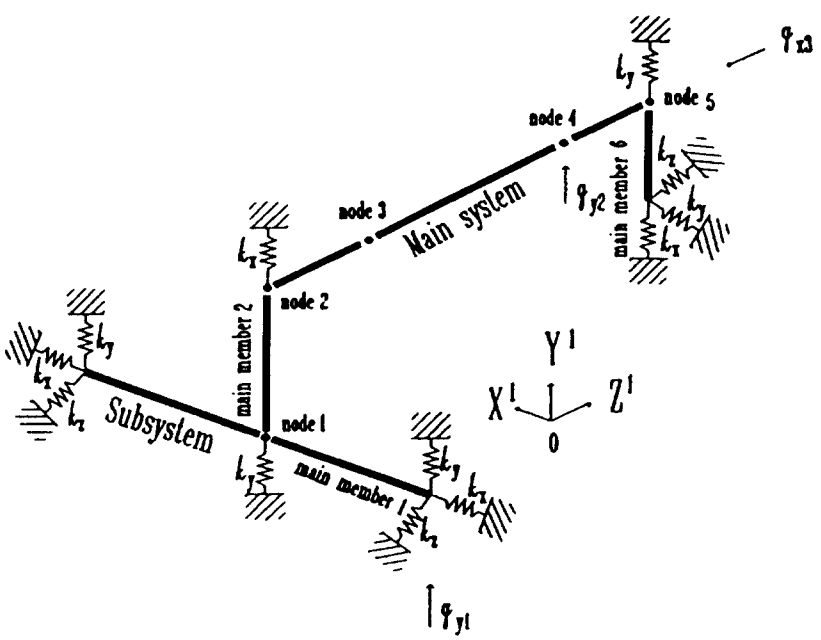
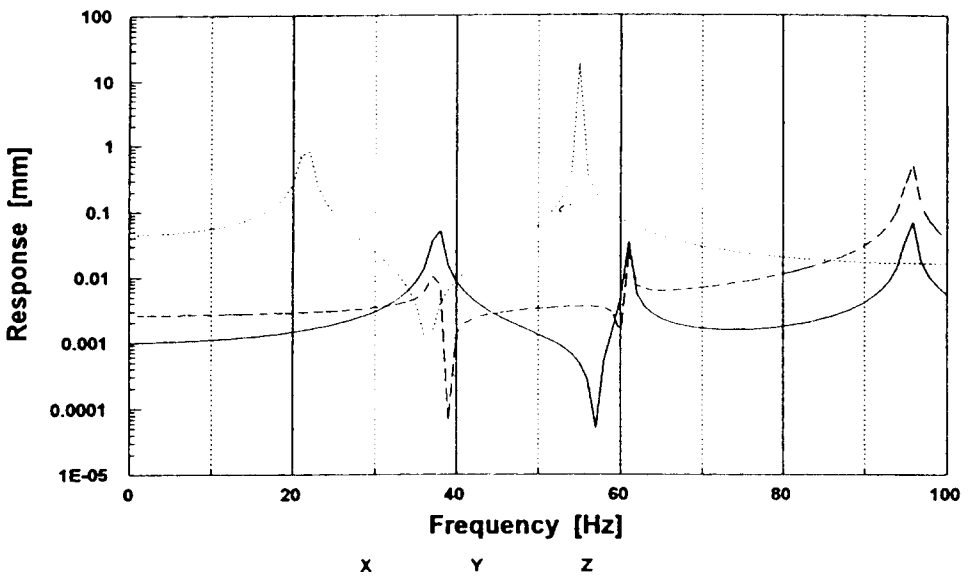


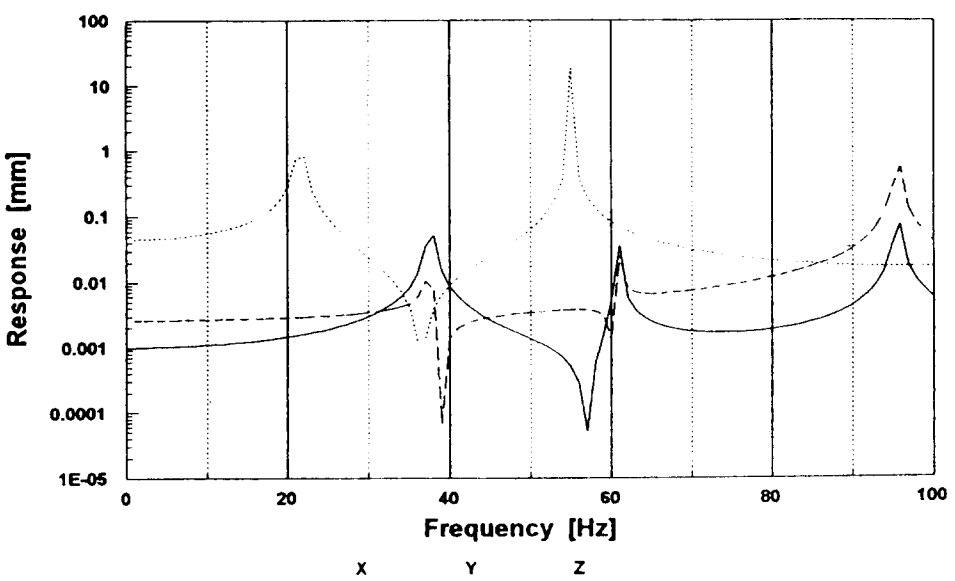
Fig. 4 Numerical computational model

6번 주부재 및 분지부재 좌표는 X축이 보의 길이 방향과 일치하도록 국부좌표계로 좌표변환해서 나타낸 것이다. 스프링의 지지 조건(단, 모든 기초 지지 회전 및 비틀림 스프링 상수, 감쇠상수는 0으로 처리)에 따라 모델을 나누면,

<모델 1> 절점 2, 5가 연속인 보
($\hat{k}_x=\hat{k}_y=\hat{k}_z=\hat{K}_x=\hat{K}_y=\hat{K}_z=\infty$)



(a) TMM



(b) TICM

Fig. 5 Frequency - response curve of model 1

$q_{y1}=100\text{N}, q_{y2}=q_{x3}=0N$

<모델 2> 절점 2,5가 일정한 스프링력을 갖는 보
$(\hat{k}_x=\hat{k}_y=\hat{k}_z=\infty, \hat{K}_x=\hat{K}_y=\hat{K}_z=20Nm/rad)$
$q_{y1}=q_{y2}=q_{x3}=100N$

<모델 3> 절점 2, 5가 릴리스 구조인 보
$(\hat{k}_x=\hat{k}_y=\hat{k}_z=\infty, \hat{K}_x=\hat{K}_y=\hat{K}_z=0)$
$q_{y1}=q_{y2}=q_{x3}=100\text{N}$

여기서, 절점 1, 3, 4는 항상 연속이다. 그리고, 각 부재는 직경 20mm의 강제 원형중실축(밀도 $\rho=7.86\times10^3 kg/m^3$, 종탄성계수 $E=2.06\times10^{11}\ N/m^2$, 횡탄성계수 $G=7.92\times10^{10}N/m^2$, 첫번째, 두번째, 네번째 주부재와 분지부재의 길이는 400mm, 세번째, 다섯번째, 여섯번째 주부재는 200mm이다. 또한, 주부재와 분지부재 사이 및 주부재의 연결부의 회전각은 90°이고, 구조감쇠는 없는 것으로 하며, 각 부재는 분포 질량을 갖는 보로 간주한다. 여기서, 응답점은 절점 3으로 하고, 응답의 출력 범위는 1~100Hz이며, 그 간격은 1Hz로 한다. 그리고, 특별한 언급이 없는한 계산은 퍼스널 컴퓨터로 하였다.

Fig. 5는 모델 1을 오일러 보로 가정하고, 기초 지지 병진 스프링 상수 $k=10^6N/m$이고, 절점 0에서 Y축 방향으로 진폭 100N으로 가진한 경우의 응답선도이다. 실제 계산시 관절 요소에 대한 연속체로서의 처리는 관절 내부의 스프링 상수에 각각 ∞의 값을 대입함으로써 연속 조건에 대응시켰다. 여기서 ∞의 값은 10^{20}을 수치상의 무한대로 간주하였다.

그리고, Table 1은 전달영향계수법(TICM)과 전달매트릭스법(TMM)의 자유진동해석 알고리즘으로부터 고유진동수의 계산 결과를 나타낸 것이다[8]. 여기서, Table 1의 고유진동수와 응답선도의 공진주파수가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한, Fig. 5(a) TMM과 (b) TICM의 응답의 결과가 아주 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Table 1 Natural frequency(Hz) for model 1 at $k=10^6N/m$(Euler beam)

No.	TMM	TICM
1	21.546333	21.546333
2	37.595080	37.595080
3	54.980074	54.980074
4	60.849617	60.849617
5	95.674764	95.674764

관절 요소 내부에 일정한 스프링력을 갖는 모델 2에 대한 계산 결과를 Fig. 6에 나타내었다. 기초 지지 병진 스프링 상수 $k=10^9N/m$이고, 절점 0의 Y축 방향, 절점 4의 Y축 방향, 절점 5의 X축 방향으로 진폭 100N으로 조화가진한 경우의 응답선도이다. 모델 1의 경우와 같이 TICM 및 TMM에 의한 계산 결과가 잘 일치하고 있다. 그러나, TMM의 경우, 회전스프링 상수가 0(약 $10Nm/rad$미만)에 근접하는 비교적 작은 값을 갖는 경우에는 수치계산상의 문제점을 일으킨다. 이것은 모델의 종류, 기초 지지 조건, 응답점의 위치, 주파수 범위 등과 같은 요인이 복합적으로 작용해서 일어날 수 있다.

릴리스의 관절 요소가 존재하는 모델 3에 대한 계산 결과를 Fig. 7에 나타내었다. 관절 요소에 대해 내부의 병진 스프링 상수에 각각 ∞의 값을, 회전 스프링 상수에 각각 0에 가까운 값을 대입하였다.

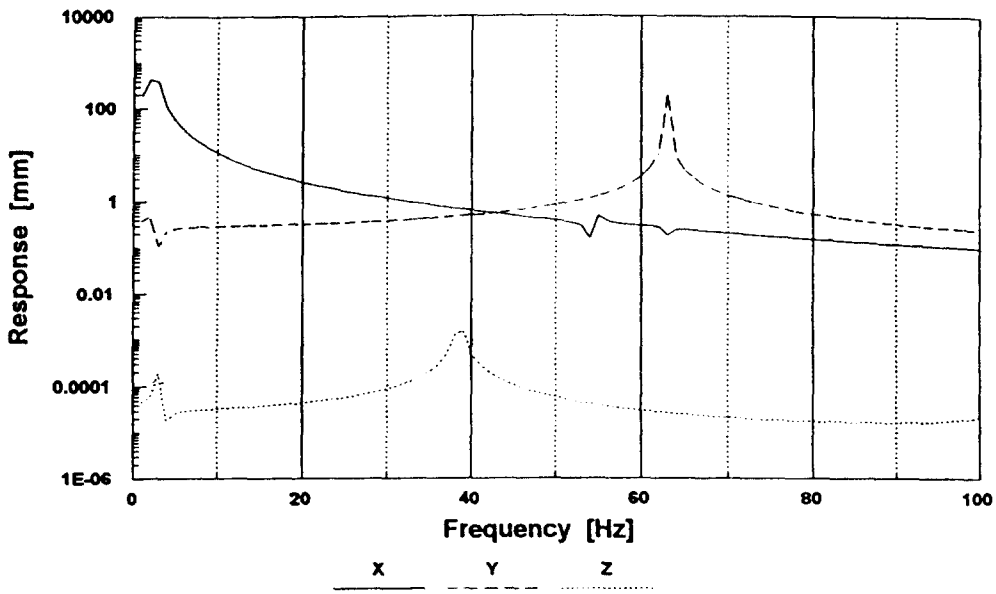
Fig. 7에서 알 수 있듯이 TICM의 경우는 응답이 문제없이 얻어지고, 공진주파수도 잘 대응하고 있으나, TMM의 응답은 수치계산상의 문제가 있음을 알 수 있다. 이것은 관절 좌측에서 우측으로 상태벡터를 전달해가는 과정에서 관절 내부의 회전 스프링 상수가 작을 경우, 그 역수값이 커지므로 마치 경탄성 지지조건과 같은 수치 계산상의 불균형을 일으켜 문제가 발생하는 것으로 생각된다.

한편, 지면 관계상 여기에 제시하지는 않았지만, 계산정도를 확인하기 위하여 슈퍼컴퓨터로 똑같은 계산을 수행하여 본 결과, 관절 내부의 회전 스프링 상수 값이 $10^{-5}Nm/rad$ 이상인 경우에는 TMM과 TICM의 응답이 비교적 잘 일치하나, 10^{-5} Nm/rad 이하의 회전 스프링 상수 값을 갖는 경우에는 슈퍼컴퓨터로부터 얻은 TMM의 응답 역시 수치 계산상에 문제를 일으킴을 확인하였다.

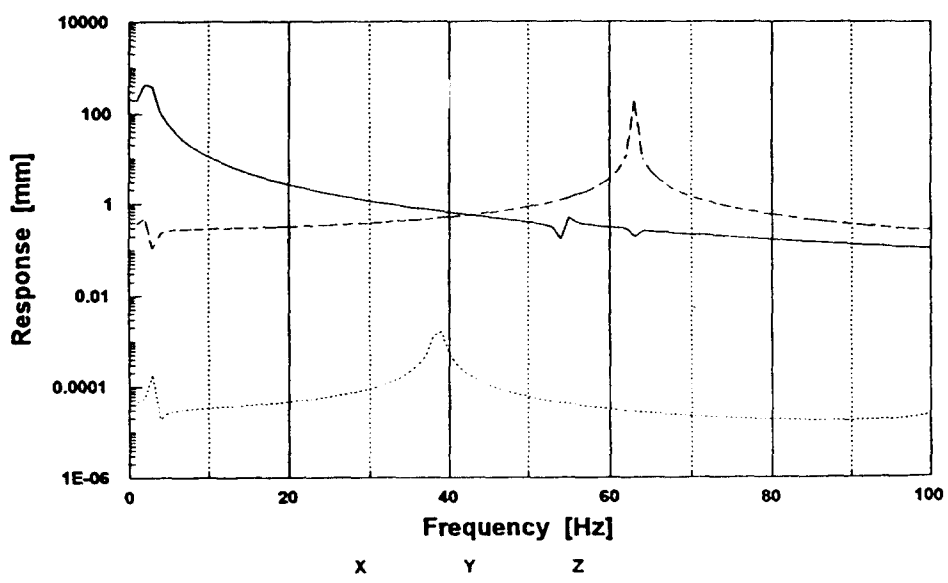
이것으로, TICM이 TMM보다 계산 정도가 우수하다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

전달영향계수법에 의한 다관절 보의 강제진동



(a) TMM

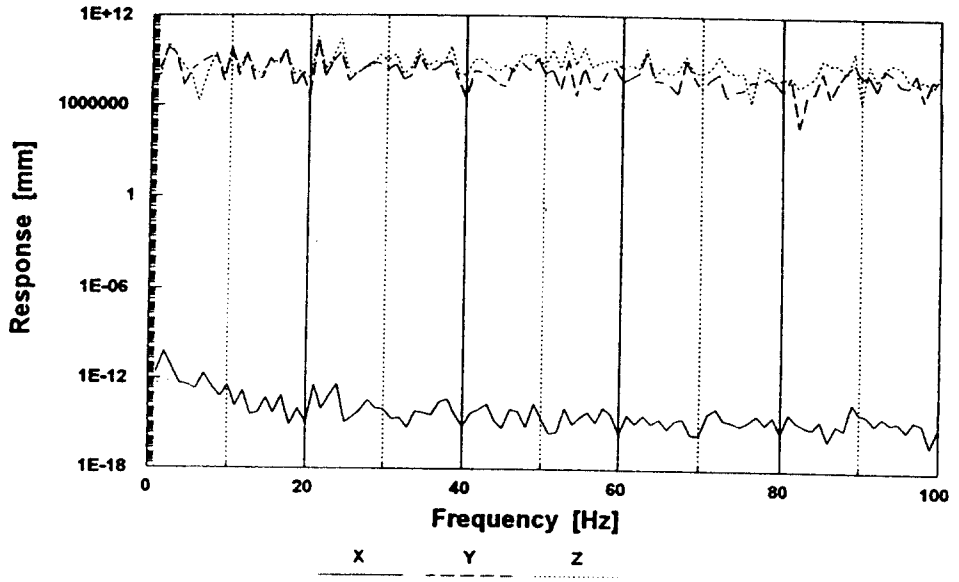


(b) TICM

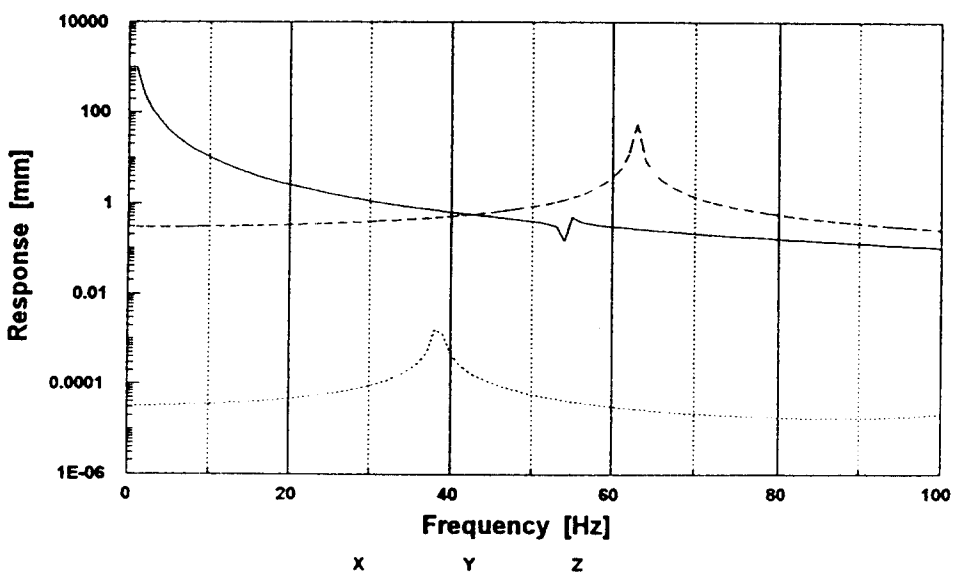
Fig. 6 Frequency - response curve of model 2

해석 알고리즘을 정식화하였고, 자유진동해석 결과 및 전달매트릭스법에 의한 결과와 비교하여, 본 해석기법의 신뢰성을 확인하였다.

일반적으로 사용되는 종래의 전달매트릭스법은 다관절 보와 같은 구조물 해석에 부적합함을 확인할 수 있었다. 만일, 위와 같은 문제를 해결하려 한다면 알고리즘이 매우 복잡해져서 전달매트릭스법의 장점인 알고리즘의 간편성을 잃어버리게 된다.



(a) TMM



(b) TICM

Fig. 7 Frequency - response curve of model 3

그러나, 전달영향계수법의 경우에는 구조물의 임의의 절점에서 변위벡터가 불연속성을 갖더라도 중간 연결 스프링 상수값 또는 감쇠계수 값만을 적절히 바꿈으로서 간단히 대응시킬 수 있고, 구조물의 기초지지가 경탄성 지지일지라도 기본적인 알고리즘의 변경없이 기초지지 조건에 대응시킬 수 있을 뿐만 아니라, 전달매트릭스법보다 행렬의 크기가 작으므로 계산량이 줄어들어 계산속도면

에서도 우수함을 알 수 있다.

후 기

본 연구는 1995년도 교육부 학술연구조성비(기계공학 ME95-D-06)의 지원을 받아 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드린다.

참고문헌

1) A. Sueoka, T. Kondou, D. H. Moon, and K. Yamashita, 1988, "A Method of Vibrational Analysis Using a Personal Computer - A Suggested Transfer Influence Coefficient Method", The Memoirs of the Faculty of Engineering Kyushu University, 48(1), 31~46.

2) 近藤, 末岡, 文, 綾部, 1990, "變形傳達影響係數法による可變パラメータ系の自由振動解析(變斷面ばりに對する定式化)", 日本機械學會論文集, 56卷, 522(C編), pp.284~291.

3) 近藤, 末岡, 安田, 文, 1991, "傳達影響係數法による樹狀構造物の自由振動解析(第1報, 二次元樹狀構造物に對する定式化)", 日本機械學會論文集, 57卷, 536(C編), pp.1091~1098.

4) 文, 末岡, 近藤, 呂, 1991, "傳達影響係數法에 의한 원판구조물의 自由振動解析", 대한기계학회 논문집, 15(5), 1439~1446

5) 문, 여, 1993, "傳達影響係數法에 의한 사각형 평판 구조물의 自由振動解析", 대한기계학회논문집, 17(3), 559~567

6) 문, 여, 1994, "傳達影響係數法에 의한 彈性支持를 갖는 원통형 쉘구조물의 自由振動解析", 한국소음진동공학회지, 4(4), 469~478

7) 문, 여, 1996, "보강재를 갖는 원통쉘 구조물의 진동해석 알고리즘의 개발에 관한 연구", 한국소음진동공학회지, 6(4), 481~491

8) 문, 여, 최, 1994, "다관절 보의 진동해석 알고리즘의 개발에 관한 연구", 한국박용기관학회지, 18(5), 544~553

9) E. C. Pestel and F.A.Leckie, 1963, "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw-hill