

웨이브 와셔 스프링의 비선형성에 관한 연구

이 수 중* · 왕 지 석**

A Study on the non - linearity of wave washer spring

S. J. Lee · J. S. Wang

Key words : mountain(마루), valley(골), plate analysis(판해석), step by step method(단계법), local coordinates system(국소좌표계), global coordinates system(중앙좌표계), transformation matrix(변환행렬), in - plane displacement(평판내 변위), transverse displacement(가로변위), free length(자유길이)

Abstract

The wave washer springs are expected to behave non - linearly between forces and displacements due to contractions of the height and due to expansions in radial direction. To find out the non - linearity of wave washer springs, the three dimensional plate analysis theory using the finite element method is adopted in this paper. The wave washer springs are considered to be three dimensional plate structures rather than frame structures, because their thickness is normally much smaller than their width.

The displacements of nodal points due to small increment of force are calculated by the finite element method and the calculated nodal displacements are added to X - Y - Z coordinates of nodal points. The new stiffness matrix of the system using the new coordinates of nodal points is adopted to calculate the another nodal displacements, that is, the step by step method is used in this paper.

The relations between the increments of forces and displacements in each step are recorded and plotted in chart.

The experimental results are compared with the calculated chart and it is shown that there are good coincidences between measured values and calculated ones.

* 부경대학교 (원고접수일 : 96년 9월 7일)

** 한국해양대학교

기호설명

D_{12}	: 절점 1과 절점 2사이의 거리
D_{p3}	: 점 p 와 절점 3사이의 거리
$\{F\}$: 중앙좌표계에서 요소의 하중벡터
$\{f\}$: 국소좌표계에서 요소의 하중벡터
$[K]$: 중앙 좌표계로 표시한 요소의 강성행렬
$[k]$: 국소좌표계에서 요소의 강성행렬
L_x, M_x, N_x	: 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 에서 국소좌표계의 x 축에 대한 방향여현
L_y, M_y, N_y	: 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 에서 국소좌표계의 y 축에 대한 방향여현
L_z, M_z, N_z	: 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 에서 국소좌표계의 z 축에 대한 방향여현
$q_1, q_2, q_3 \dots$: 절점변위
$\{Q\}$: 중앙좌표계에서 요소의 절점 변위 벡터
$\{q\}$: 국소좌표계에서 절점 변위 벡터
w	: 요소내의 임의 점(x, y)에서의 두께방향 변위
$X-Y-Z$: Global coordinates system
X_1, Y_1, Z_1	: 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 에서 절점 1의 좌표
X_2, Y_2, Z_2	: 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 에서 절점 2의 좌표
X_3, Y_3, Z_3	: 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 에서 절점 3의 좌표
X_p, Y_p, Z_p	: 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 에서 점 p 의 좌표
$x-y-z$: Local coordinates system
$x'-y'-z'$: Local coordinates system
$[\lambda]$: 요소의 강성행렬과 하중벡터의 변환행렬
$[\lambda_1]$: 중앙좌표계와 국소좌표계의 변환행렬

1. 서 론

왕복식 공기 압축기의 토출밸브와 흡입밸브에서 밸브 본체와 스프링의 파손 사고가 종종 보고

되고 있는데 이는 최근의 왕복식 공기 압축기가 전 동기 직결식으로 되어 분당 회전수가 높으므로 밸브 본체와 스프링의 진동에 기인 된다고 추측하고 있다.

따라서 밸브의 설계시 밸브의 스프링으로 쓰이는 웨이브 와셔 스프링의 정확한 특성을 파악할 필요가 있어 이 스프링에 프레임 이론을 적용하여 스프링상수를 계산하는 공식을 발표한 바 있다.¹⁾ 프레임 이론에 의한 스프링상수를 계산하여 밸브 본체의 진동과 밸브시이트의 충격력을 추정하는 일은 근사적으로 기본과의 파악에 한하여 가능하고 그 이상의 고주파 성분의 추정에 대하여는 좀 더 정밀한 스프링 특성이 요구될 것이 예상된다. 왜냐하면 통상 웨이브 와셔 스프링의 두께는 폭에 비하여 대단히 작고(보통 10%이내), 더구나 마루(Mountain)와 골(Valley)이 있어 웨이브를 이루고 있으므로 프레임이 동일 평면상에 있지 아니하여 스프링상수를 근사적으로 구할 수 밖에 없기 때문이다.

웨이브 와셔 스프링은 하중을 받으면서 마루와 골의 높이차가 줄어들고 반경 방향으로 팽창하기 때문에 하중과 변위가 선형적으로 변화하지 않을 것이 예상된다.

그러므로 본 논문에서는 비선형성을 규명하기 위하여 유한 요소법^{2,3)}에 의한 판해석(plate analysis)프로그램을 이용하여 하중과 변위 사이의 관계를 플로팅하여 제시 하였다.

웨이브 와셔 스프링이 폭에 비하여 두께가 작으므로 프레임으로 간주하는 것 보다 3차원 공간의 판 구조물로 간주하는 것이 더 실제와 가깝다고 판단되어 판해석 프로그램을 이용하였는데 하중을 미소량씩 증가시키고 그 미소하중에 대한 각 절점의 변위를 계산하고 이중 선변위를 각 절점의 좌표에다 합산하여 새로운 절점좌표를 구하고 이 좌표를 가지고 새로운 강성행렬을 구하여 절점 변위를 계산하는 이른바 단계법(Step by step method)을 활용하여 전산프로그램을 작성하였다.

이 프로그램으로 해석한 두가지 샘플에 대하여 하중과 변위 사이의 관계를 제시하였으며 이들을 실험에 의하여 확인 하였다.

2. 삼각형 판 요소의 자유도와 변환행렬

일반적으로 웨이브 와셔 스프링은 외경이나 내경 또는 폭에 비하여 그 두께가 매우 작으므로 3차원 공간의 판해석 이론⁴⁾을 적용하여 유한요소 정식화가 가능하다고 판단 된다. 여기서는 삼각형 판 요소를 사용하여 해석하였는데⁵⁾, 판의 굽힘이론에 기초한 유한요소 정식화 과정을 위한 절점의 자유도와 국소좌표계(Local coordinates system)에서 중앙좌표계(Global coordinates system)로의 좌표변환을 위한 변환행렬(Transformation matrix)의 일반식을 제시 하고자 한다.

지금 Fig. 1에서 보인 바와 같은 삼각형 판요소 1, 2, 3에서 국소 좌표계 $x-y-z$ 를 다음과 같이 정한다. 절점 1을 원점으로 하고 삼각형의 변 1-2를 y 축으로 하여, 절점 1에서 y 축에 수직인 직선을 x 축으로 하되 이 직선에서 절점 3이 있는 쪽의 방향을 x 방향으로 잡는다. 여기서 주의할 점은 삼각형 판요소의 절점번호 순서는 시계 방향으로 되도록 잡는다. 판에 수직인 방향을 z 방향으로 잡는데 오른손 법칙에 따르도록 한다. 절점 1에서 x 방향의 변위를 q_1 , y 방향의 변위를 q_2 , z 방향의 변위를 q_3 라하고 x 축 둘레의 각 변위를 q_4 , y 축 둘레의 각 변위를 q_5 , z 축 둘레의 각 변위를 q_6 라 한다. 그러므로 이 절점의 자유도는 6이 된다. 같은 방법으로 절점 2에서 x 축, y 축 및 z 축 방향의 변위를 각각 q_7 , q_8 및 q_9 이라 하고 x 축, y 축 및 z 축 둘레의 각 변위

를 각각 q_{10} , q_{11} 및 q_{12} 라 한다. 절점 3에 대하여도 같은 방법으로 절점의 변위와 축 둘레의 각 변위를 각각 q_{13} , q_{14} , q_{15} , q_{16} , q_{17} , q_{18} 이라 붙이면 결국 요소의 자유도는 18이 된다.

여기서 $q_1, q_2, q_7, q_8, q_{13}, q_{14}$ 를 평판내 변위(Inplane displacement)라 하고, q_3, q_9, q_{15} 를 가로 변위(Transverse displacement)라 하는데, 이 가로 변위는 평판내 변위와는 연성되어 있지 않다(Uncoupled)고 보는 것이 짧은 판을 해석하는데 타당하다. 그러므로 평판내 변위에 대한 요소의 강성행렬과 가로변위에 대한 요소의 강성행렬도 또한 연성되어 있지 않고 따라서 각자 독립적으로 따로 따로 구하여 조립하면 된다.

지금 요소내 임의점 (x, y) 에서 가로 변위를 w 라 하면 w 는 좌표 (x, y) 의 함수가 되고 절점 1에서 다음 관계가 성립한다.

$$q_3 = w, q_4 = \frac{\partial w}{\partial y}, q_5 = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

절점 2와 3에서도 같은 방법으로 절점 자유도와 가로변위 w 의 관계를 구할수 있다.

한편 평판내 회전인 z 축 둘레의 각 변위 q_6, q_{12} , q_{18} 은 하나의 요소에 대하여는 별 의미가 없으나 3차원 공간에 이 요소와 어떤 각도를 가지고 배치된 다른 요소들과 조립할 때에는 중요한 의미를 가지므로 빼놓을 수 없는 자유도이다.

위에서 본 바와 같이 삼각형 판요소의 자유도는 18 이므로 요소의 강성행렬은 18×18 의 정방행렬이 되고 요소의 하중벡터는 18×1 열 벡터가 된다. 이 요소의 강성행렬과 하중벡터는 Fig. 1의 국소좌표계 $x-y-z$ 에서 구하여 졌으므로 이들을 조립(Assembling)하기 위하여는 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 의 양으로 변환 시켜주어야 한다.

지금 Fig. 1에서 보인 바와 같이 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 에서 각 절점의 좌표를 각각 (X_1, Y_1, Z_1) , (X_2, Y_2, Z_2) , (X_3, Y_3, Z_3) 라고 한다. 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 에서 국소좌표계 y 축의 방향여현을 L_y, M_y, N_y 라 하면

$$L_y = \frac{X_2 - X_1}{D_{12}}, M_y = \frac{Y_2 - Y_1}{D_{12}}, N_y = \frac{Z_2 - Z_1}{D_{12}} \quad (2)$$

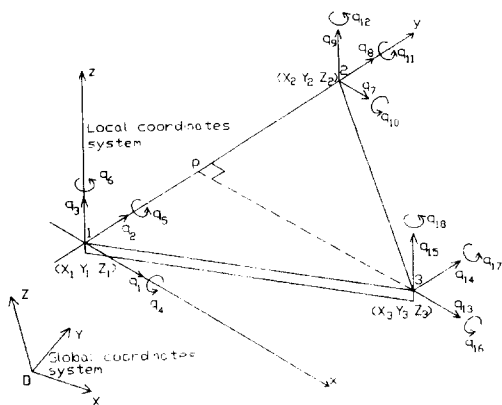


Fig. 1 Degree of freedom of triangular element of plate

가 된다. 여기서 D_{12} 는 절점 1과 절점 2 사이의 거리로서

$$D_{12} = ((X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2)^{1/2} \quad (3)$$

이다.

한편 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 에서 국소좌표계 x 축의 방향여현을 구하기 위하여 절점 3에서 삼각형 변 1-2(국소좌표계의 y 축)에 수선을 긋고 그 만나는 점을 P 라 하면 직선 $P-3$ 은 x 축과 평행 하므로 이의 방향여현은 x 축의 방향여현과 같다. 따라서 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 에서 국소좌표계 x 축의 방향여현 L_x, M_x, N_x 은 다음과 같이 된다.

$$L_x = \frac{X_3 - X_P}{D_{P3}}, M_x = \frac{Y_3 - Y_P}{D_{P3}}, N_x = \frac{Z_3 - Z_P}{D_{P3}} \quad (4)$$

여기서 X_P, Y_P, Z_P 는 중앙좌표계에서 점 P 의 좌표로서

$$\begin{aligned} X_P &= X_1 + L_y D_{1P}, Y_P = Y_1 + M_y D_{1P}, \\ Z_P &= Z_1 + N_y D_{1P} \end{aligned} \quad (5)$$

가 되는 데, 여기서 D_{1P} 는 절점 1과 점 P 사이의 거리인 데 이 값을 구하기 위하여 선분 1-2와 $P-3$ 이 직교한다는 사실을 이용한다. 즉 선분 1-2 방향의 단위벡터와 선분 $P-3$ 방향의 단위벡터가 직교하므로 그 내적(dot product)은 0이 된다.

$$L_y L_x + M_y M_x + N_y N_x = 0 \quad (6)$$

식(5)를 식(4)에 대입하여 L_x, M_x, N_x 를 구하고 이것들을 다시 식(6)에 대입하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_{P3}} \{L_y(X_3 - X_1 - L_y D_{1P})\} + M_y(Y_3 - Y_1 - M_y D_{1P}) \\ + N_y(Z_3 - Z_1 - N_y D_{1P}) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

이 식으로부터 D_{1P} 를 구할 수 있다.

$$D_{1P} = L_y(X_3 - X_1) + M_y(Y_3 - Y_1) + N_y(Z_3 - Z_1) \quad (8)$$

여기서 $L_y^2 + M_y^2 + N_y^2 = 1$ 이라는 사실이 이용되었다.

한편 식(4)의 D_{P3} 은 점 P 와 절점 3과의 거리로서

$$D_{P3} = ((X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2 + (Z_3 - Z_1)^2 - D_{1P}^2)^{1/2} \quad (9)$$

이다.

이상으로서 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 를 중심으로 하여 국소좌표계 x 축의 방향여현 L_x, M_x, N_x 와 y 축의 방향여현 L_y, M_y, N_y 를 구하였으므로 z 축의 방향여현 L_z, M_z, N_z 는 외적(Cross product)을 이용하므로써 쉽게 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} L_z &= M_x N_y - N_x M_y, \\ M_z &= N_x L_y - L_x N_y, \\ N_z &= L_x M_y - M_x L_y \end{aligned} \quad (10)$$

중앙좌표계 $X-Y-Z$ 를 중심으로 하여 국소좌표계 x 축, y 축, z 축의 방향여현을 각각 식(4), 식(2), 식(10)으로 구할 수 있으므로 변환행렬 $[\lambda_1]$ 은 쉽게 얻을 수 있다.

$$[\lambda_1] = \begin{bmatrix} L_x & M_x & N_x \\ L_y & M_y & N_y \\ L_z & M_z & N_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

전술한 바와 같이 국소좌표계에서 유도한 요소의 강성행렬은 18×18 이고 하중벡터는 18×1 이므로 이들을 중앙좌표계의 양으로 변환 시키려면 변환행렬이 18×18 이 되어야 한다. 그러므로 요소의 강성행렬과 하중벡터의 변환행렬 $[\lambda]$ 는 다음과 같이 되어야 한다.

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} [\lambda_1] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\lambda_1] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\lambda_1] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\lambda_1] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [\lambda_1] \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{단, } [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이와 같이 하여 변환행렬을 구하였으면 국소좌표계에서 구한 요소의 강성행렬과 하중벡터를 쉽게 중앙좌표계의 양으로 변환시킬 수가 있다. 지금 국소좌표계에서 구한 요소의 강성행렬을 $[k]$, 하중벡터를 $\{f\}$ 라고 하면 이들의 관계는 다음과 같다.

$$[k] \{q\} = \{f\} \quad (13)$$

여기서 $\{q\}$ 는 절점변위 벡터로서 $\{q\} = [q_1, q_2, q_3, \dots, q_{18}]^T$ 이다.

중양좌표계에서 요소의 절점변위 벡터를 $\{Q\}$ 라 하고 요소의 하중벡터를 $\{F\}$ 라 하면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\{q\} = [\lambda] \{Q\}, \{f\} = [\lambda] \{F\} \quad (14)$$

이들을 식(13)에 대입하면

$$[k] [\lambda] \{Q\} = [\lambda] \{F\} \quad (15)$$

가 되는 데, 이 식을 다시 쓰면

$$[\lambda]^{-1} [k] [\lambda] \{Q\} = \{F\} \quad (16)$$

이 되는 데 이 식으로 부터 중양좌표계로 표시한 요소의 강성행렬 $[K]$ 와 요소의 하중벡터 $\{F\}$ 를 구할 수 있다.

$$[K] = [\lambda]^T [k] [\lambda], \{F\} = [\lambda]^T \{f\} \quad (17)$$

이 식에서는 변환행렬의 특징인

$$[\lambda_1]^{-1} = [\lambda_1]^T, [\lambda]^{-1} = [\lambda]^T \quad (18)$$

이 이용되었다.

3. 요소분할과 경계조건

웨이브 와셔 스프링은 어느 한 골에서 다음 골까지, 또는 어느 한 마루에서 다음 마루까지의 웨이브가 반복되므로, 어느 한 웨이브에 대하여만 고려하면 될 것이고 한 웨이브에서도 마루 또는 골에 대하여 대칭이므로 한 웨이브의 반쪽만 해석하면 된다. 그러므로 여기서는 한 웨이브의 반쪽, 즉 골에서 마루까지의 부분만 해석 하였다. 삼각형 요소로의 분할은 골에서 마루까지의 원주방향 분할 수만 파라미터로 주어지면 자동분할 되도록 하였다.

Fig. 2는 3 웨이브의 스프링에서 골(Vally)에서 마루(Mountain)까지를 원주방향으로 18등분한 예를 보이고 있다. 반경방향의 분할은 원주방향의 분할수와 연계하여 삼각형의 모양이 가늘고 길쭉하게 되지 않도록 자동으로 분할수를 잡도록 하였

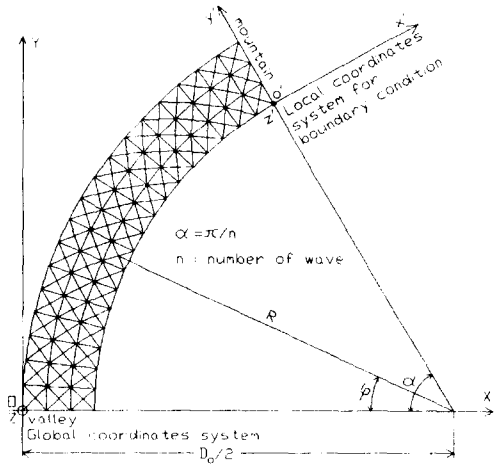


Fig. 2 Triangular elements of half wave

다. 중양좌표계 X-Y-Z는 Fig. 2에서 보인 바와 같이 스프링의 골에서 외측 가장자리 점을 원점으로 하고, 이 점에서 스프링의 중심 방향을 X축으로 잡았으며 원주방향을 Y축으로 잡았다. Z축은 오른손법칙에 따라 지면에 수직방향으로 취하였다. 각 절점의 좌표도 자동계산하여 취하도록 하였는데 Fig. 2에서 보인 바와 같이 원점 O로부터 중심각 ϕ 인 절점의 좌표는 다음과 같이 된다.

$$X = D_0/2 - R \cos \phi, Y = R \sin \phi, Z = l(1 - \cos n\phi)/2 \quad (19)$$

여기서 D_0 는 스프링의 외경이고 l 은 스프링의 자유길이 이다. 또한 R 은 스프링 중심으로부터 절점까지의 거리이고 n 은 웨이브 수 이다.

경계조건으로는 골과 마루에서 원주방향 변위가 영이 되도록 하고, 또한 골과 마루에서 반경방향의 각 변위가 영이 되어야 한다. (각 변위의 방향은 오른손 법칙에 따른다.) 여기에다 골에서는 Z축 방향 (지면과 수직한 방향)의 변위를 영이 되도록 잡고, 하중은 마루에서 작용한 것으로 본다. 이렇게 볼 때 Fig. 2에 보는 바와 같이 골에서 주어진 경계조건들의 방향은 중양좌표계 X-Y-Z와 일치하기 때문에 별문제 없이 조립(Assembling)하고 나서 경계조건에 따라 수정하면 된다. 그러나 마루에서 주어진 경계조건들의 방향은 중양좌표계 X-Y-Z의 방향과 일치하지 않으므로 중양좌표계에서 경

계조건을 도입할 수는 없고 마루에서의 경계조건을 위한 또 다른 국소좌표계 $x'-y'-z'$ 를 그림에 보인 바와 같이 정의 한다. 그러면 마루에서 주어진 경계조건들의 방향은 새로운 국소좌표계 x' 축 및 y' 축의 방향과 일치하므로 중앙좌표계로 표시된 요소의 강성행렬과 하중벡터를 이 국소좌표계의 양으로 변환하여 경계조건을 도입하여 수정한 뒤 이들을 다시 중앙좌표계의 양으로 변환하여 조립한다. 이 때의 변환행렬은 다음과 같이 구할 수 있다. 우선 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 를 중심으로하여 국소좌표계 x' 축의 방향여현 L_x, M_x, N_x 는

$$L_x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, M_x = \cos \alpha, N_x = 0 \quad (20)$$

이 되고 y' 축의 그것들 L_y, M_y, N_y 는 다음과 같이 된다.

$$L_y = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \\ M_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, N_y = 0 \quad (21)$$

한편 z' 축의 방향여현 L_z, M_z, N_z 는

$$L_z = 0, M_z = 0, N_z = 1 \quad (22)$$

이므로, 결국 변환행렬 $[\lambda_1]$ 은 다음과 같이 된다.

$$[\lambda_1] = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

따라서 중앙좌표계 $X-Y-Z$ 로 표시된 요소의 강성행렬을 $[K]$, 요소의 하중벡터를 $\{F\}$ 라 하면 국소좌표계 $x'-y'-z'$ 로 표시된 요소의 강성행렬 $[k']$ 와 요소의 하중벡터 $\{f'\}$ 는 다음과 같이 된다.

$$[k'] = [\lambda] [K] [\lambda]^T \\ \{f'\} = [\lambda] \{F\} \quad (24)$$

여기서 $[\lambda]$ 는 식(12)의 그것이고 이 식의 $[\lambda_1]$ 은 식 [23]이다.

새로운 국소좌표계로 변환된 요소의 강성행렬과 하중벡터는 이제 경계조건에 따라 수정할 수가 있고, 수정이 끝나면 전절에서 설명한 대로 다시

중앙좌표계로 변환하여 조립한다.

4. 프로그래밍

유한요소법으로 정식화 된 판이론²⁻⁵⁾을 이용하여 웨이브 와셔 스프링을 해석함에 있어 보통의 기하적 비선형(Geometrical non-linear)문제를 다루는 방법대로, 우선 작용하중을 수백 등분으로 작게 나누어서 미소 하중이 작용할 때의 각 절점변위를 구한다. 그런 다음 그 절점변위를 각 절점의 좌표에다 합산한다. 다음에 새로운 절점좌표를 가지고 강성행렬⁶⁾을 구하여 다음단계의 계산을 반복하는 이른바 단계법(Step by step method)을 이용하였다.

Fig. 3은 이 계산과정의 플로우 차아트(Flow chart)를 나타낸다.

스프링의 외경, 두께, 재료상수, 웨이브 수 등 기본적인 데이터만 주어지면 삼각형 요소로 자동분할하여 각 절점의 넘버링 순서와 $X-Y-Z$ 좌표를 자동으로 계산한다. 그런 다음 국소좌표계에서 요소의 강성행렬과 하중벡터를 구하고 이들을 중앙좌표계로 변환한다.

그런데 전절에서 보는 바와 같이 마루에 있는 절점을 포함하는 요소는 중앙좌표계와는 또 다른 국소좌표계에서 경계조건을 도입해 주어야 하므로 각 요소가 이들 절점을 포함하고 있는지 어떤지를 판단한다. 만약 포함하지 않으면 곧바로 조립(Assembling)하고, 포함하면 그 국소좌표계로 변환하여 경계조건을 도입하고 다시 중앙좌표계로 변환하여 조립한다. 끝에 있는 절점의 경계조건은 조립하고 나서 중앙좌표계에서 결계조건을 도입하여도 무방하다. 그 다음 방정식을 풀어 절점변위를 구하고 이 절점변위중에서 선변위를 가려내어 이들을 기존의 $X-Y-Z$ 좌표에다 합산한다. 마루에 있는 절점의 Z 방향 변위가 스프링의 자유길이에 도달하면 계산을 끝내고 그렇지 않으면 하중을 미소량 증가시키고 반복 계산한다.

5. 실험 및 고찰

이상에서 설명한 컴퓨터프로그램에 의하여

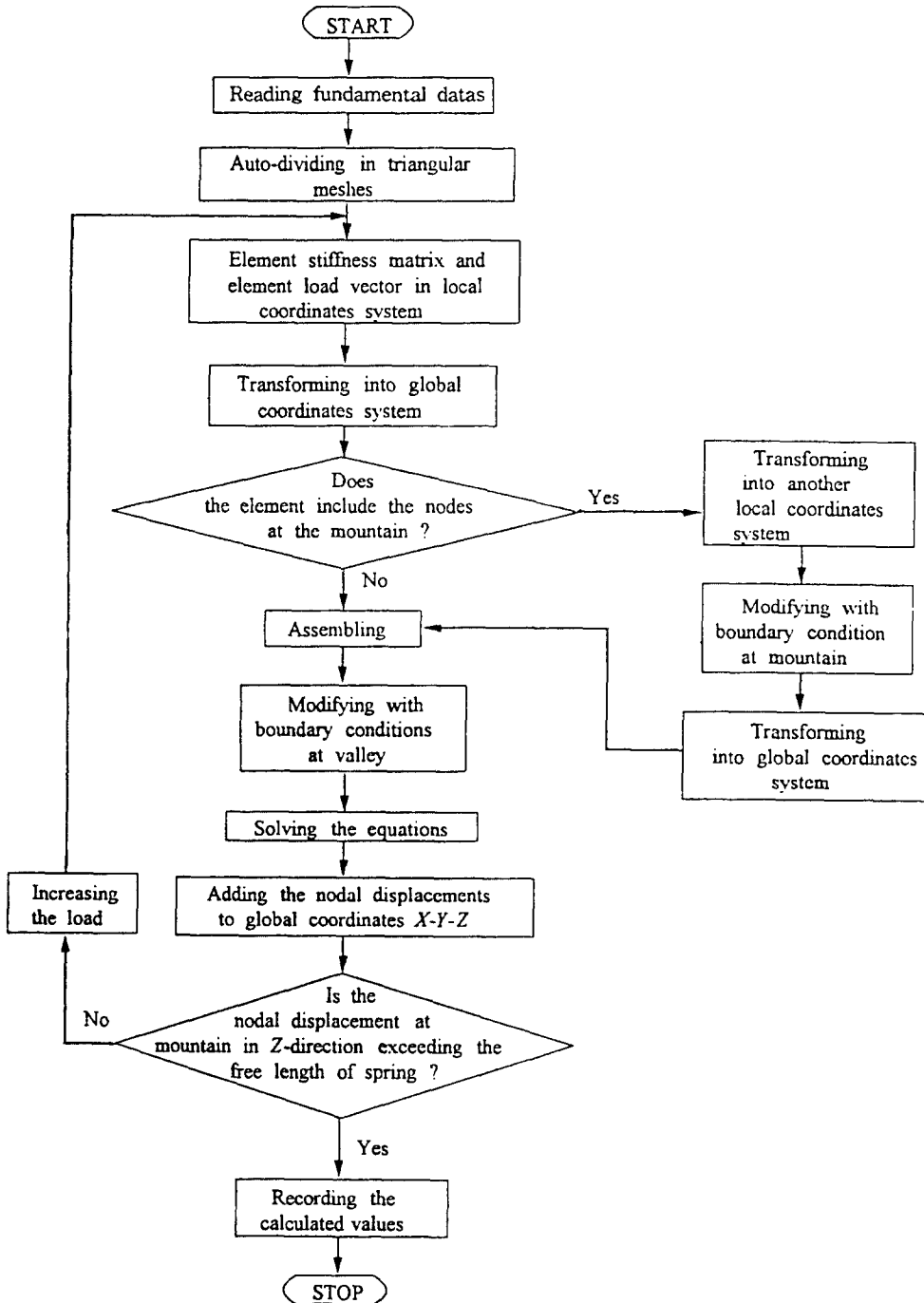


Fig. 3 Flow chart for analysis of wave washer spring

Table 1에 보인바와 같은 두 개의 웨이브 와셔 스프링 샘플에 대하여 하중과 변위의 관계를 계산하

고 실험에 의하여 측정된 관계와 비교 하였다.

Fig. 4는 sample 1(2 waves)에 대하여 가로축을

Table 1 Details of wave washer springs

ITEM	Symbols	Units	Sample 1	Sample 2
Number of wave	N		2	3
Outsider deameter	D_0	mm	81.5	118.5
Inside diameter	D_1	mm	62.9	97.7
Thickness	t	mm	0.4	0.4
Young's modulus	E	Gpa	210	210
Shear modulus	G	Gpa	80	80
Free length	H	mm	5.5	5.4
Materials			SUP	SUP

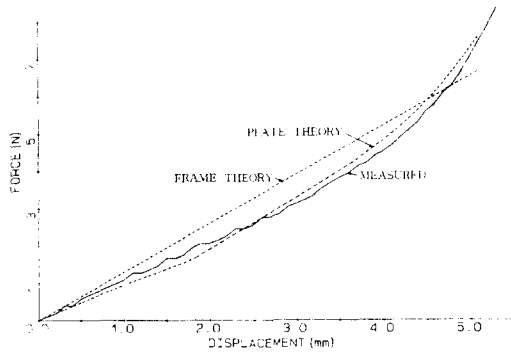


Fig. 4 Force displacement relations for wave washer spring of sample 1

변위로 잡고 세로축을 하중으로 잡고서 하중-변위 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 점선은 계산에 의한 하중-변위 관계이고 실선은 실험에 의한 하중-변위 관계이다. 계산에 의한 하중-변위 관계는 프레임 이론에 의한 선형해석을 이용하여 스프링상수를 계산하고 여기에다 변위를 곱하여 하중을 구하는 선형관계가 있고, 유한요소법에 의한 3차원 판해석 프로그램을 이용하여 계산한 하중-변위 관계가 있다.

이 그림에서 명백한 바와 같이 유한요소법에 의한 3차원 판해석 프로그램을 이용하여 계산한 하중-변위 관계가 전 구간에서 걸쳐서 실험치와 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

또한 이 그림에서 곡선의 기울기가 웨이브 와셔 스프링의 스프링상수인데, 변위의 초기에는 스프링상수가 작다가 스프링 자유길이의 중간 쯤에서는 프레임 이론에 의한 선형해석으로 구한 스프링상수와 같아 지다가 그 이후에서는 비교적 빨리 증

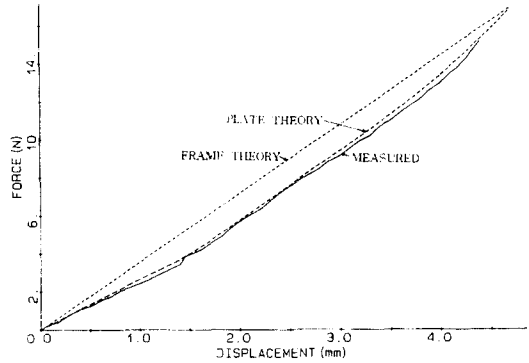


Fig. 5 Force displacement relations for wave washer spring of sample 2

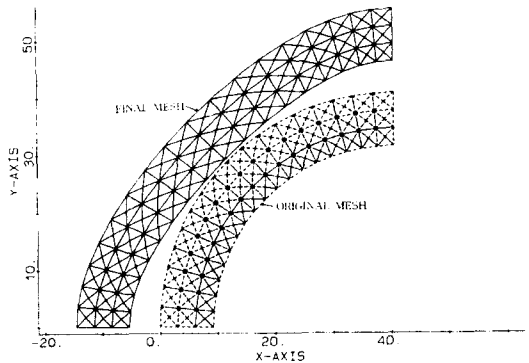


Fig. 6 Original and final meshes of sample 1(Nodal displacements are magnified by 55)

가하는 경향을 보이고 있다. 이러한 비선형성은 웨이브 와셔 스프링의 전형적인 특성이라고 여겨지고 이 스프링을 이용한 계의 면밀한 진동해석에 참고하여야 할 것이다.

Fig. 5는 Sample 2(3 waves)에 대한 계산결과와 측정결과를 나타낸 것이다. 이 경우도 전자와 비슷한 경향을 보이고 있음을 알 수 있다. 이로서 웨이브 와셔 스프링은 웨이브 수에 관계없이 비슷한 비선형성을 보이고 있음을 알 수 있다.

Fig. 6은 sample 1에 대하여 유한요소 메쉬(mesh)를 나타내는 데, 이 그림에서 점선으로 나타낸 메쉬는 원래의 메쉬로서 하중을 가하기 전, 즉 변위가 영 일때의 메쉬를 나타내고, 실선으로 나타낸 메쉬는 최종 메쉬로서 변위가 스프링의 자유길이에 두께만큼 변 길이에 도달하였을 때의 메쉬를 나타낸다. 여기서 최종메쉬는 원래메쉬의 절점좌표에다 절점변위를 55배 확대하여 합함

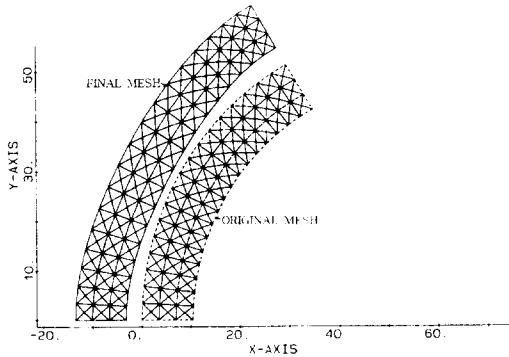


Fig. 7 Original and final meshes of sample 2 (Nodal displacements are magnified by 45)

로써 구한 메쉬 이다. 유한요소법에 의한 해석의 범위를 반(半) 웨이브, 즉 어느 한 끝에서 다음 마루까지 이므로 이 그림에서 보는 바와 같이 골과 마루에서 반경방향의 변위가 다른 곳 보다 현저히 크다는 것을 알 수 있다.

Fig. 7은 sample 2에 대한 유한요소 메쉬를 나타내는데, 최종메쉬는 절점변위를 45배 확대하여 그린 것이다. 여기서도 골과 마루에서 반경방향의 변위가 다른 곳 보다 크다는 것을 알 수 있다.

Photo. 1은 본 시험에 사용한 FAD-AO5(최대 하중 50Kg, 최대변위 250mm)의 외관도를 나타낸 것이며 장치의 구성은 마이크로 컴퓨터제어에 의한 시험기 시스템으로 구성되어 높이의 설정입력 자료에 의해 하중측정을 한다.

본 장치의 하중 검출부는 시편이 놓여지는 원판 하단부에 로드셀(Load cell)을 부착시켜서 하중값을 전압으로 변환한다. 전압으로 변환하기 위하여 로드셀 증폭기를 사용하고 증폭기의 출력전압을 디지털로 변환하기 위하여 AD변환기(Analog digital converter)가 사용되었으며 CPU 계측제어부를 통하여 프린터 및 표시부로 하중의 값을 출력시킨다.

변위는 펄스 모터(Pulse motor)를 구동시켜 변환시킨다. 이 변위의 값은 입력부(키 보드, 디지털 스위치)에서 인가한다. 모터의 변위는 자동과 수동으로 조작되며 수동조작의 경우 저속, 중속, 고속의 3단계로 구분되는 데 저속의 경우, 약 0.02 mm/sec, 중속의 경우, 약 50.0mm/min, 고속의 경우, 1,000mm/min으로 시험속도를 변환시킬 수

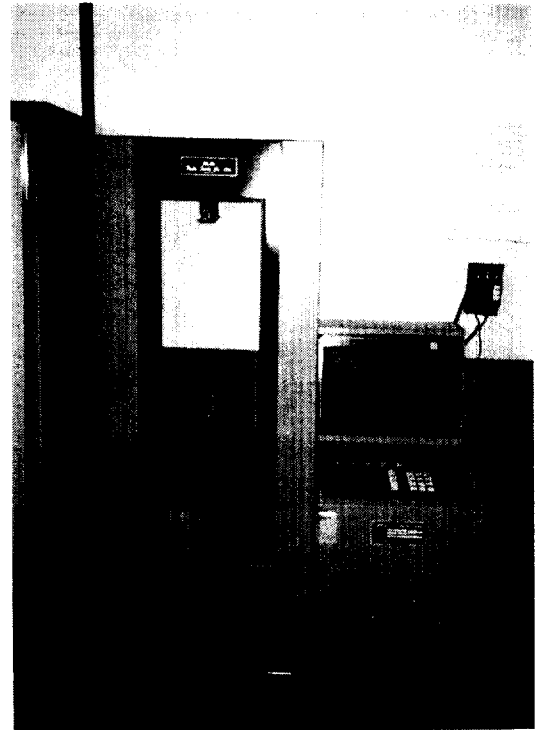


Photo. 1 General view of experimental apparatus

있다. 또한 자동의 경우 약 1,000mm/min의 시험속도를 가질 수 있다. 변위의 검출은 펄스 엔코더(pulse encoder)를 통하여 검출되며 최소검출 변위는 0.01mm/pulse이며 최대변위 측정길이는 250mm이다.

6. 결 론

왕복식 공기압축기, 냉동기 압축기 등의 흡입 및 토출밸브의 신속하고 확실한 작동을 위하여 쓰이는 웨이브 와셔 스프링에 대하여, 하중과 변위의 관계를 유한요소법으로 해석하고 실험에 의하여 측정된 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 비선형성이 강한 웨이브 와셔 스프링에 대하여 유한요소법에 의한 3차원 판해석 이론을 적용하여 하중과 변위의 관계를 구하면 실제와 비교적 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있다.

(2) 웨이브 와셔 스프링의 변위 초기에는 스프링 상수가 프레임 이론에 의한 스프링상수 보다 작다가, 변위가 스프링 자유길이의 중간쯤 도달하면 이

와 비슷하여 지고 그 이후에는 이 보다 커지며 비교적 빨리 증가하는 비선형성을 보인다.

(3) 웨이브 와셔 스프링에 하중을 가하면 반경방향으로 커지는데, 골과 마루에서는 비탈진 부분보다 더 많이 커진다.

(4) 폭 및 직경에 대한 두께가 매우 작은 웨이브 와셔 스프링에서 프레임 해석보다 판이론 해석이 실험치와 잘 일치하는 경향을 나타 내었다.

참고문헌

- 1) S. J. Lee, J. S. Wang 韓國船舶用機關學會誌 Vol. 20, No. 3, 1996. PP. 206 - 213.
- 2) Smith, I. M. and Griffiths, D. V(1988) programing the Finite Element Method, Jhon Wiley and Sons, Chichester.
- 3) ZienKiewicz, O. C. and Taylor, R. L.(1990) The Finite Element Method(4Th ed.), Vol.1, Basic Formulation and Linear problems, McGraw, Hill London, Chapter 12 and 13.
- 4) Donnell, L. H.(1976) Beams, Plate and shells, Mcgraw - Hill, New York, Chapter 6.
- 5) S. S. Rao,(1988) The Finite Element Method in Engineering(2nd ed.), Pergamon Press, PP. 315 ~323.
- 6) Szabo, B. E and Lee, G. C.(1961) Derivation of stiffness matrices for problems inplane elasticity by Galerkin's method. International Journal for numerical methods in engineering 1, 301 10.