

농업용구조물의 신뢰성해석에 이용되는 확률함수의 연산방법 개발

Development of Calculation Technique for Probabilistic Functions Used in the Reliability Analysis of Agricultural Structures

곽 영 철* · 이 정 재**
Kwak, Yeong Cheol · Lee, Jeong Jae

Summary

The technique of the calculation for probabilistic functions used in the reliability analysis of agricultural structures is proposed in this paper for adapting the standardization method using a numerical intergration. The proposed standardization method deals with the structures whose deviations of material properties and loads are large such that the deviation range from 20% to 70%. The results computed by the proposed method are compared with those obtained by the Monte Carlo Simulation. Deterministic values such as deflection, stress, obtained by conventional structural analysis can be directly changed to probabilistic distributions by the proposed method.

I. 서 론

구조물에 사용되는 재료는 저항의 분산도가 커지면 기존의 확정론적 해석 방법으로 해석 및 설계를 할 경우 많은 불확실량을 내포하게 되어 결과를 신뢰할 수 없게 된다. 이런 이유로 불확실량을 합리적으로 고려할 수 있는 신뢰성 해석 방법이 많이 이용되고 있다.

신뢰성 해석 방법은 몬테칼로 모사와 같은 모사기법과 확률론에 의한 방법으로 구별할 수 있다. 모사에 의한 방법은 정해에 가까운 해를 구할 수 있으나 많은 반복 수행을 필요

로 하여 계산량이 많아지며 자유도가 많아질 경우 계산량이 기하급수적으로 증가하여 비효율적이다. 확률론에 의한 해석 방법의 경우, Handa와 Anderson(1981)⁵⁾ 등에 의해 재료 측 설계변량의 분산이 적을 때 급수 전개에 의한 1차 근사방법이 제안되었으나 20% 이상의 분산을 나타내는 경우에는 적용에 제한이 있다고 알려져 있다. 특히, 농업용 구조물은 재료저항측의 분산이 큰 소규모 구조물이거나 흙과 같은 소성재료와 관련된 부분이 많아 설계시 설계 변량의 분산이 커지므로 이를 고려한 확률연산 방법이 필요하다.

* 서울대학교 대학원

** 서울대학교 농업생명과학대학

키워드 : 신뢰성 해석, 확률함수, 표준화 표, 몬테칼로 모사, 확률연산

확률을 연산하는 방법에는 대합(convolution)을 이용한 동시밀도함수(joint density function)에 의한 방법과 기대값에 의한 방법이 있다. 덧셈, 뺄셈 연산은 연산대상이 정규분포일 때 연산 후 확률적 특성이 변하지 않게 되며, Ang과 Tang(1975)¹⁾은 기대값에 의해 연산 결과의 평균과 분산을 구하는 방법을 제시하였다. 곱셈, 나눗셈 연산의 경우 Ang과 Tang(1975)^{1,2)}은 변수의 밀도함수식을 대합을 이용하여 동시밀도함수를 구할 수 있는 방법을 정립하였고, Benjamin과 Cornell(1970)³⁾은 변수가 정규분포하고 수개의 곱셈이 연산될 경우 평균과 분산을 근사적으로 구할 수 있는 방법을 제안하였으며, Haugen(1968)⁷⁾은 분산이 상당히 작을 경우 나눗셈의 연산에 대해 평균과 분산을 기대값의 방법에 의해 구하는 방법을 연구 하였으나 실제 업무에 손쉽게 적용하는 데는 분산이 적어야 하는 등 제한이 있거나 난해한 점이 있어 이용에 제약이 있었다.

본 연구에서는 농업시설물이나 흙구조물과 같이 재료저항의 분산이 큰 구조에 대하여 신뢰성 해석에 필요한 확률함수 연산방법을 수치적분에 의한 표준화 기법을 도입하여 단순화하므로써 신뢰성 해석방법의 활용범위를 넓히고자 하였다.

II. 신뢰성 해석에서의 확률 승제산의 기본이론

1. 동시 밀도함수에 의한 방법

두개의 확률변수 X_1 과 X_2 를 고려하면 기지의 확률변수 Y_1, Y_2 와 관계가 있는 동시밀도함수는 $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ 다음과 같은 관계가 있다.^{4,9,10,11,13)}

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) |J| \dots\dots (1)$$

여기서, $y_1 = y_1(x_1, x_2), y_2 = y_2(x_1, x_2)$

$$x_1 = x_1(y_1, y_2), x_2 = x_2(y_1, y_2)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}$$

만약 $Y = Y(X_1, X_2)$ 이고 함수 Y 와 Y 의 역행렬이 유일할 때 $Y = Y_1, Y_2 = X_2$ (or X_1)으로 놓으면 식 (1)에 의해 동시 밀도 함수 $f_{Y_1 Y_2}$ 에서 밀도함수 f_Y 는 Y_2 에 의해 다음과 같이 적분하여 얻을 수 있다.

$$f_Y(y) = F_{Y_1}(y_1) = \int_b^a f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) dy_2 \dots (2)$$

$$= \int_b^a f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| dx_2$$

$(a \leq Y_2 \leq b)$

Ang과 Tang(1975)^{1,9)}은 곱셈일 경우, 즉 $Y = X_1 X_2$ 일때 대합을 이용하여 Y 의 밀도함수를 $f_Y(y)$ 를 다음과 같이 구하였다.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{x_2} \right| f_{X_1 X_2} \left(\frac{y}{x_2}, x_2 \right) dx_2$$

만약 $Y = \frac{X_1}{X_2}$ 의 경우에는 $\frac{1}{x_2}, \frac{y}{x_2}$ 를 x_2, yx_2 로 대체함으로서 구할 수 있다.

2. 기대값에 의한 방법

확률변수에 대하여 동시밀도함수(joint density function)에 의한 방법은 일반적으로 쉽게 계산되기가 어려워 기대값에 의한 모멘트를 구하는 접근방법이 연구되어 왔다.

기대값에 의한 방법은 승제연산결과의 분포의 형태는 알 수 없고 단지 연산결과의 평균과 분산의 추정만 가능하다. 이 방법은 정규분포의 경우에 유효하게 이용되며, 모멘트에 대한 기본식을 쓰면 다음과 같다.

$$E(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} Y(x_1, x_2, \dots, x_n) f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \dots \dots (3)$$

여기서, $Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_n)$

가. 확률변수의 곱셈

$Y = \prod_{i=1}^n X_i$ 일때 Y 의 평균과 분산은 다음과 같다.

• $n=2$ 일때

$$E(y) = \mu_Y = E(X_1 X_2) = E(X_1) E(X_2) + \text{cov}(X_1, X_2) = \mu_{X_1} \mu_{X_2} + \rho \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{var}(Y) = \sigma_Y^2 = [(\mu_{X_1} \sigma_{X_2})^2 + (\mu_{X_2} \sigma_{X_1})^2 + (\sigma_{X_1} \sigma_{X_2})^2] (1 + \rho^2) \dots \dots \dots (5)$$

여기서,

$E(Y)$: 평균

$\text{var}(Y)$: 분산

$\text{cov}(X, Y)$: X 와 Y 의 공분산(covariance)

$$\rho = \frac{\text{cov}(X_1, Y_2)}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} : X_1 \text{과 } X_2 \text{의 상관계수 (correlation coefficient)}$$

• $n \geq 2$ 이고 X_i 가 독립(independent)일때

$$E(Y) = E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i) = \prod_{i=1}^n \mu_{X_i} \dots (6)$$

$$\text{var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \prod_{i=1}^n \mu_{X_i}^2 - \left(\prod_{i=1}^n \mu_{X_i}\right)^2$$

Benjamin과 Cornell(1970)^{3,9)}은 2차항 이상은 무시하고 분산을 다음과 같이 추정하였다.

$$\text{var}(Y) \approx \sum_{i=1}^n \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_{X_j}^2 \right) \sigma_{X_i}^2 \dots \dots \dots (7)$$

나. 확률변수의 나눗셈

Haugen(1968)^{7,9)}은 $Y = \frac{X_1}{X_2}$ 인 경우, 분모

가 0이 아니고 X_1, X_2 의 분산이 작은 경우에 Y 의 평균과 분산을 다음과 같은 식으로 계산하였다.

$$E(Y) = \mu_Y = \frac{\mu_{X_1}}{\mu_{X_2}} \left[1 + \frac{\sigma_{X_1}}{\mu_{X_1}} \left(\frac{\sigma_{X_1}}{\mu_{X_1}} - \rho \frac{\sigma_{X_2}}{\mu_{X_2}} \right) \left(1 + \frac{\sigma_{X_1}^2}{2\mu_{X_1}^2} + \dots \right) \right] = \frac{\mu_{X_1}}{\mu_{X_2}} \dots \dots \dots (8)$$

$$\text{var}(Y) = \sigma_Y^2 \approx \left(\frac{\mu_{X_1}}{\mu_{X_2}} \right)^2 \left(\frac{\sigma_{X_2}^2}{\mu_{X_1}^2} - 2\rho \frac{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}{\mu_{X_1} \mu_{X_2}} \dots (9) \right. \\ \left. + \frac{\sigma_{X_1}^2}{\mu_{X_2}^2} + \text{higher order terms} \right) \\ \approx \left(\frac{\mu_{X_1}}{\mu_{X_2}} \right)^2 (V_{X_1}^2 - 2\rho V_{X_1} V_{X_2} + V_{X_2}^2)$$

기존의 확률연산방법은 이상에서 언급한 바와 같이 동시밀도함수에 의한 방법과 기대값에 의한 방법, 그리고 몬테칼로 모사에 의한 방법 등이 있으나 기대값에 의한 방법은 확률연산결과와 평균과 분산의 근사값만을 구할수 있으며, 동시밀도함수는 수치적분에 의해 연산결과를 얻을 수 있지만 때 연산마다 연산해야하는 번거로움이 있고, 몬테칼로 모사의 경우는 많은 수행횟수를 필요로 한다. 이러한 이유로 본 연구에서는 연산의 번거로움과 계산량을 줄이기 위해 수치적분에 의한 표준화표를 만들어 표에 의해 연산결과를 쉽게 얻을 수 있도록 하였다.

III. 수치적분과 표준화

1. 수치적분

정규분포를 따르는 $X: N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X: N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 를 가정하면 X 와 Y 의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right) \dots (10)$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_1^2}\right) + \frac{(u-u_2)^2}{\sigma_2^2} \Big] |u| du \dots\dots (14)$$

• 만약 $Z=XY$ 이고 $U=X$ 라면 $x=u, y=\frac{z}{u}$ 이므로 자코비안은 다음과 같다.

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, u)} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{u} \\ 1 & -\frac{z}{u^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{u}$$

(Z, U)의 동시밀도함수 $g(z, u)$ 는

$$g(z, u) = f_{12}(x, y) |J| = f_{12}\left(u, \frac{z}{u}\right) \frac{1}{|u|} \dots (11)$$

따라서 Z 의 확률밀도함수 $h(z)$ 는 식 (10) 과 (11)에 의해

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f\left(\frac{z}{u}\right) \frac{1}{|u|} du \dots\dots (12)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(x-u_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(z/u-u_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right] \frac{1}{|u|} du$$

• 만약 $Z=\frac{X}{Y}$ 이고 $U=Y$ 라면 $y=u, x=uz$ 이므로 자코비안은

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, u)} = \begin{vmatrix} u & 0 \\ z & 1 \end{vmatrix} = u$$

이고, (Z, U)의 동시밀도함수 $g(z, u)$ 는 식 (13)과 같다.

$$g(z, u) = f_{12}(x, y) |J| = f_{12}(uz, u) |u| \dots (13)$$

따라서, Z 의 확률밀도함수 $h(z)$ 는 식 (10) 과 (13)을 이용하여 식 (14)와 같이 표현할 수 있다.

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(uz) f(u) u du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(uz-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(u-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right] |u| du$$

식 (12)와 식 (14)는 각 곱셈과 나눗셈의 연산시 연산결과와 확률밀도함수를 나타내고 있다. 본 연구에서는 이 적분식을 이산화한 수치적분에 의해 밀도함수를 고찰하였다.

식 (14)에서 z, u 는 각각 확률변수이므로 각 z 값에 따른 확률밀도함수 $h(z)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{(uz-u_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(u-u_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right] |u| \cdot -\infty \leq z \leq \infty \dots (15)$$

식 (15)에 의하면 확률밀도함수 $h(z)$ 를 구할 수 있고, 누가확률밀도함수는 확률밀도함수의 누적값이므로 확률밀도함수에 의해 누가 확률밀도함수도 구할 수 있다.

본 연구에서는 농업구조물 해석에 있어서의 확률연산과 관련된 변수들 즉, A, L, E, I 등 재료의 성질과 관련된 확률변수들이 현실적으로 음의 값을 가지지 않는 것이 보통이기 때문에 수치적분을 수행함에 있어서 0이하의 확률값은 고려하지 않았다.

2. 표준화

정규분포 $N(u_1, \sigma_1^2)$ 을 따르는 확률변수 X_1 의 확률밀도함수는

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)$$

이고, 정규분포 $N\left(\frac{\mu_1}{\mu_1}, \frac{\sigma_1^2}{\mu_1^2}\right)$ 을 따르는 확률변수 X_2 의 확률밀도함수는

$$f(x_2) = \frac{\mu_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2\mu_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)$$

이므로, 확률밀도함수 $f(x_1)$ 은 다음식과 같이

정의할 수 있다.

$$f(x_1) = \frac{1}{\mu_1} f\left(\frac{x_2}{\mu_1}\right) \dots\dots\dots (16)$$

나눗셈의 경우 식 (14)에서 $X: N(\mu, \sigma_1^2)$, $Y: N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 을 $X': N\left(\frac{\mu_1}{\mu_1}, \frac{\sigma_1^2}{\mu_1^2}\right)$, $Y': N\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}, \frac{\sigma_2^2}{\mu_1^2}\right)$ 으로 변환시켜 연산하면 $Z=X/Y$, $Z'=X'/Y'$ 의 확률밀도함수가 각각 $h(z)$, $h(z')$ 일 때 식 (17), (18)과 같게 되고

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(uz-u_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(u-u_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right] |u| du \dots\dots\dots (17)$$

$$h(z') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_1^2}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(u'z'\mu_1-u_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(u'u_1-u_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right] |u'| du' \dots\dots\dots (18)$$

$h(z')$ 에서 상수 μ_1^2 과 μ_1 을 고려하면 확률밀도함수 $h(z)$ 는 변환된 확률밀도함수 $h(z')$ 로 구할 수 있다.

이상에서 제시한 방법을 이용하여 Table-1과 같은 표준화 표가 작성되었다. 표준화 표는 정규분포를 따르는 $X: N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y: N$

(μ_2, σ_2^2) 에서 확률변수의 특성치 $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$ 를 기준확률변수인 X 의 평균 μ_1 에 대한 비율로 변환하여 컴퓨터를 이용하여 얻은 결과를 토대로 작성하였다.

이 표준화 표는 1차선형근사가 불가능한 범위에 대한 연산결과를 얻는 것이 목적이므로 20%이상의 큰 분산을 가지는 경우를 대상으로 하되 70%이상의 분산일 경우에는 확률적 분포의 특성을 가진다고 보기가 어려우므로 적용 분산을 20%~70%로 제한하였다.

Table-1은 다음과 같은 두개의 변량에 대하여 표준화 표에 대한 한 예를 보여주고 있다. 이와 같은 두개의 변량은 기준확률변수의 평균에 대한 비율로 변환된 정규분포를 나타낸다.

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| ① 제1변량 | ② 제2변량 |
| $X: N(\mu_1, \sigma_1^2)$ | $Y: N(\mu_2, \sigma_2^2)$ |
| $\mu_1: 1$ | $\mu_2: 0.1\sim 5$ |
| $\sigma_1: 20\sim 70\%$ | $\sigma_2: 20\sim 70\%$ |

• 표준화 표의 이용예

① $\frac{N(1, 0.25^2)}{N(1, 0.25^2)}$: Table-1 ②에서

$\frac{N(1, 0.2^2)}{N(1, 0.2^2)}$ 의 연산결과와 ②에서 $\frac{N(1, 0.3^2)}{N(1, 0.2^2)}$ 의 연산결과를 가지고서 선형보간에 의해 결

Table-1. An example of standardization table : probability density function($h(z)$) of $Z=\frac{X}{Y}$

② $\mu_1=1, \sigma_1=0.2$

μ_2, μ_2	1, 0.2	1, 0.3	1, 0.4	1, 0.5	1, 0.6	1, 0.7
0.00E+00	7.43E-06	7.43E-06	7.44E-06	7.47E-06	7.52E-06	7.61E-06
1.00E-01	9.57E-05	1.18E-04	1.56E-04	2.15E-04	3.08E-04	4.51E-04
2.00E-01	1.03E-03	1.65E-03	2.91E-03	5.34E-03	9.82E-03	1.76E-03
:	:	:	:	:	:	:
:	:	:	:	:	:	:
9.80E+00	1.05E-06	1.66E-04	8.59E-04	1.68E-03	2.28E-03	2.63E-03
9.90E+00	1.00E-06	1.61E-04	8.37E-04	1.64E-03	2.23E-03	2.57E-03
1.00E+01	9.57E-07	1.56E-04	8.15E-04	1.60E-03	2.18E-03	2.51E-03

⑥ $\mu_1=1, \sigma_1=0.3$

z \ μ_1, μ_2	1, 0.2	1, 0.3	1, 0.4	1, 0.5	1, 0.6	1, 0.7
0.00E+00	5.14E-03	5.14E-03	5.15E-03	5.16E-03	5.20E-03	5.26E-03
1.00E-01	1.56E-02	1.67E-02	1.83E-02	2.05E-02	2.32E-02	2.67E-02
2.00E-01	4.29E-02	4.93E-02	5.88E-02	7.20E-02	8.94E-02	1.12E-01
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9.80E+00	1.30E-06	1.78E-04	8.89E-04	1.72E-03	2.31E-03	2.65E-03
9.90E+00	1.24E-06	1.73E-04	8.66E-04	1.68E-03	2.26E-03	2.59E-03
1.00E+01	1.18E-06	1.67E-04	8.43E-04	1.64E-03	2.21E-03	2.54E-03

과 추정이 가능하다.

② $\frac{N(1, 0.2^2)}{N(1, 0.25^2)}$: Table-1 ①에서

$\frac{N(1, 0.2^2)}{N(1, 0.2^2)}$ 와 $\frac{N(1, 0.2^2)}{N(1, 0.3^2)}$ 의 결과를 이용하여

선형보간에 의해 확률밀도함수를 구할 수 있다.

③ $\frac{N(1, 0.25^2)}{N(1, 0.25^2)}$: Table-1을 이용하여

$\frac{N(1, 0.2^2)}{N(1, 0.25^2)}$ 와 $\frac{N(1, 0.3^2)}{N(1, 0.25^2)}$ 를 구한 후 다시

두 결과를 이용하여 선형보간에 의해 원하는 결과를 얻을 수 있다.

Table-1과 같은 표준화 표에는 확률밀도함수만 표시가 되어 있으나 간격과 확률밀도함수 값을 고려하면 누가확률밀도함수도 구할 수 있다.

이 표준화 표는 평균을 1로 하고 분산을 평균에 대한 비율로 표시한 후 목표 분산과의 축척을 고려하도록 하였으므로 꼭 컴퓨터를 이용하지 않고도 같은 결과를 손쉽게 찾을 수 있다.

IV. 적용에 및 고찰

제안된 표준화 방법의 유용성을 살피기 위해 간단한 구조물 해석에 적용한 예를 제시하였다.

1. 적용에

Fig. 1과 같이 상단에 등분포 하중을 받는 라멘 구조물의 경우, 계산된 B점의 모멘트는

$$M_B = \frac{wl^3}{12l + 2h \frac{I_c}{I_b}}$$

<가정>

l (부재길이) : 5m

h (부재높이) : $N(10, 5^2)$ m

w (등분포 하중) : $N(10, 5^2)$ N/m

I_b/I_c (각 부재의 단면 2차 모멘트의 비) : 4

라멘 구조물의 B점의 모멘트의 계산 결과는 Fig. 2와 같다.

표준화 기법을 이용한 연산방법을 검정하기 위해 몬테칼로 모사에 의해 연산의 결과를 검

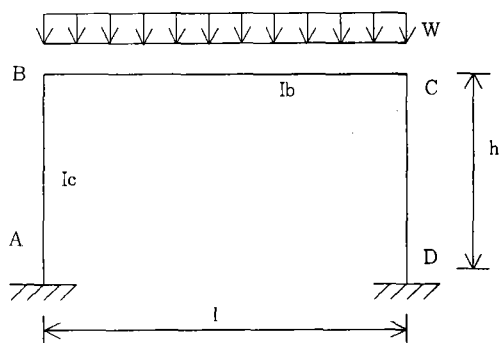


Fig. 1. Frame with a uniform load

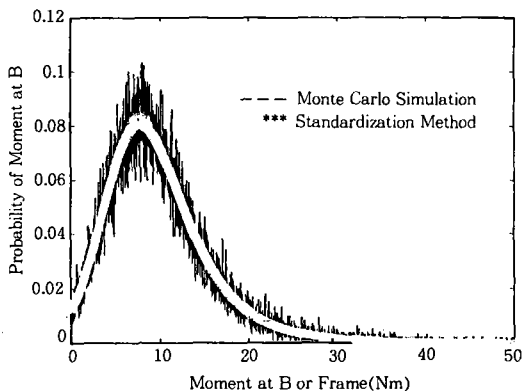


Fig. 2. Probability density function of moment at B of frame

토하였다. 몬테칼로 모사는 컴퓨터를 이용하여 발생시킨 난수를 정규분포로 변환하여 연산하는 방법을 이용하였다.¹⁴⁾

적용예에서는 하중(w)과 부재의 높이(h)를 확률변수로 가정하였으며 표준화 표로부터 모멘트의 확률밀도함수를 얻을 수 있고 이 경우는 Fig. 2에서 보는 바와 같이 몬테칼로 모사에 의해 검토한 결과 잘 일치 하고 있었다. Fig. 2에서 B점에서의 모멘트는 약 9Nm에서 가장 큰 확률값, 약 0.08을 나타내므로 B점의 모멘트는 약 9Nm가 될 확률이 가장 크다고 할 수 있다.

적용예의 연산에서 컴퓨터 처리시간은 몬테칼로 모사(시산회수 100,000)에 의한 경우 9분 40초의 시간이 소요되었고, 수치해석에 의한 표준화 기법을 이용하였을 경우 0.1초 이하의 시간이 소요되었다. 이것은 기 연산된 표준화 표를 이용하는 경우에는 오직 표와 보간법만을 이용하므로 별다른 계산부하가 없다는 것을 보여주고 있다.

2. 응용성

구조물 설계에 있어서 신뢰도 해석의 기본 목적은 한정된 자원을 가지고 효용이나 안전을 최대화 할 수 있도록 설계의 정도를 보장

하는데 있다. 이를 위해서는 신뢰 요구수준을 결정하고 신뢰도를 계산하여 비교하여야 한다. 이러한 신뢰도를 평가하는 척도로서 많이 이용되는 지수의 하나로 파괴확률이 있다.

만약, 재료의 저항능력 즉, 강도를 R , 하중에 의해 발생하는 응력을 S 라 하면 신뢰도 해석문제는 ($R > S$)인 상태를 확인하는 것, 즉 확률 $P(R > S)$ 를 요구 수준에 맞도록 조정하는 것이라 할 수 있다. 여기서 확률변수 R, S 의 분포 $F_R(r), F_S(s)$ 와 그 누적 분포를 알 수 있다면 구조물의 파괴확률은 다음과 같다.^{2,9)}

$$\begin{aligned}
 P_f &= P(R \leq S) = P(R - S \leq 0) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F_R(x) f_S(s) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_S(x)] f_R(x) dx \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

적용예에서 표준화 방법을 통해 얻은 확률 분포를 하중 상태(load effect)라 하고, 재료의 저항강도(resistance)를 $N(37, 8^2)$ 을 따르는 정규분포로 가정하면 Fig. 3과 같으며, 식 (19)를 이용, 수치적분을 이용하여 파괴확률을 구하면 $P_f = 0.0116$ 을 쉽게 구할 수 있다. 마찬가지로 구조물의 목적에 따라 파괴확률이 정해진 경우 보간법을 이용하여 재료의 강도를 역으로 정의할 수 있다.

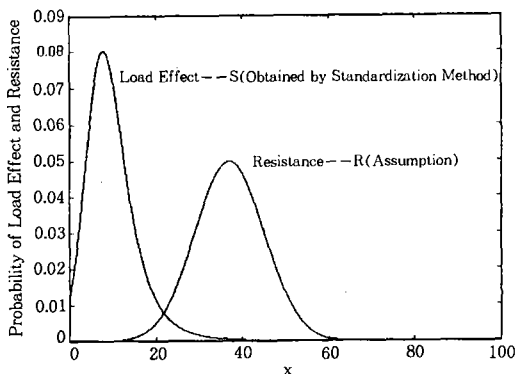


Fig. 3. Probability density functions of $f_R(x) f_S(x)$

V. 결 론

본 연구에서는 수치적분에 의한 표준화 표를 이용한 확률 연산 기법을 제안하였으며 이 기법을 이용하여 농업시설물이나 흙구조물과 같이 재료 특성치의 분산이 큰 구조에 대한 신뢰성 해석에 필요한 확률함수의 연산을 용이하게 할 수 있도록 하였다. 제시된 기법은 기존의 몬테칼로 모사나 단순히 수치적분만을 이용하는 방법에 비하여 계산 수행 시간을 대폭 줄일 수 있으며, 개발된 표준화 표를 이용하면 선형보간만으로 원하는 값을 구할 수 있어 수작업으로도 확률연산이 가능하다.

기존 확률함수의 연산방법에서는 정규분포의 평균과 분산만을 추정하는 것이 보통이나 제시된 연산방법에 의하면 분포의 형태와 확률값도 구할 수가 있다. 또한, 기존의 구조해석에 의해 얻어지는 응력이나 처짐 등은 단면, 부재길이, 탄성계수, 단면 2차 모멘트 등의 재료상수들의 대표치에 의한 조합으로 이루어진 확정론적인 값으로 표시되는데 이러한 값들을 표준화 방법을 이용하여 재료 특성치의 분산을 고려한 확률적인 값으로 변환할 수 있으므로, 구조물의 신뢰도 평가를 위한 파괴 확률의 산정과 설계 신뢰도를 만족시키는 재료 강도의 설정 등 여러 분야에서 이용할 수 있을 것으로 사료된다.

이 논문은 1995년도 서울대학교 학술 연구비 지원에 의한 것임.

참 고 문 헌

1. Ang, A. H. & W. H. Tang, Probability Concept in Engineering Planning and Design, John Wiley & Sons. Vol. 1, 1975.
2. Ang, A. H. & W. H. Tang, Probability Concept in Engineering Planning and De-

- sign, John Wiley & Sons. Vol. 2, 1984.
3. Benjamin, Jack R. & C. Allin Cornell, Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers, 1970.
4. Freeman, H., An Introduction to Statistical Inference, Addison-wesley, reading, MA, 1963.
5. Handa K. & K. Anderson, Application of Finite Element Method in the Stochastic Analysis of Structural Safety and Reliability, Elsevier Science Publishing Company, 1981.
6. Harry Parker, M. S., Simplified Design of Structural Timber, John Willy & Sons, 1957.
7. Haugen, E. B., Probabilistic Approach to Design, John Wiley & Sons, 1968.
8. Madsen H. O., S. Krenk, N. C. Lind, Methods of Structural Safety, Prentice-Hall, 1986.
9. Melchers R. E., Structural Reliability Analysis and Prediction, John Willy & Son, NY, 1987.
10. Milton J. S., Jesse C. Arnold, Probability and Statistics in the Engineering and Computing Sciences. 1986.
11. Richard L. Scheaffer, Introduction to Probability and its Applications, PWS-KENT, 1989.
12. 고재균의 4명, 부정정구조물, 서울대학교 출판부, 1994.
13. 김종호, 유동선, 장한명, 확률론, 자유 아카데미, 1988.
14. 이정재, 단계별 소성해석기법을 이용한 뼈대구조의 신뢰성 해석 모델 개발, 서울대학교 박사학위 논문, 1991.

(접수일자 : 1996년 10월 20일)