韓國軍事運營分析學會誌
第 23 卷, 第 2 號, 1997. 12 . 31

최적 보급수송로 선정을 위한 다항시간 알고리듬
(A Polynomial-time Algorithm for Choosing the Shortest Transportation Path of Logistic Material)

서성철*, 정규련**

Abstract

This paper considers the shortest path problem combined with Min-Max-Min-Sum objective for solving the problem of the military logistics.This paper develops a polynomial-time algorithm for the optimal solution. To analyze the real combat situation, the ability time and distance time of communication line are considered. The complexities of algorithm between previous study and the algorithm developed in this paper is presented. Finally we provide a simple example of application with randomly generated problem.

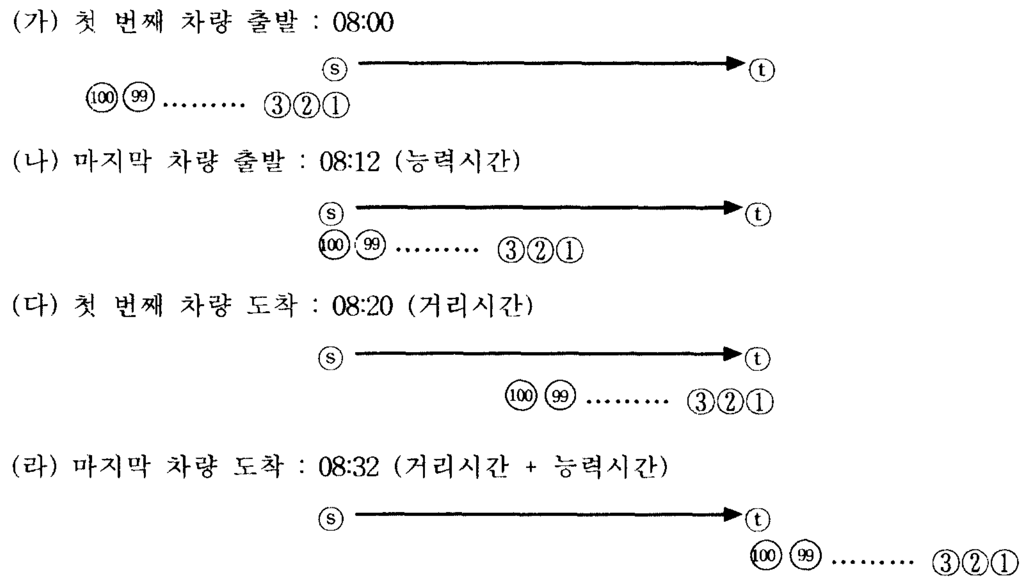
* 육군본부 관리참모부
** 숭실대학교 산업공학과

1. 서 론

걸프전과 같은 최근의 전례에서 입증된 것처럼 기동성과 대량화력전으로 특징되는 현대전에 있어서 전방 전투부대가 충분한 전투력을 발휘하는데 필요한 보충병력과 탄약, 물자 등 전투 긴요물자를 적시에 보급해 줄 수 있는 효과적인 수송방법의 선정은 작전의 승패에 결정적인 영향을 미치는 중요한 문제로 대두되고 있다. 이러한 수송 방법에는 육로, 철도, 수로, 항공 등이 있으며, 특히 육로 수송은 융통성이 풍부하여 가장 널리 이용되는 방법이다.

전시에 상륙작전에 투입될 선박에 승선시킬 병력이나 물자를 부대 주둔지에서 선박이 정박해 있는 항구까지 수송하는 경우나, 공격작전에 투입될 병력을 집결지로 이동시키는 경우처럼 특정지점에서 다른 지점으로 정해진 물동량을 최단시간내 수송완료할 수 있는 경로를 선정하는 것은 군사적 측면에서 매우 중요하다. 이와 같은 수송로를 결정하는 문제를 최단시간 물동량 수송경로문제라 한다. 최단시간 물동량 수송경로를 선정하는 문제는 일반적으로 도로망을 마디(Node)와 호(Arc)들로 이루어진 수송네트워(Transportation Network)으로 구성하고 호값(Arc Value)은 수송시간으로 나타낸 다음 최단경로문제를 해결함으로써 최단시간경로를 선정할 수 있다. 이 때 수송네트웍내 호값은 마디 i에서 마디 j까지의 이동시간으로 표현하고 있으며 이동시간은 도로의 포장상태, 도로폭, 마디간의 거리에 의해서 결정된다. 여기서 포장상태와 도로폭은 해당구간에서의 차량 속도를 결정하는 요소이므로 호값은 마디 i에서 마디 j까지의 거리에 의해 결정된다. 이와같이 마디간의 거리에 의해서 결정되는 이동소요시간을 거리시간(Distance Time)이라고 정의한다[2]. 지금까지의 최단 물동량 수송경로문제들은 출발지에서 도착지까지 최단거리경로를 선정하거나 정해진 물동량을 수송완료하는데 소요되는 거리시간의 합을 최소화하는 경로를 선정하는 문제들이다. 그러나 수송시간은 마디간의 거리 뿐만 아니라 해당구간 도로가 1일동안 통과시킬 수 있는 물동량으로 정의되는 도로능력(톤수) 까지를 계산하여 거리에 따른 소요시간과 도로능력에 따른 소요시간을 동시에 고려해야 한다. 도로능력은 차선의 수, 차도 및 노견폭, 경사 및 곡률반경 등에 의해 제한되며 이러한 도로능력의 제한으로 인한 지체소요시간을 능력시간(Ability Time)이라고 정의한다면 능력시간은 수송할 물동량과 도로능력(톤수)에 의해 결정된다.

최단시간 물동량 수송경로문제와 같은 2기준하에서의 최단경로문제는 Xue와 Sun 그리고 Minoux에 의해 연구되어 왔다. Xue와 Sun[5]은 최단경로네트웍(Shortest Path Network)을 이용한 최대능력 최단경로문제(Maximum Capacity Risky Shortest Path Problem) 그리고 최대Shortest Path Problem)와 최소위험 최단경로문제(Least 신뢰성 최단경로문제(Most Reliable Shortest Path Problem)를 구하는 2기준하 최소경로문제의 다항시간(Polynomial -time) 알고리듬을 연구하였다. 이러한 종류의 문제들은 어떤 기준이 다른 기준들 보다 더 중요하거나 가장 중요한 기준에 관해서 최단경로인 는 문제로서 본 논문에서 구하고자 하는 최단경로와것들 중에서 2번째의 기준을 최적화하는 경로를 찾는 상이한 목적함수의 구조를 가지고 있다. Minoux[7] 는 다항시간 알고리듬을 가진 조합최적화 문제의 최소-최대-최소-합 (Min-Max-Min-Sum) 목적함수 구조를



[그림 1] 능력시간 발생과정

가진 문제의 다항시간 알고리듬을 연구하였다.

본 논문에서는 도로의 거리시간 및 능력시간을 고려한 최단시간 물동량 수송경로문제를 최소-최대-최소-합 목적함수 구조를 가진 최단경로 문제로 모형화하여 이를 해결할 수 있는 다항시간 알고리듬을 개발하고 기존의 연구와 비교하여 본 연구에서 제안한 알고리듬이 우수함을 밝히고자한다.

2. 수리모형 설정

2.1 거리시간과 능력시간 산출

도로망을 이용한 차량행군시 소요되는 이동시간은 크게 거리시간과 능력시간으로 구분할 수 있다. 거리시간이란 수송네트웍상에서 마디간의 거리를 차량의 평균속도로 이동하는데 소요되는 시간이다. 반면 능력시간이란 도로의 물리적인 제한으로 인해 차량이 평균속도로 이동하지 못하고 정지 또는 서행하므로써 지체되는 시간을 의미한다. 즉 100대의 차량에 물동량을 수송하는 경우 도로의 차선을 100차선으로 가정하면 100대가 동시에 출발가능하지만, 1개 또는 2개 차선으로 제한되는 실제상황의 경우 마지막 차량은 첫 번째

차량이 출발한 후에도 상당한 시간을 정지하고 있게 된다. 이러한 능력시간의 발생과정을 도식으로 나타내면 [그림 1]과 같다.

여기서, 마디 ⓢ, ⓣ 간의 거리는 10km, 속도는 30km/h, 차량간격은 60m, 수송할 물동량은 300톤이며 출발시간은 08:00로 가정하면 [그림 1]의 (가)는 08:00에 첫 번째 차량이 출발점 ⓢ를 출발하는 상황이고 (나)는 08:12분에 마지막 차량이 출발점 ⓢ를 출발하는 상황이며 (다)는 거리시간 20분이 소요된 08:20에 첫 번째 차량이 도착점 ⓣ에 도착하는 상황이고 (라)는 첫 번째 차량이 도착한 후 12분이 소요된 08:32에 마지막 차량이 도착점에 도착하므로써 물동량 300톤이 수송완료되는 상황이다. 이와같이 능력시간이란 첫 번째 차량이 목적지에 도착한 시각부터 마지막 차량이 목적지에 도착할 때 까지의 소요시간으로 정의할 수 있다.

도로의 능력시간은 육로수송운용 교범과 수송제원집 등의 자료를 참고하고 분석대상 도로구간별 포장상태와 차도폭 및 노견폭, 경사 및 곡률반경, 노면상태, 구간별 거리 등에 관한 자료는 작전지역 도로망분석자료를 이용한다. 거리시간과 능력시간을 표현하기 위하여 다음과 같은 기호를 정의한다.

W_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$ 의 능력시간

T_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$의 거리시간

D_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$의 거리 (km)

T_t : 수송할 물동량(톤)

B_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$의 1일 기본 수용능력(대)

C_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$의 1일 수송능력(톤)

A_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$의 도로능력(톤)

C_t : 1일 운용시간 기준 시간 계수

T_c : 적재 톤수

L_n : 일방향 차선수

C_s : 안전률

V_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$에서의 차량 운행속도(km/h)

G_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$에서의 차량간격(m)

h_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$의 차도폭 및 노견폭 계수

R_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$의 구배계수

r_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$의 곡률반경

S_{ij} : 호 $(i\ ,\ j)$의 노면상태

그러면 1일 기본수용능력과 1일 수송능력(톤) 및 도로능력(톤)은 식 (1), (2), (3)과 같이 표시된다[1].

$$B_{ij} = \frac{V_{ij} \times 1,000 \times 24}{G_{ij}} \tag{1}$$

$$C_{ij} = \frac{B_{ij} \times C_s \times C_t \times T_c}{L_n} \tag{2}$$

$$A_{ij} = C_{ij} \times h_{ij} \times \min\{R_{ij}, r_{ij}\} \times S_{ij} \tag{3}$$

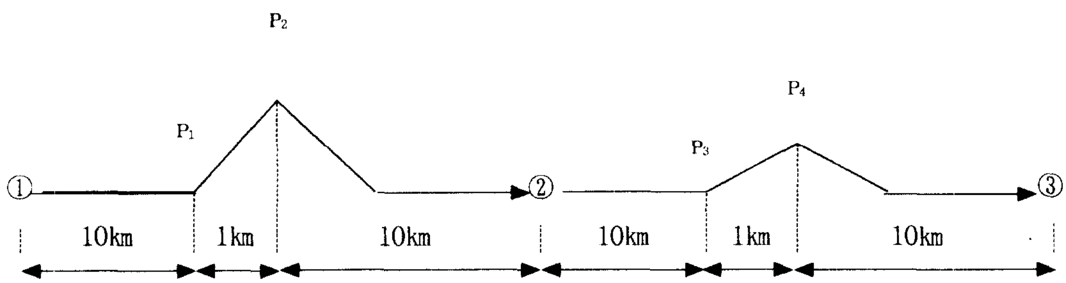
따라서 노드 i 와 j의 능력시간과 거리시간은 식 (4) 및 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$W_{ij} = \frac{T_t}{A_{ij}} \times 24 \tag{4}$$

$$T_{ij} = \frac{D_{ij}}{V_{ij}} \tag{5}$$

2.2 모형설정

앞에서 설명한 것과 같이 거리시간과 능력시간을 고려한 최단시간 물동량 수송경로문제가 최소-최대-최소-합 형태의 목적함수를 가지는 이유를 보이기 위해 250톤의 탄약을 5톤 트럭 51대에 적재하여 출발점 ①에서 지점 ②를 거쳐 도착점 ③까지 수송하는 [그림 2]와 같은 경우를 고려해보자.



[그림 2] 거리시간과 능력시간을 가진 도로형태(Ⅰ)

[그림 2]에서 가용 도로는 편도 1차선이고 30km/h의 속도로 이동할 수 있으며 애로지점 P_1 P_2 에서는 10km/h, 애로지점 P_3 P_4 에서는 20km/h의 속도로 이동하며 전술적 상황을 고려하여 차량간 간격은 최소 60m 이상을 유지하는 것으로 가정한다. 먼저 각 구간의 거리시간을 구하여 보면 지점 ①에서 ②까지는 46분이고 지점 ②에서 ③까지는 43분이다.

지점 ① - ② 간의 능력시간은 지점 ①에서 첫 번째 차량이 출발한 후 마지막 차량이 출발할 때까지의 정지시간과 애로구간 P_1 P_2 에서 지체 및 서행하는 시간과의 합이다. 첫 번째 차량이 지점 ①에서 출발할 때 차량간격을 유지하기 위하여 마지막 차량은 첫 번째 차량이 출발한 후 6분 뒤에 출발하게 된다. 또한 첫 번째 차량이 P_1 지점에 도달했을 때 마지막 차량은 P_1 지점으로부터 3km 후방에 위치하게 된다. 따라서 마지

막 차량은 P_2 지점까지 4km를 10km/h의 속도로 이동하게 되며, 첫 번째 차량이 3km를 30km/h의 속도로 이동하는데 소요되는 시간 6분과 마지막 차량이 3km를 10km/h의 속도로 이동하는데 소요되는 시간 18분과의 차이인 12분만큼 지체하게 된다. 그러므로 지점 ① - ② 간의 총 능력시간은 18분이 된다. 동일한 계산방법으로 지점 ② - ③ 간의 총 능력시간은 15분이다. 그리고 첫 번째 차량이 P_2 지점을 지난 후 30km/h의 속도로 이동하는 동안 마지막 차량은 3km 구간을 18분동안 10km/h의 속도로 이동하게 되므로 차량들의 간격이 신장된다. 그래서 애로지점 P_3 P_4 를 통과할 때는 신장된 차량간격으로 인하여 지체하지 않고 이동할 수 있다. 이를 보이기 위해 첫 번째 차량과 마지막 차량이 각 지점을 통과하는 시각을 나타내면 [그림 3]과 같다.

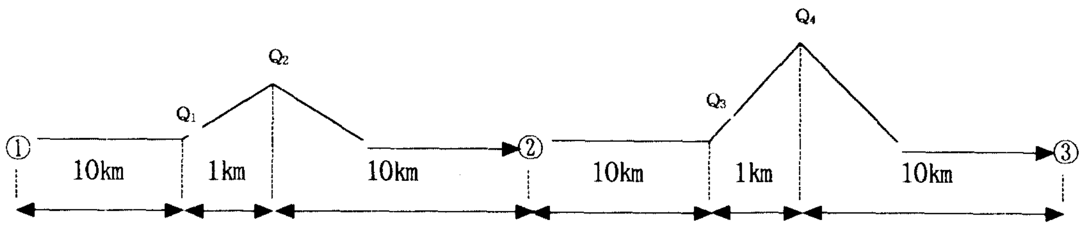
	①	P_1	P_2	②	P_3	P_4	③
첫번째 차량	09:00	09:20	09:26	09:46	10:06	10:09	10.29
마지막 차량	09:06	09:38	09:44	10:04	10:24	10:27	10:47

[그림 3] 주요지점 차량 통과시각

[그림 3] 에서 보는 바와 같이 첫 번째 차량은 09:00에 지점 ①을 통과하여 지점 ③에는 10:29분에 도착한다. 이때 마지막 차량은 09:06분에 출발하게 되고 P_1 통과시간은 09:38분, P_2 통과시간은 09:44분이 되어 지점 ① - ②간의 능력시간만큼 지체하게 된다. 첫 번째 차량이 P_3 지점을 통과할 때 마지막 차량은 지점 ① - ②간의 능력시간 18분 만큼 지체되어 9Km 후방에 위치하게 되고 차량간의 간격은 180m 이다. 따라서 첫 번째 차량이 P_3 지점에 도달한 후 두 번째 차량이 P_3 지점에 도달하기 위해서는 180m를 이동해야 하며 이때 소요되는 시간은 0.36분이다. 이 시간 동안 첫 번째 차량은 P_3 지점으로부터 120m를 이동하게 되어 두 번째 차량과의 간격은 120m를 계속 유지하게 된다. 이 간격은 최소유지간격 60m보다 크기 때문에 두 번째 차량은 지체되지 않고 이동할 수 있다. 마찬가지로 마지막 차량도 P_3 지점에 도달할 때까지 지체함이 없이 30km/h의 속도로 이동할 수 있으므로 P_3 지점에 10:24분에 도달하게 되며, 지점 ③에는 10:47분에 도착하게 되어 첫 번째 차량의 도착시간과 18분의 차이가 난다. 그러므로 250톤의 탄약을 지점 ①에서 ③까지 수송하는데 소요되는 시간은 지점 ① - ② 간의 거리시간과 지점 ② - ③ 간의 거리시간의 합과 지점 ① - ② 간의 능력시간과 지점 ② - ③ 간의 능력시간 중 큰 값을 더한 값이 된다. 즉, 총 수송시간은 46 + 43 +

max{18, 15} = 107 분이다.

다음은 [그림 4] 와 같이 지점 ① - ② 간의 능력시간이 15분, 거리시간이 43분이고 지점 ② - ③ 간의 능력시간이 18분, 거리시간이 46분인 경우를 고려해보자.



[그림 4] 거리시간과 능력시간을 가진 도로형태 (Ⅱ)

[그림 4]에서 애로지점 Q_1 Q_2 에서는 20km/h, Q_3 Q_4 에서는 10km/h, 기타 구간은 30km/h의 속도로 이동하는 것으로 가정한다. 이 경우는 애로지점 Q_1 Q_2 를 통과하면서 지체된 시간으로 신장된 차량 간격이 애로지점 Q_3 Q_4 를 통과할 때 좁혀지면서 지체시간이 감소되므로 속도가 느린 애로지점 Q_3 Q_4 만을 고려해 주면 된다. 즉, Q_1 Q_2를 통과하면서 지체된 시간만큼 Q_3 Q_4를 통과할 때 덜 지체되는 것을 알 수 있다. 따라서 지점 ① - ③ 간을 수송하는데 걸리는 시간은 지점 ① - ③ 까지 걸리는 총 거리시간에 지점 ① - ② 간의 능력시간과 지점 ② - ③ 간의 능력시간 중에서 큰 값을 더해주면 된다. 즉, 총 수송시간은 43 + 46 + max{15, 18} = 107 분이다. 지금까지 살펴본대로 어떤 경로에서의 능력시간은 마디간의 능력시간의 분포와 무관하게 각 마디간의 능력시간 중에서 가장 큰 값 하나만 수송시간에 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 최소-최대-최소-합 최단경로 문제를 모형화 하기 위해서 다음과 같은 사항을 가정한다. 첫째, 모든 호값은 정수이다. 호값이 유리수라면 적절히 큰 수를 곱함으로써 모든 호값을 정수화 할 수 있다. 둘째, 수송네트웍은 출발노드로부터 모든 노드에 이르는 유방향 경로를 포함하고 있다. 셋째, 수송네트웍은 음순환로를 가지고 있지 않다. 이러한 가정하에 도로망의 통제점과 각각의 도로구간을 네트웍의 노드와 호로 나타내기 위해 다음과 같은 기호를 정의한다.

V : 노드 집합

E : 호 집합

X_{ij} : 호 (i , j) 의 흐름량

s : 출발 노드

t : 도착 노드

그러면 최소-최대-최소-합 최단경로문제(MMMSSP: Min-Max-Min-Sum Shortest Path Problem)는 다음과 같은 비선형계획으로 모형화 될 수 있다.이 모형을 편의상 MMMSSPP로 부르기로 한다.

$$Min \ \{ \ Max_{(i,j)\in E}(\ W_{ij} \ X_{ij}) \ + \sum_{(i,j)\in E} T_{ij} \ X_{ij} \ \} \tag{6}$$

$$s.t \quad \sum_{(j;(i,j)\in E)} X_{ij} \ - \sum_{(j;(j,i)\in E)} X_{ji} \ = \begin{cases} 1 & \text{for } i=s \\ 0 & \text{for } i \in V-\{s,t\} \\ -1 & \text{for } i=t \end{cases} \tag{7}$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ for all (i,j) E} \tag{8}$$

MMMSSPP의 목적함수는 최소-최대-최소-합의 형태이고 제약식 (7) 과 (8)은 최단경로문제의 제약식이다. 제약식 (7)과 (8)은 Totally Unimodularity 성질이 존재하여 목적함수만 선형이라면 선형계획법으로도 최적해를 구할 수 있다. 그러나 목적함수가 비선형이기 때문에 선형계획법이나 *Dijkstra* 알고리듬과 같은 일반적인 알고리듬으로는 해결할 수가 없으므로 MMMSSPP의 해를 구하는 다항식 알고리듬이 필요하다.

3. 알고리듬

3.1 MMMSSPP를 위한 다항식 알고리듬

주어진 네트웍 $G = (V, E)$ 에서 각 호의 능력시간을 a_e , 호 e 의 거리시간을 b_e 라고 하고 노드 i 에서 노드 j 에 이르는 모든 경로들의 집합을 P_{ij}라 할 때

$$d_{ij} = \min\{ \sum_{e\in p} b_e + \max\{ a_e; e\in p \}; p\in P_{ij}\}$$

를 만족하는 경로를 찾는 문제가 (MMMSSPP)라고 할 수 있다. 이를 해결하기 위해 본 연구에서 개발된 알고리듬은 먼저 거리시간만 가지고 최단경로문제를 구하고, 이 최단경로상의 최대 능력시간 보다 크거나 같은 능력시간을 가진 호를 네트웍상에서 제거한다. 최단경로문제를 해결하는 알고리듬은 *Dijkstra* 해법으로 다항식 시간안에 구할 수 있다. 이러한 절차로 한번의 최단경로를 찾고 난 후에는 최소한 1 개 이상의 호가 제거된다. 구한 경로 및 최대 능력시간과 거리시간의 합을 더한 값을 현재의 최적경로의 목적함수와 비교하여 작은 값을 가지는 경로를 최적경로와 목적함수 값으로 저장한다. 호가 제거되고 남은 네트웍상에서 앞단계에서와 같은 방법으로 거리시간만으로 최단경로를 구했을 때 출발노드에서 도착 노드까지의 경로가 존재하지 않으면 앞에서 구한 경로와 목적함수 값이 최적해와 목적함

수 값이 되고, 경로가 존재한다면 다시 현재 구한 경로상의 최대 능력시간 보다 크거나 같은 호를 제거하고 동일한 절차를 반복한다. 이 알고리듬을 정리하면 아래와 같다.

MMMSSPP 을 위한 알고리듬

[단계 0] OPT_P ←NULL ; OPT_D ← ∞ ;

$E_1 \leftarrow E$; $G_1 \leftarrow (V,\ E_1)$; $k \leftarrow 1$;

여기서 OPT_P 와 OPT_D를 출발마디와 도착 마디 사이의 최적 경로와 최적 수송시간이라 하고 k는 반복절차(iteration)를 나타내며 E_1 과 G_1은 첫 번째 반복절차의 호집합과 네트웍을 각각 나타낸다.

[단계 1] 네트웍 G_k에서 출발점으로부터 도착점까지 최단경로를 거리시간(b_e)만 고려하여 Dijkstra 방법으로 구하고 이 경로를 P_k라 한다.

만약, $P_k = NULL$ 이거나

$\sum_{e \in P_k} b_e + \min\{\ a_e\ ;\ e \in E_k\} \geq$ OPT_D 이면 [단계 4]로 간다.

여기서 G_k는 k 번째 반복 절차의 네트웍을 나타내고 E_k는 네트웍 G_k를 구성하는 호집합을 나타낸다.

[단계 2]

$\sum_{e \in P_k} b_e + \max\{\ a_e\ ;\ e \in P_k\} \geq$ OPT_D 이면 [단계 3]으로 간다.

$\sum_{e \in P_k} b_e + \max\{\ a_e\ ;\ e \in P_k\} <$ OPT_D 이면

OPT_P ← P_k ;

OPT_D ← $\sum_{e \in P_k} b_e + \max\{\ a_e ; e \in P_k\}$;

[단계 3]

$E_{k+1} \leftarrow E_k - \{f,\ a_f \geq \max\{\ a_e ; e \in P_k\}\}$;

$G_{k+1} \leftarrow (V\ ,\ E_{k+1})$; $k \leftarrow k+1$;

[단계 1]로 간다.

[단계 4] 최적 경로 OPT_P와 그와 관련된 최적 수송시간 OPT_D를 구하고 알고리듬을 종료한다.

다음의 2가지 정리는 알고리듬의 최적성과 계산 복잡성을 나타내 준다.

<정리 1>

MMMSSPP을 위한 알고리듬의 [단계 4]에서 구한 OPT_P는 MMMSSPP에 대한 최적 경로이고 OPT_D는 그와 관련된 최적 수송시간이다.

(증 명)

반증(Contradiction)을 통한 방법으로 증명을 실시한다. 만약 OPT_P가 최적 경로가 아니라고 하고, p^*를 노드 i 와 j 사이의 진정한 최적해라고 가정하면 다음 식이 성립한다.

$$d^* = \sum_{e \in p^*} b_e + \max\{a_e\ ;\ e \in p^*\} < \text{OPT\_D}$$

OPT_P는 k단계에서의 거리시간만으로 구한 최단 경로이므로 종료전 모든 단계(k = 1, 2, ⋯, K 단, K는 종료전 최종단계)에서 다음 식이 성립한다.

$$d^* \ < \ \sum_{e \in p_k} b_e + \ \max\{\, a_e \ ; \ e \in P_k\}$$

만약 $p^* \subseteq E_k$ 라면, P_k가 네트웍 G_k에서 노드 i 와 j 사이의 거리시간(b_e)의 최단경로이기 때문에 $\sum_{e \in P^*} b_e \ \geq \ \sum_{e \in P_k} b_e$ 이고 따라서 다음 두 식이 성립한다.

$$\max\{a_e \ ; \ e \in p^*\} < \max\{a_e \ ; \ e \in P_k\}$$

$$-(\sum_{e \in P^*} b_e - \sum_{e \in p_k} b_e) \leq \max\{a_e \ ; \ e \in P_k\}$$

$$a_f < \ \max \ \{a_e \ ; \ e \in P_k\} \ \ for \ all \ \ f \in p^*$$

그러므로 다음 식도 성립한다.

$$p^* \subseteq E_{k+1} =$$

$$E_k - \{f \ ; \ a_f \geq \max\{\ a_e ; e \in \ p_k\}\}$$

즉, 진정한 최적 경로 p^*는 알고리듬 [단계 3]의 기준하에서도 제거되지 않고 네트웍상에 존재한다. 최초 진정한 최적 경로 $p^* \subseteq E_1$ 임이 명백하고 계속해서 다음 식들이 성립한다.

$$p^* \subseteq E_2,\ p^* \subseteq E_3, \ldots,\ p^* \subseteq E_k$$

그러나 E_k는 OPT_P보다 더 좋은 해는 가질 수 없다. 이는 가정사항에 위배되므로 <정리 1>이 증명된다.

<정리 2>

(MMMSSPP)를 위한 알고리듬은 최악의 경우에 다항시간 $O(|E|\,|N|^2)$의 계산 복잡도를 가진다.

(증 명)

MMMSSPP를 위한 알로리듬은 최악의 경우, 한 단계에서 1개의 호가 네트웍상에서 제거되고, 최단경로를 구하는 *Dijkstra* 알고리듬은 $O(\,|N|^2)$의 계산 복잡도를 가진다[4]. 따라서 Dijkstra 알로리듬을 적용했을 시는 $O(|E|\,|N|^2)$의 계산 복잡도를 갖게되므로 <정리 2>가 증명된다.

위에서 제시된 알고리듬은 한단계에서 최악의 경우 1 개의 호가 네트웍상에서 제거되고 최단경로를 구하는 *Dijkstra* 알고리듬이 $O(\,|N|^2)$의 계산 복잡도를 가지고 있으므로 *Dijkstra* 알고리듬을 적용했을 시는 $O(|E|\,|N|^2)$의 계산 복잡도를 가진다. 데이타 구조를 Fibonacci heap을 사용하면 계산 복잡도는 $O(\boldsymbol{nlogn})$으로 감소된다. 따라서 제시된 알고리듬은 다항식 알고리듬(Polynomial-time Algorithim)이다.

3.3 Minoux 의 알고리듬과 비교

Minoux는 최소-최대-최소-합 목적함수를 가지는 조합최적화 문제를 위한 다항식 알고리듬을 개발하고 짝짓기(matching)와 matroid 문제와 같은 유형의

문제에 적용하였다[7]. Minoux의 알고리듬은 (MMMSSPP)에도 적용할 수 있는데 그 내용은 최소-최대를 요구하는 데이타를 내림차순으로 정렬하고 호의 수만큼 반복적인 절차를 통해 최소-합을 요구하는 데이타를 기준으로 최단경로문제를 풀고 가장 최소 목적함수 값을 주는 경로를 최적의 경로로 저장한다. 결국 Minoux의 알고리듬도 계산 복잡도가 $O(|E||N|^2)$를 가진다[7]. 최선의 경우에 계산 복잡도는 Minoux의 알고리듬과 본 논문에서 개발한 알고리듬이 둘 다 $O(n^2)$이다. 그러나 Minoux의 알고리듬이 $O(n^2)$이 되려면 최소-최대를 요구하는 데이타가 모두 동일한 값을 갖는 경우 뿐이므로 이는 현실적으로 합리적인 가정이 아니다. 그리고 Minoux의 알고리듬을 구현할 수 있도록 먼저 최소-최대를 요구하는 데이타를 정렬하기 위해서는 정렬 알고리듬을 사용해야 하는데 가장 낮은 정렬의 계산 복잡도가 $O(nlogn)$이다. Minoux의 알고리듬은 $|E|$의 반복횟수를 요구한다. 그러나 본 논문에서 개발한 알고리듬은 한 반복절차에서 호를 제거하는 절차가 현재 구한 최단경로상의 능력시간보다 크거나 같은 능력시간을 가진 호를 모두 제거함으로써 출발지와 도착지 상의 경로가 존재하지 않게 되면 최적해가 구해지므로 현실적인 사항을 가정하고 있다. 따라서 Minoux의 알고리듬에 비해 본 논문에서 개발한 알고리듬은 최악의 경우에 대해서는 계산량이 비록 같다 하더라도, 정렬 알고리듬을 사용하지 않으며 최소한 Minoux의 알고리듬보다는 같거나 좋다고 할 수 있다.

4. 적용사례

작전지역의 도로망을 분석하기 위해서는 도로의 포장상태, 차도폭, 노견폭, 경사, 곡률반경 등 여러가지 제원을 도로망 데이타베이스에서 획득한다. 도로망 데이타베이스는 이미 구축되어 있으므로 분석에 필요한 데이타들을 용이하게 획득할 수 있고 획득된 제원은 <표 1>과 같은 형식으로 나타낼 수 있다. <표 2>로 부터 <표 5>까지의 제원은 도로능력(톤) 산출에 사용되는 인수표로서 야전교범 55-35 (육로수송운용)에서 발췌한 자료이다.

<표 1> 도로망 제원

구분 \ 도로번호		①-②	①-③	②-③	②-④	③-④	③-⑤	④-⑤
1	포장형태	3	3	3	3	3	3	3
2	차도폭(m)	9	5.4	8	8	2.5	8	9
	노견폭(m)	0.5	0	0.25	0.5	0.5	0.25	0.5
3	경사(%)	5.5	5.0	5	7	7	10	5.5
	곡률반경(m)	50	30	-	60	30	60	5.6
4	노면상태	C	C	C	C	C	C	C
5	거리(Km)	50	100	75	75	125	50	50

<표 2> 차도폭 및 노견폭 계수 (세부구간 생략)

차도폭(m) / 노견폭(m)	1 차선		2 차선		4차선	
	2.5-5.4		5.5-10.9		11.0-14.4 이상	
0	0.33	0.52	0.53	0.90	1.40	2.00
0.5	0.37	0.60	0.60	0.97	1.40	2.00
1.0	0.41	0.64	0.64	0.98	1.60	2.30
1.5	0.43	0.70	0.71	0.98	1.60	2.30
2.0	0.44	0.72	0.74	0.99	1.60	2.30
2.5			0.74	0.99	1.80	2.50
3.0			0.74	1.00	1.80	2.50
3.5			0.74	1.00	1.80	2.50
4.0			0.75	1.00	1.80	2.50

<표 3> 도로 유형별 수용능력

포장형태	노면 상태	최대운행속도 (Km/h)	차량 간격	1일 기본 수용능력	1일 수송능력(톤)
1	포장(시멘트, 아스팔트)	60	100	14,400	15,290
2	비포장(자갈보수)	40	80	12,000	12,740
3	비포장(흙길)	25	60	10,000	10,620

<표 4> 곡률반경 및 구배계수 (세부구간 생략)

구 분	곡률 반경(m)	구 배 (%)	인 수
평 지	65 이상	3.9 이하	0.97-1.00
기 복	45-64	4.0-5.4	0.88-0.95
언 덕	30-44	5.5-7.9	0.75-0.85
산 악	29 이하	8.0 이상	0.25-0.70

<표 5> 노면상태 계수 (세부구간 생략)

구 분	1 (포장)		2(비포장, 자갈보수)		3(비포장, 흙길)	
	건기	우기	건기	우기	건기	우기
A(양호)	1.00	0.95	0.35	0.20	0.35	0.20
B(보통)	0.95	0.80	0.30	0.15	0.35	0.20
C(불량)	0.80	0.70	0.25	0.05	0.20	0.01

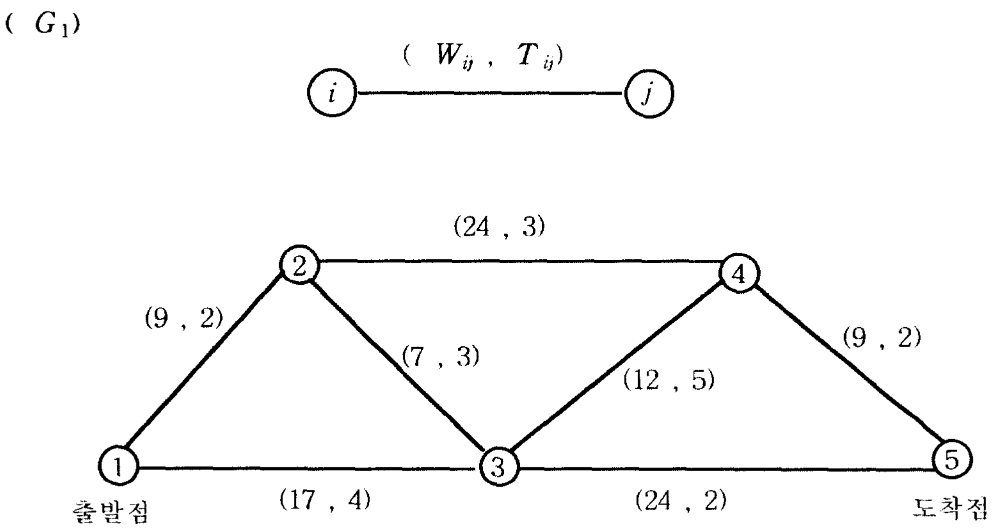
문제는 600톤의 물동량을 출발점 ①에서 도착점 ⑤까지 최단시간에 수송완료할 수 있는 경로를 결정하는 것이다. 이를 위해 <표 1>로 부터 <표 5>까지의 제원을 제 2장에서 제시된 식 (1) 부터 식 (5)에 적용하여 각각의 도로구간에 대한 거리시간과 능력시간을 다음과 같이 구한다. <표 1>의 도로구간 ① - ② 에 대한 도로능력(톤) A_{12}는 식 (3)을 이용하여 계산한다. <표 2>로 부터 <표 5> 까지의 제원으로 부터 C_{12} = 10,620톤, h_{12} = 0.97, $\min\{R_{12}, r_{12}\}$ = 0.75, S_{12} = 0.2 이므로, 도로능력(톤) A_{12} = 10,620(톤) × 0.97 × 0.75 × 0.2 = 1,545(톤) 이다.

따라서 구간 ① - ② 의 능력시간 W_{12}와 거리시간 T12 는 식(4) 및 식(5)를 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$W_{12} = \frac{T_t}{A_{12}} \times 24(h)$$

$$= \frac{600\text{톤}}{1,545\text{톤}} \times 24(h) = 9(h)$$

$$T_{12} = \frac{D_{12}}{V_{12}} = \frac{50(km)}{25(km/h)} = 2(h)$$



[그림 5] 도로망 네트워크 (초기단계)

마찬가지 방법으로 각 구간별 능력시간 (W_{ij})과 거리시간 (T_{ij})을 구하여 도로망 네트웍을 구성하면 [그림 5]와 같다.

[그림 5]에서 주어진 도로망 네트웍에 대해 본 연구에서 개발된 알고리듬을 적용하면 다음과 같다.

[단계 0] : OPT_P = NULL ; OPT_D = ∞ ;

$E_1 = E$; $G_1 \leftarrow (V, E_1)$; k = 1 ;

[단계 1] : (G_1)에서 거리시간만으로 최단경로를 구하면 ①-③-⑤가 되고 목적함 수는 6이며, 이때 최대 능력시간은 24이다.

$\sum_{e \in P_1} b_e + \min\{ a_e ; e \in E_1\}$ = 6 + 7 = 13 < OPT_D

[단계 2] : 24 + 6 < OPT_D 이므로

OPT_P ←{(①-③-⑤)} ;

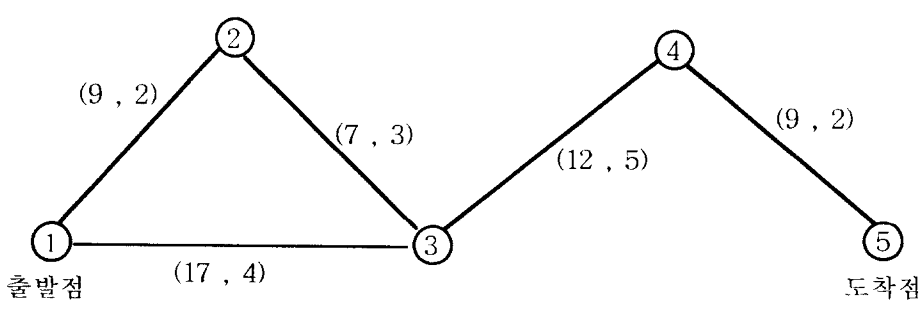
OPT_D = 30 ;

[단계 3] : 네트웍상에서 24 보다 크거나 같은 능력시간을 갖는 호를 제거한다.

$E_2 = \{ (①, ②), (①, ③), (②, ③), (③, ④), (④, ⑤)\}$

k = 2 ;

(G_2)



[그림 6] 호가 제거된 네트웍 (2 단계)

[단계 1] : (G_2)에서 거리시간 만으로 최단경로를 구한다.

최단경로를 구하면 ①-③-④-⑤가 되고 목적함수는 11이며 이 때 최대 능력시간은 17이다.

$$\sum_{e \in P_2} b_e + \min\{ a_e \; ; \; e \in E_2\} = 11 + 7 = 18 < \mathrm{OPT\_D}$$

[단계 2] : 17 + 11 < OPT_D = 30 이므로

OPT_P $\leftarrow$ {(①-③-④-⑤)} ;

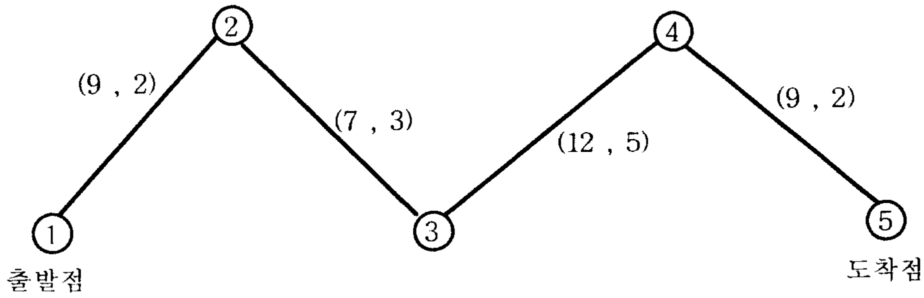
OPT_D = 28 ;

[단계 3] : 네트웍상에서 17보다 크거나 같은 능력시간을 갖는 호를 제거한다.

E_3 = {(①, ②), (②, ③), (③, ④), (④, ⑤)}

k = 3

(G_3)



[그림 7] 호가 제거된 네트웍 (3 단계)

[단계 1] : (G_3)에서 거리시간 만으로 최단경로를 구한다.

최단경로를 구하면 ①-②-③-④-⑤가 되고 목적함수는 12이며 이때 최대 능력 시간은 12이다.

$$\sum_{e\in P_3} b_e + \min\{\ a_e\ ;\ e \in E_3\} = 12 + 7 = 19 < OPT\_D$$

[단계 2] : 12 + 12 < OPT_D = 28 이므로

OPT_P ←{(①-②-③-④-⑤)} ;

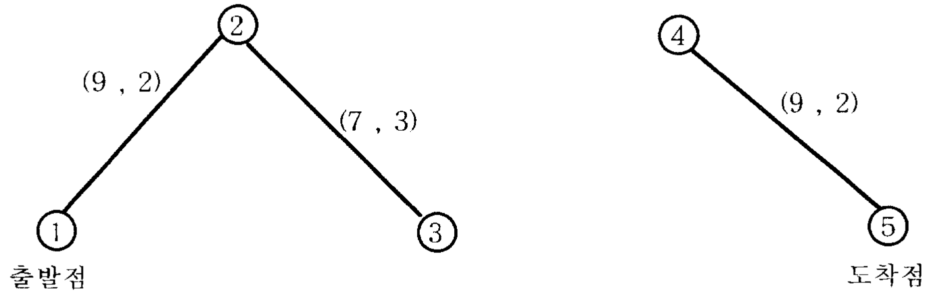
OPT_D = 24 ;

[단계 3] : 네트웍상에서 12 보다 크거나 같은 능력시간을 갖는 호를 제거한다.

$E_4 = \{(①,②),(②,③),(④,⑤)\}$

k = 4 ;

(G_4)



[그림 8] 호가 제거된 네트웍 (4 단계)

[단계 1] : (G_4)에서 거리시간 만으로 최단경로를 구한다.

p_4 == NULL 이므로 종료 ; **[단계 4]**로 간다

[단계 4] : 최적경로는 ①-②-③-④-⑤이며 이때의 목적함수 값은 24이다.

5. 결 론

적시적절한 군 물동량 수송은 전투의 승패에 결정적인 영향을 미치는 중요한 군사적 관심사라고 할 수 있다. 본 논문에서는 작전지역 도로망 분석에 기초한 최단시간 물동량 수송을 위한 수리적 모형을 설정하고 이의 다항식 알고리듬을 제시하였다. 제시된 알고리듬은 최단시간 물동량 수송경로를 선정하는 문제에 실제적으로 유용하게 활용될 수 있을 것이다.

Minoux의 알고리듬과 비교해 볼 때 본 논문에서 제시된 알고리듬이 현실적인 문제에 적합한 알고리듬이라고 할 수 있다. 본 논문에서 제시된 알고리듬은 최소-최대 요구자료의 정렬과 같은 부가적인 계산이 필요하지 않으며 한 번의 반복 과정에서 여러 개의 호가 동시에 제거될 가능성이 높기 때문에 중간 과정에서 알고리듬이 종료되고 최적경로를 찾는 경우가 많이 발생한다고 할 수 있다.

추후 연구과제로서는 최소-최소-최소-합 목적함수 구조를 가지는 최단경로문제 및 여러가지 제한사항을 가진 최소-최대-최소-합 목적함수 구조를 가지는 최단경로문제와 같은 변형된 문제들이 연구되어야 하고 실제적 적용을 위해 보다 정밀한 도로망 분석이 선결되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] 육군본부, "육로수송운용", 야전교범 55-35, 1994.

[2] 최재충, 김충영, "퍼지 최단경로기법을 이용한 부대이동로 선정에 관한 연구", 한국군사운영분석학회지, Vol. 18, No. 2, p. 66-95, 1992.

[3] D. J. White, "The Set of Efficient Solutions for Multiple Objective Shortest Path Problems", Computers & Operations Research, 2, p.101-107, 1982.

[4] E. Dijkstra, "A Note on Two Problems in Connection with Graphs", Numerical Mathermatics, Vol. 1, 1959, p.269-271.

[5] G. L. Xue and S. Z. Sun, "The Shortest Path Network and It's Applications in Bicriteria Shortest Path Problems", Network Optimization Problems, p.355-362, 1993.

[6] J. B. Rosen, S. Z. Sun and G. L. Xue, "Algorithms for the Quickest Path Problem and the Enumeration of Quickest Path", Computers & Operations Research, 18, p.579-584.

[7] M. Minoux, "Solving Combinatorial Problems with Combined Min-Max-Min- Sum Objective and Application", Mathematical Programming 45, p361-372, 1989.

[8] R. K. Ahuja, "Minimum Cost-Reliability Ratio Path Problem", Computers & Operations Research, 15, p.83-89, 1988.

[9] R. K. Ahuja , T. L. Magnanti and J. B. Orlin, Network Flows , Prentice Hall (1993)