

# Brown-Prochan 불완전 PM 모형에서 완전 PM 확률의 추정\*

임태진\*\*

## Estimating the Probability of Perfect PM in the Brown-Prochan Imperfect PM Model\*

Tae-Jin Lim\*\*

### Abstract

We propose a method for estimating the probability of perfect PM from successive failure times of a repairable system. The system under study is maintained preventively at periodic times, and it undergoes minimal repair at failure. We consider Brown-Prochan imperfect PM model in which the system is restored to a condition as good as new with probability  $p$ , and is otherwise restored to its condition just prior to failure. We discuss the identifiability problem when the PM modes are not recorded. The expectation-maximization principle is employed to handle the incomplete data problem. We assume that the lifetime distribution belongs to a parametric family with increasing failure rate. For the two parameter Weibull lifetime distribution, we propose a specific algorithm for finding the maximum likelihood estimates of the reliability parameters: the probability of perfect PM ( $p$ ), as well as the distribution parameters. The estimation method will provide useful results for maintaining real systems.

### 1. 서론

수리 가능한 시스템의 예방보전(PM, preventive

maintenance) 정책 수립에 있어서 기존의 대체(replacement) 모형을 일반화시킨 두 가지의 불완전 수리 모형이 자주 인용된다. 그 하나는 Malik[9]이 제안한 비례적 수명 감소 모형으로

\* 본 연구는 1996년 숭실대학교 교내 학술연구비 지원에 의하여 수행되었음.

\*\* 숭실대학교 산업공학과

서 최대우도에 의한 추정 방법이 제시된 바 있다[13]. 또 하나는 Brown과 Proschan[3]이 제안한 모형으로서 일정한 확률로서 수리 후 초기 상태로 복원되거나 (완전수리, perfect repair), 고장 직전의 상태로 복원되거나 (최소수리, minimal repair) 하는 모형이다. 상당히 많은 연구가 이 모형에 대하여 수행된 바 있으나, 대부분의 연구는 주어진 수명 분포와 완전 수리 확률을 전제로 한 PM 정책 모형 개발에 집중되어 있다[1,10-12]. PM을 하지 않는 불완전 수리 하의 시스템에서 완전 수리 확률을 추정하는 방법을 제안한 연구는 최근에 발표되었다[8]. Whitaker와 Samaniego[14]는 추정 문제를 다루었지만, 지수(exponential) 수명분포를 예로 들어 완전수리 확률은 수리 유형에 대한 자료가 주어지지 않는 한 식별할 수 없다고 주장하였다. 그러나 불완전 수리 모형은 시스템이 열화(degradation)하는 경우에 대하여 개발된 모형이므로 지수 수명분포와 같이 일정 고장률을 갖는 경우에는 모형 자체의 의미를 상실한다고 볼 수 있다. 따라서 대상 시스템의 수명분포는 증가 고장률을 갖는 것으로 가정하는 것이 타당하며, 이러한 경우에는 시스템의 고장 시간만으로도 완전수리 확률을 추정할 수 있다[8].

본 연구에서는 BP 불완전 수리 모형을 확장하여 불완전 PM 하에서 완전 PM 확률을 추정하는 문제를 접근하고자 한다. 그 결과는 예정된 PM의 효과를 평가하고 개선하는데 중요한 정보를 제공할 것으로 판단된다. PM 사이에 발생한 고장은 최소수리 되는 것으로 가정하고, 가용 자료는 한 시스템의 연속적 고장시간으로 한정한다. 따라서 PM 유형에 대한 자료는 없는 것으로 간주하며, 이러한 불완전 자료만으로 완전 PM 확률과 시스템 수명분포를 추정하고자 하는 것이 본 연구의 목적이다.

수리 가능한 시스템에서 연속적 고장시간 간

격(inter-failure time)을  $X_{i,j}$ 라하고, 관측되지 않은 PM 유형을 나타내는 변수를  $Z_i$ 라 하자. 수리유형 변수는 고장 과정을 지배하는 상태 변수로 볼 수 있다. 관측되지 않는 상태변수를 갖는 모형의 모수에 대한 최우추정량(MLE, maximum likelihood estimator)을 구하는 데는 Dempster, Laird, Rubin[4] 등이 제안한 기대화-최대화(EM, expectation-maximization) 방법이 유용한 것으로 알려져 있다.

2절에서는 모형을 설명하고, 3절에서는 전반적인 추정 절차의 틀을 기술한다. 4절에서는 MLE를 구하기 위한 구체적 알고리즘을 제시하고, 5절에서는 모의실험 방법과 결과를 설명한다.

## 2. Brown-Proschan 불완전 PM 모형

### 2.1 사용 기호

$T_0, T_1, \dots, T_m$  : PM 주기

$m$  : 관측된 PM 회수

$n_i$  :  $i$ 번째 PM 후의 주기에서 관측된 고장 회수, ( $i = 0, 1, \dots, m$ )

$n$  : 관측된 총 고장회수,  $n = \sum_{i=0}^m n_i$

$X_{ij}$  :  $i$ 번째 PM 후의 주기에서  $j$ 번째 고장시간 간격, ( $x_{ij}$ 는 관측값).

( $j = 1, \dots, n_i$ )

$\vec{X}_i = (X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,n_i})$  :  $i$ 번째

PM 후의 주기에서의 모든 고장시간 간격

(관측값)  $\vec{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n_i}),$

( $i = 0, 1, \dots, m$ )

$\vec{X}_i = (\vec{X}_0, \vec{X}_1, \dots, \vec{X}_i)$  :  $i$ 번째 PM 후

의 주기까지의 모든 고장시간 간격 (관측값)

$x_i = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i), (i = 0, 1, \dots, m)$ .

$Z_i$  :  $i$ 번째 PM에 대한 상태변수,

$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{완전 PM} \\ 0, & \text{최소 PM} \end{cases}$

$\vec{Z}_i = (Z_0, Z_1, \dots, Z_i)$  :  $i$ 번째 PM까지의 모든 상태변수,  $Z_0 \equiv 1$  (관측값)

$\vec{z}_i = (z_0, z_1, \dots, z_i), (i = 0, 1, \dots, m)$

$g(x; \alpha, \beta)$  : 수명분포의 확률밀도함수(pdf)

$R(x; \alpha, \beta)$  : 신뢰도함수

$\lambda(x; \alpha, \beta)$  : 수명분포의 고장률함수,

$$\lambda(x; \alpha, \beta) = g(x; \alpha, \beta) / R(x; \alpha, \beta)$$

$p$  : 완전 PM 확률,

$$p = \Pr(Z_i = 1) = E[Z_i]$$

$\theta$  : (완전 PM 확률, 수명분포의 형상모수, 척도모수)로 구성된 모수 벡터,

$$\theta = (p, \alpha, \beta)^T$$

$A_{i,j}$  :  $i$ 번째 PM 후의 주기에서  $j$ 번째 고장직 후의 시스템 age ( $0 \leq i \leq m; 0 \leq j \leq n_i$ )

( $j = 0$ 인 경우에는  $i$ 번째 PM 직후의 시스템 age로 해석)

$x_{i,j}^{(k)}$  : 최근의 완전 PM 이후  $k$ 회의 연속적 최소 PM이 수행되었다는 전제하에서,

$i$ 번째 PM 후의 주기에서  $j$ 번째 고장까지의 누적 age ( $0 \leq i \leq m; 0 \leq j \leq n_i; 0 \leq k \leq i$ )

$g_k(\vec{x}_i)$  : 최근의 완전 PM 이후  $k$ 회의 연속적 최소 PM이 수행되었다는 전제하에서,

$i$ 번째 PM 후의 주기에서 발생한 고장시간 간격들의 결합밀도함수 (joint pdf)

$f(\cdot)$  : 고장시간 간격과 상태변수의 결합 pdf,

$$f_0(\cdot) = f(\cdot; \theta_0)$$

$f(\cdot | \cdot)$  : 고장시간 간격과 상태변수의 조건부 pdf,  $f_0(\cdot | \cdot) = f(\cdot | \cdot; \theta_0)$

## 2.2 가정

1. 시스템은 주기  $T_0, T_1, \dots, T_m$ 에 따라 예방보전(PM) 된다.
2. PM 후 시스템은 확률  $p$ 로서 완전 복구되거나 (완전 PM), 확률  $1 - p$ 로서 최소 복구된다.
3. 시스템 고장 시에는 최소 수리된다. 즉, 고장 직전의 상태로 복구된다.
4. PM 유형은 관측되지 않으며, 가용한 고장 자료는 고장시간 간격뿐이다.
5. PM 직전의 시스템의 age는 이후의 PM 유형에 영향을 주지 않는다.

추가로 표현의 편의상 마지막 PM 주기에서 마지막 고장 이후  $\sum_{i=0}^m T_i$  까지 시스템 고장이 없었다고 가정한다.

## 2.3 완전 자료의 우도 함수

완전 자료  $\{(Z_i, \vec{X}_i); i = 0, 1, \dots, m\}$ 가 주어졌다고 가정하면, Whitaker와 Samaniego [14]가 제시한 식을 확장하여 다음과 같은 우도 함수를 얻을 수 있다.

$$L(p, g) = \prod_{i=1}^m [p^{z_i}(1-p)^{1-z_i}] \prod_{i=0}^m \left[ \frac{R(A_{i,0} + T_i)}{R(A_{i,n})} \prod_{j=1}^{n_i} \frac{g(A_{i,j})}{R(A_{i,j-1})} \right]$$

위의 식을 고장률함수를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$L(p, g) = \prod_{i=1}^m [p^{z_i}(1-p)^{1-z_i}] \prod_{i=0}^m \left[ \frac{R(A_{i,0} + T_i)}{R(A_{i,0})} \prod_{j=1}^n \lambda(A_{i,j}) \right] \tag{1}$$

식 (1)로부터 대수 우도함수는 아래와 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p, g) = & (\sum_{i=1}^m Z_i) \log p \\ & + [m - \sum_{i=1}^m Z_i] \log(1-p) \\ & + \sum_{i=0}^m \left[ \sum_{j=1}^n \log \lambda(A_{i,j}) \right. \\ & \quad \left. + \log R(A_{i,0} + T_i) \right. \\ & \quad \left. - \log R(A_{i,0}) \right] \end{aligned} \tag{2}$$

식 (2)로부터 완전자료  $\{(z_i, \vec{x}_i); i = 0, 1, \dots, m\}$ 가 주어진 경우에는 각 모수에 대하여 편 미분하여 구한 우도방정식을 이용하여 MLE를 구할 수 있다. 일 예로 수명분포에 무관하게 완전PM 확률  $p$ 에 대한 우도방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = & \frac{\sum_{i=1}^m z_i}{p} - \frac{m - \sum_{i=1}^m z_i}{1-p} = 0 \\ \Rightarrow p^* = & \frac{\sum_{i=1}^m z_i}{m} \end{aligned} \tag{3}$$

식 (2)에서 시스템 age 변수  $A_{i,j}$ 는 고장시간 간격과 상태변수의 함수이다. 따라서 상태변수 (PM유형)가 관측되지 않고 불완전 자료  $\{\vec{x}_i; i = 0, 1, \dots, m\}$ 만이 주어진 경우에는 불완전 자료(고장시간 간격)만의 우도함수로부터 MLE를 추정하여야 하므로 복잡한 문제가 발생한다. 불완전 자료의 우도함수를 얻는 한 가지 방법으로 가능한 모든 상태변수에 대하여 식 (1)에 주어진 완전 자료 우도함수를 더하는 방법이 있겠으나, 우도 방정식의 해를 구하는 것은 계산 상 불가능하다. 본 연구에서는 불완전 자료로부터 MLE를 구하는 방법으로서 EM 원리를 적용한 알고리즘을 제안하고자 한다.

### 3. 추정 절차의 전반적 구조

불완전 자료로부터 MLE를 구하는 방법으로서 EM 알고리즘이 매우 유용한 것으로 알려져 있다. EM 원리는 기대화 단계(expectation step)와 최대화 단계(maximization step)를 반복적으로 수행함으로써 MLE를 계산하는 것이다. 기대화 단계에서는 완전 자료 우도함수의 조건부 기대값을 계산하며, 최대화 단계에서는 이를 최대화하는 모수 값을 계산한다.

EM 알고리즘의 중요한 특징으로는 초기값으로부터 해가 점차적으로 진화하므로 수렴된 해는 적어도 국소적 최대값(local maximum)이 보장된다. 만약, 우도함수가 단봉 형태(unimodal)를 갖는다면 수렴된 해는 유일한 MLE가 된다[4].

#### 3.1 추정 절차의 개요

EM 원리는 본 연구에서와 같이 완전 자료의 우도함수는 쉽게 표현되나 불완전 자료의 우도함수는 쉽게 표현되지 않는 경우에 있어서 불완전 자료의 우도함수를 최대화하는 대신에 완전 자료 우도함수의 조건부 기대값을 최대화하여 반복적으로 해를 개선해 나가는 것이다. EM 원리를 이용한 전반적인 추정 절차의 흐름은 다음과 같다.

##### 단계 0 초기화(Initialization)

반복 첨자  $l$  을 0으로 초기화하고, 초기 모수 벡터  $\theta^{(0)}$  를 선정한다.

(수렴 조건이 만족될 때까지 단계 1, 2를 반복)

##### 단계 1 기대화 (Expectation)

완전 자료 우도함수의 조건부 기대값

$Q(\theta | \theta^{(l)})$ 을 계산한다.

**단계 2 최대화 (Maximization)**

$Q(\theta | \theta^{(\ell)})$ 를 최대화하는  $\theta^{(\ell+1)}$ 을 구한다.

**단계 3 수렴 조건 검토 (Convergence check)**

이전의 모수와 비교하여 상대오차가 한계치 이내에 들어오면 수렴을 중단한다.

$$| \theta^{(\ell+1)} - \theta^{(\ell)} | / | \theta^{(\ell)} | < \epsilon$$

$$\Rightarrow \theta^* = \theta^{(\ell+1)}$$

조건이 만족되지 않으면  $\ell \leftarrow \ell + 1$ 로 놓고 [단계 1]로 돌아간다.

전체적인 추정 절차에서 보듯이, EM 알고리즘의 핵심은 완전 자료 우도함수의 조건부 기대값  $Q(\theta | \theta^{(\ell)})$ 을 계산하는 것이다.

**3.2 완전 자료 우도함수의 기대값**

(Expected Complete Data Log Likelihood, ECLL)

기대화 단계에서는 관측된 자료 ( $x_m$ )와 이전 단계의 모수 벡터 ( $\theta_0$ )를 조건부로 하여 ECLL을 계산한다. 계산된 ECLL은 최대화 단계에서 목적함수로 이용된다. 식 (2)의 대수 우도함수에서 상태변수의 함수를 조건부 기대값으로 치환함으로써 다음과 같이 ECLL을 구할 수 있다.

$$Q(\theta | \theta_0) \equiv E[\log f(\underline{X}_m, \underline{Z}_m; \theta) | \underline{x}_m; \theta_0]$$

$$= \sum_{i=1}^m E[Z_i | \underline{x}_m; \theta_0] \log p$$

$$+ \{m - \sum_{i=1}^m E[Z_i | \underline{x}_m; \theta_0]\} \log(1-p)$$

$$+ \sum_{i=0}^m \{ \sum_{j=1}^{n_i} E[\log \lambda(A_{i,j}) | \underline{x}_m; \theta_0]$$

$$+ E[\log R(A_{i,0} + T) | \underline{x}_m; \theta_0]$$

$$- E[\log R(A_{i,0}) | \underline{x}_m; \theta_0] \}$$

(4)

기대화 단계의 가장 중요한 부분은 상태변수

가 포함된 함수의 조건부 기대값을 계산하는 것으로 귀착된다. 식 (4)에서 살펴보면  $E[h(A_{i,j}) | \underline{x}_m; \theta_0]$  유형의 기대값의 계산이 요구됨을 알 수 있다. 먼저 주목해야 할 사항은  $\underline{X}_m = \underline{x}_m$ 으로 관측된 경우, age 변수  $A_{i,j}$ 는 상태변수 벡터  $\underline{Z}_m$ 에 따라 확정적으로 결정된다는 점이다. 즉, 시스템 age 변수는 완전 자료가 관측된 후에는 상수가 되며, 고장시간 자료만이 관측된 후에는 상태변수의 확률분포를 따르게 된다. 이들의 계산에 필요한 식들을 정리해 보면 다음과 같다.

먼저 첫 번째 PM을 수행하기 이전의 시스템 age 변수는 '최소수리' 가정에 따라 아래와 같이 누적 고장시간 간격으로 표현된다.

$$A_{0,0} = 0, \quad A_{0,j} = \sum_{k=1}^j X_{0,k} \quad (5a)$$

다음으로 각 PM 직후의 시스템 age 변수는 아래와 같이 상태변수의 함수로 나타낼 수 있다.

$$A_{i,0} = \sum_{k=0}^{i-1} T_k [ \prod_{\ell=k}^i (1 - Z_\ell) ]$$

(1 ≤ i ≤ m) (5b)

마지막으로 i번째 PM 후의 주기에서 j번째 고장 직후의 시스템 age 변수는 다음과 같다.

$$A_{i,j} = A_{i,0} + \sum_{k=1}^j X_{i,k}$$

(1 ≤ i ≤ m, 1 ≤ j ≤ n<sub>i</sub>) (5c)

Age 변수로 구성된 함수의 조건부 기대값  $E[h(A_{i,j}) | \underline{x}_m; \theta_0]$ 은 다음과 같이 상태변수 (PM 이력) 표본공간을 분할하여 구성한 사상들의 조건부 기대값으로 표현 가능하다. 먼저 가장의 상태변수  $Z_0 = 1$ 을 정의하고, 사상  $H_{i,k}$ 를 'i번째 PM을 포함하여 가장 최근의 완전 PM 이후에 k회의 연속적인 최소 PM이 수행된 사상'으로 정의한다. 즉,

$$H_{i,k} = \begin{cases} \{Z_i=1\} & (k=0), \\ \{Z_{i-k}=1, Z_{i-k+1}=0, \dots, Z_i=0\} & (1 \leq k \leq i) \end{cases} \quad (0 \leq i \leq m) \quad (6)$$

즉, 사상  $H_{i,k}$ 는  $(i-k)$ 번째 PM이 완전하고 이후  $k$ 회의 연속적 최소 PM이 수행된 사상을 나타낸다. 상태변수  $Z_0 = 1$ 로 정의되었으므로  $\Pr(H_{0,0}) \equiv 1$ 이다.

다음으로 표현의 편의상 다음과 같이 누적시간을 정의하자.

$$\begin{cases} x_{i,0}^{(0)} \equiv 0, & (0 \leq i \leq m) \\ x_{i,0}^{(k)} \equiv \sum_{\ell=i-k}^{i-1} T_{\ell}, & (1 \leq k \leq i; 1 \leq i \leq m), \\ x_{i,j}^{(k)} \equiv \sum_{\ell=i-k}^{i-1} T_{\ell} + \sum_{\ell=1}^j x_{i,\ell}, & (1 \leq j \leq n_i; 1 \leq k \leq i; 1 \leq i \leq m) \end{cases} \quad (7)$$

즉, 누적시간  $x_{i,j}^{(k)}$ 는 사상  $H_{i,k}$ 가 발생한 경우에  $i$ 번째 PM 후  $j$ 번째 고장 시점의 시스템 age를 나타낸다. 따라서 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pr(A_{0,j} = x_{0,j}^{(0)} \equiv \sum_{\ell=1}^j x_{0,\ell} \mid \underline{x}_m) &= 1, \\ \Pr(A_{i,j} = x_{i,j}^{(k)} \mid \underline{x}_m) &= \Pr(H_{i,k} \mid \underline{x}_m) \\ & \quad (0 \leq k \leq i; 1 \leq i \leq m) \end{aligned} \quad (8)$$

이와 같이 전체 자료를 조건으로 하여 계산되는 확률  $\Pr(H_{i,k} \mid \underline{x}_m)$ 을 평활된 확률(smoothed probability)이라고 하는데, ECLL을 계산하는데 중요한 역할을 한다[6].

주어진  $i$ 에 대하여 PM 유형 사건의 집합

$\{H_{i,0}, \dots, H_{i,i}\}$ 은 상태변수의 표본공간을 분할하므로 이산형 확률분포를 갖는다. 따라서  $\sum_{k=0}^i \Pr(H_{i,k}) = 1$  이 성립하며, 식 (5)와 (8)로 부터 아래의 결과를 얻는다

$$\begin{aligned} E[h(A_{i,j}) \mid \underline{x}_m; \theta_0] &= \begin{cases} h(x_{0,j}^{(0)}) & (i=0), \\ \sum_{k=0}^i h(x_{i,j}^{(k)}) P_0(H_{i,k} \mid \underline{x}_m) & (i \geq 1). \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

표현의 편의상 PM 이력 사상의 조건부 확률을 식 (10)과 같이 배열 형태로 표현하자.

$$pz(i, k) = P_0(H_{i,k} \mid \underline{x}_m), \quad (0 \leq k \leq i; 0 \leq i \leq m) \quad (10)$$

예로써 와이블 분포의 경우에는 식 (4), (9), (10)으로부터 ECLL을 다음의 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Q(\theta \mid \theta_0) &= \sum_{i=1}^m pz(i, 0) \log p \\ &+ \{m - \sum_{i=1}^m pz(i, 0)\} \log(1-p) \\ &+ n \log \alpha - n \alpha \log \beta \\ &+ (\alpha - 1) \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=0}^i \log(x_{i,j}^{(k)}) pz(i, k) \\ &- \frac{1}{\beta^\alpha} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^i [(x_{i,0}^{(k)} + T_i)^\alpha - (x_{i,0}^{(k)})^\alpha] pz(i, k) \end{aligned} \quad (11)$$

### 4. 모수 추정 알고리즘

평활된 확률을 효율적으로 계산하기 위해서는  $P_0(H_{i,k} \mid \underline{x}_i)$  형태의 여과된 확률(filtered probability)을 먼저 계산하는 것이 바람직하다[5,6]. 이러한 확률을 계산하는 알고리즘을

다음과 같이 제안한다. 편의상  $fp(i, k) = P_0(H_{i,k} | \underline{x}_i)$ 라 하면 아래와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$fp(i, k) = \frac{P_0(H_{i,k} | \underline{x}_i)}{f_0(\underline{x}_i, H_{i,k} | \underline{x}_{i-1})} \div f_0(\underline{x}_i | \underline{x}_{i-1}) \quad (12)$$

위 식에서 분자는

$$f_0(\underline{x}_i, H_{i,k} | \underline{x}_{i-1}) = P_0(H_{i,k} | \underline{x}_{i-1}) f_0(\underline{x}_i | H_{i,k}, \underline{x}_{i-1}) \quad (13)$$

특수한 경우로서  $k = 0$ 인 경우,

$$f_0(\underline{x}_i, Z_i = 1 | \underline{x}_{i-1}) = P_0(Z_i = 1 | \underline{x}_{i-1}) f_0(\underline{x}_i | Z_i = 1, \underline{x}_{i-1}) = p_0 g_0(\underline{x}_i) \quad (14)$$

위 식에서  $g_0(\underline{x}_i)$ 는 사상  $H_{i,0} \equiv \{Z_i = 1\}$ 가 발생했다는 조건하에서  $i$ 번째 PM 후 주기에서 발생한 고장시간 간격들의 결합 pdf를 나타낸다. 또한  $k \geq 1$ 인 경우에는  $Z_i = 0$ 이므로,  $H_{i,k} = \{Z_i = 0\} \cap H_{i-1,k-1}$ 의 관계를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$P_0(H_{i,k} | \underline{x}_{i-1}) = (1 - p_0) P_0(H_{i-1,k-1} | \underline{x}_{i-1}) = (1 - p_0) fp(i-1, k-1) \quad (15)$$

식 (13)의 마지막 항은 사상  $H_{i,k}$ 가 발생했다는 조건하에서  $i$ 번째 PM 후 주기에서 발생한 고장시간 간격들의 결합 pdf로서 다음과 같이 계산된다.

$$f_0(\underline{x}_i | H_{i,k}, \underline{x}_{i-1}) = g_k(\underline{x}_i) = \left[ \prod_{j=1}^{n_i} \lambda(x_{i,j}^{(k)}) \right] R(x_{i,0}^{(k)} + T_i) / R(x_{i,0}^{(k)}) \quad (16)$$

$(0 \leq k \leq i; 0 \leq i \leq m)$

또한 식 (12)의 분모는 다음과 같이 계산된다.

$$f_0(\underline{x}_1 | \underline{x}_0) = p_0 g_0(\underline{x}_1) + (1 - p_0) g_1(\underline{x}_1) \quad (17)$$

$$f_0(\underline{x}_i | \underline{x}_{i-1}) = \sum_{k=0}^i f_0(\underline{x}_i, H_{i,k} | \underline{x}_{i-1}) \quad (18)$$

이상의 결과를 종합하여 여과된 확률을 계산하는 알고리즘을 다음과 같이 제안한다.

**여과된 확률 계산 알고리즘**

**단계 0** 식 (14), (15)와 (17)로부터 다음을 계산한다.

$$\begin{cases} f_0(\underline{x}_1, H_{1,0} | \underline{x}_0) = p_0 g_0(\underline{x}_1) \\ f_0(\underline{x}_1, H_{1,1} | \underline{x}_0) = (1 - p_0) g_1(\underline{x}_1) \end{cases}$$

$$f_0(\underline{x}_1 | \underline{x}_0) = f_0(\underline{x}_1, H_{1,0} | \underline{x}_0) + f_0(\underline{x}_1, H_{1,1} | \underline{x}_0)$$

식 (12)로부터

$$\begin{cases} fp(1, 0) = f_0(\underline{x}_1, H_{1,0} | \underline{x}_0) / f_0(\underline{x}_1 | \underline{x}_0) \\ fp(1, 1) = f_0(\underline{x}_1, H_{1,1} | \underline{x}_0) / f_0(\underline{x}_1 | \underline{x}_0) \end{cases}$$

(다음 단계를  $i = 2, \dots, m$ 에 대하여 수행)

**단계 1** 식 (13)-(16)으로부터 다음을 계산한다.

$$f_0(\underline{x}_i, H_{i,k} | \underline{x}_{i-1}) = \begin{cases} p_0 g_0(\underline{x}_i), & (k=0) \\ (1 - p_0) g_k(\underline{x}_i) fp(i-1, k-1), & (1 \leq k \leq i) \end{cases}$$

**단계 2** 식 (18)로부터

$$f_0(\vec{x}_i | x_{i-1}) = \sum_{k=0}^i f_0(x_i, H_{i,k} | x_{i-1})$$

단계 3 식 (12)로부터

$$fp(i, k) = f_0(\vec{x}_i, H_{i,k} | x_{i-1}) \div f_0(x_i | x_{i-1}), (k = 0, \dots, i)$$

다음으로 평활된 확률을 계산하는 알고리즘을 제시한다. 먼저 평활된 확률과 여과된 확률과의 관계식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$pz(m, k) = fp(m, k), (0 \leq k \leq m). \quad (19a)$$

$i = m-1, m-2, \dots, 1$ 에 대해서는 부록에서 보인 바와 같이 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$pz(i, k) = fp(i, k) f_0(\vec{x}_m, \dots, \vec{x}_{i+1} | H_{i,k}, x_i) \div f_0(x_m, \dots, x_{i+1} | x_i) \quad (0 \leq k \leq i) \quad (19b)$$

위의 식에서 관건은 우변 식의 두 번째 항을 계산하는 것이다. 먼저 다음과 같이 간소화된 기호를 정의하자.

$$dz(i, k) = f_0(\vec{x}_m, \dots, \vec{x}_{i+1} | H_{i,k}, x_i) \quad (1 \leq i \leq m-1, 0 \leq k \leq i) \quad (20a)$$

$$cp(i) = f_0(x_{i+1} | x_i), (1 \leq i \leq m-1). \quad (20b)$$

그러면 부록에서 보인 바와 같이 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$dz(m-1, k) = p_0 g_0(\vec{x}_m) + (1-p_0) g_{k+1}(\vec{x}_m) \quad (21a)$$

$$dz(i, k) = p_0 g_0(\vec{x}_{i+1}) dz(i+1, 0) + (1-p_0) g_{k+1}(\vec{x}_{i+1}) dz(i+1, k+1) \quad (1 \leq i \leq m-2, 0 \leq k \leq i) \quad (21b)$$

$$f_0(\vec{x}_m, \dots, \vec{x}_{i+1} | x_i) = cp(m-1)cp(m-2)\dots cp(i) \quad (1 \leq i \leq m-1) \quad (22)$$

위의 식들을 종합하여 평활된 확률을 계산하는 알고리즘을 다음과 같이 제안한다.

평활된 확률 계산 알고리즘

단계 0  $i = m$ 에 대하여 초기화

$$pz(m, k) = fp(m, k), (0 \leq k \leq m)$$

$$dz(m, k) = 1, (0 \leq k \leq m)$$

분모항  $D = 1$ 로 초기화

(다음 단계들을  $i = m-1, \dots, 1$ 의 순으로 수행)

단계 1  $k = 0, \dots, i$ 에 대하여 식 (21b)의

조건부 pdf  $dz(i, k)$ 를 계산한다.

단계 2 분모를 재 계산한다. [식 (22)]

$$D = D \times cp(i).$$

단계 3 여과된 확률을 이용하여 다음과 같이 평활된 확률을 계산한다. [식 (19b)]

$$pz(i, k) = fp(i, k) dz(i, k) / D, \quad (1 \leq k \leq i+1)$$

최대화 단계

최대화 단계에서는 ECLL을 최대화하는 모수를 계산한다. 예로써 2-모수 와이블 분포의 경우에는 식 (11)로부터 다음과 같은 우도방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^m pz(i, 0)}{p} - \frac{m - \sum_{i=1}^m pz(i, 0)}{1-p} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = -\frac{n\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{c(\alpha)}{\beta^\alpha} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - n \log \beta + B + \frac{\log \beta}{\beta^\alpha} c(\alpha) - \frac{c'(\alpha)}{\beta^\alpha} = 0. \quad (25)$$

위 식에서 다음과 같은 기호가 사용되었다.



$$B = \sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^i p_z(i, k) \sum_{j=1}^{n_i} \log(x_{i,j}^{(k)}),$$

$$c(\alpha) = \sum_{i=0}^m [ T_i^\alpha p_z(i, 0) + \sum_{k=1}^i \{ (\sum_{\ell=i-k}^i T_\ell)^\alpha - (\sum_{\ell=i-k}^{i-1} T_\ell)^\alpha \} p_z(i, k) ],$$

$$c'(\alpha) = \sum_{i=0}^m [ T_i^\alpha \log(T_i) p_z(i, 0) + \sum_{k=1}^i \{ (\sum_{\ell=i-k}^i T_\ell)^\alpha \log(\sum_{\ell=i-k}^i T_\ell) - (\sum_{\ell=i-k}^{i-1} T_\ell)^\alpha \log(\sum_{\ell=i-k}^{i-1} T_\ell) \} p_z(i, k) ]$$

우도방정식의 해를 구해보면, 식 (23)으로부터 완전 PM 확률은 다음과 같이 구해진다.

$$p^* = \sum_{i=1}^m p_z(i, 0) / m \tag{26}$$

그러나 수명분포의 모수는 다음과 같은 식의 해를 수치적으로 계산해야 한다.

$$\beta^\alpha = c(\alpha) / n, \text{ or } \beta = [ c(\alpha) / n ]^{1/\alpha} \tag{27}$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + B - \frac{c'(\alpha)}{c(\alpha)/n} = 0, \tag{28}$$

식 (28)의 해를 구하는 데는 Newton-Rhapson 방법과 같은 수치적 방법이 사용될 수 있다. 최대화 단계 내에서 수치적 최적해를 정확히 구하기 위해서는 많은 계산이 요구되지만, Lange[7]가 밝힌 바와 같이 최대화 단계에서는 한 번만 반복하더라도 전체적 EM 알고리즘의 해는 개선되므

로 식 (28)의 해를 정확히 계산할 필요는 없다.

## 5. 모의실험

앞에서 제시한 알고리즘을 FORTRAN 코드로 프로그램 하여 몇 가지 경우에 대하여 모의실험을 수행하였다. 시스템의 수명분포는 와이블 분포로 가정하고 각각의 경우에 대하여 1000회씩 반복 실험하여 추정의 정밀도를 비교하였다. 척도모수  $\beta$ 는 추정의 정밀도에 영향을 주지 못하므로 1.0으로 고정하고, PM 회수  $m$ , PM 주기당 고장개수  $r$ , 형상모수  $\alpha$ , 완전 PM 확률  $p$  등을 변화시켜가며 각각의 모수가 추정의 정밀도에 어떤 영향을 주는지 알아보았다.

### 5.1 PM 회수의 영향

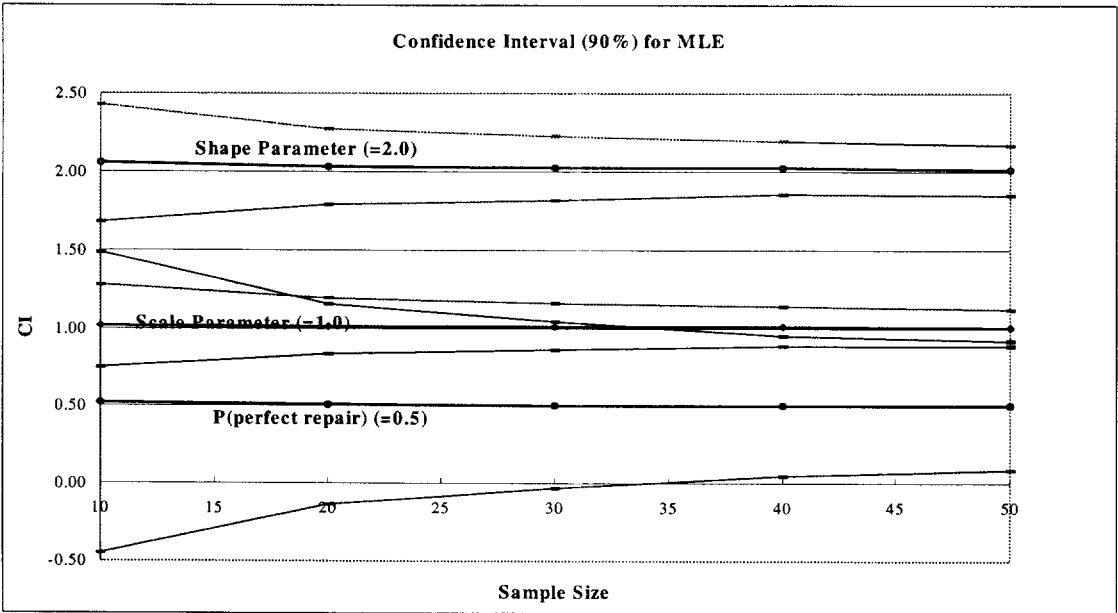
PM 주기당 고장개수  $r = 5$ , 형상모수  $\alpha = 2.0$ , 완전 PM 확률  $p = 0.5$ 로 고정하고,

[표 1] PM 회수의 증가에 따른 추정 결과

$m$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{p}$	$re(\beta)$	$re(\alpha)$	$re(p)$	$cv(\beta)$	$cv(\alpha)$	$cv(p)$
10	0.41	1.18	1.01	2.06	0.52	0.01	0.03	0.04	0.16	0.11	1.13
20	0.37	1.12	1.01	2.03	0.51	0.01	0.02	0.01	0.11	0.07	0.77
30	0.35	1.09	1.01	2.02	0.51	0.01	0.01	0.01	0.09	0.06	0.65
40	0.34	1.08	1.01	2.02	0.50	0.01	0.01	0.00	0.08	0.05	0.55
50	0.34	1.08	1.00	2.01	0.50	0.00	0.00	0.01	0.07	0.05	0.50

(\*)  $re(\cdot)$  : 상대오차(relative error),  $cv(\cdot)$  : 변동계수(coefficient of variation)

(\*\*)  $\hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_1$  : 완전 PM ( $p = 1$ ) 가정 하에서 척도모수와 형상모수 추정치



[그림 1] PM 회수의 증가에 따른 90% 신뢰구간의 변화

PM 회수  $m = 10, 20, 30, 40, 50$ 에 대하여 실험한 결과는 [표 1]과 같다.

[표 1]을 살펴보면 PM 회수가 많을수록 추정치의 정밀도가 향상됨을 알 수 있다. 이러한 추정치의 일관성(consistency)은 [그림 1]에 보인 각 모수에 대한 90% 신뢰구간을 보면 더욱 쉽게 알 수 있다. 참고로 완전 PM ( $p = 1$ ) 가정

하에서 척도모수와 형상모수 추정치도 구하였는데, 두모수 모두 심각하게 과소평가됨을 알 수 있다.

5.2 PM 주기당 고장회수의 영향

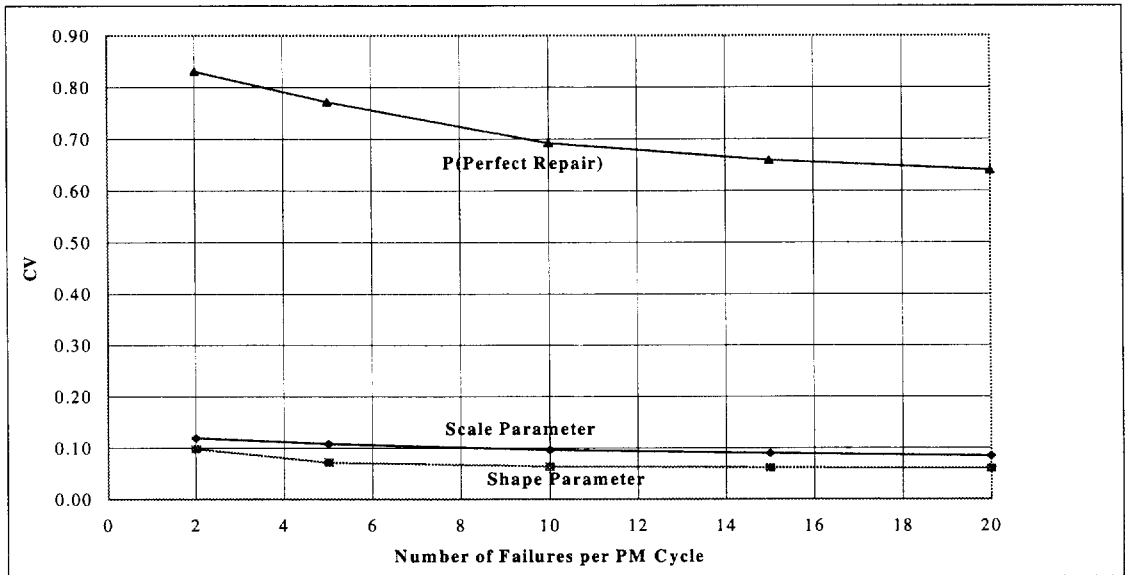
PM 회수  $m = 20$ , 형상모수  $\alpha = 2.0$ , 완전

[표 2] PM 주기당 고장회수의 증가에 따른 추정 결과

$r$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{p}$	$re(\beta)$	$re(\alpha)$	$re(p)$	$cv(\beta)$	$cv(\alpha)$	$cv(p)$
2	0.54	1.21	0.99	2.07	0.54	0.01	0.03	0.07	0.12	0.10	0.83
5	0.37	1.12	1.01	2.03	0.51	0.01	0.02	0.01	0.11	0.07	0.77
10	0.27	1.09	1.01	2.01	0.50	0.01	0.01	0.01	0.10	0.06	0.69
15	0.23	1.08	1.00	2.01	0.50	0.00	0.00	0.01	0.09	0.06	0.66
20	0.20	1.07	1.01	2.01	0.50	0.01	0.00	0.01	0.09	0.06	0.64
$m:50$	0.34	1.08	1.00	2.01	0.50	0.00	0.00	0.01	0.07	0.05	0.50

(\*)  $re(\cdot)$  : 상대오차(relative error),  $cv(\cdot)$  : 변동계수(coefficient of variation)

(\*\*)  $\hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_1$  : 완전 PM ( $p = 1$ ) 가정 하에서 척도모수와 형상모수 추정치



[그림 2] PM 주기당 고장회수의 증가에 따른 변동계수의 변화

PM 확률  $p=0.5$ 로 고정하고, PM 주기당 고장개수  $r=2, 5, 10, 15, 20$ 에 대하여 실험한 결과는 [표 2]와 같다.

[표 2]와 [그림 2]를 살펴보면 PM 주기당 고장회수가 많을수록 추정의 정밀도가 역시 향상됨을 알 수 있다. 그러나, 그 효과는 PM 회수에 비해 미약함을 알 수 있다. 일례로  $r=20$ 일 때 총 고장회수는  $n=20 \times 20 = 400$ 개인데, [표 1]에서의  $n=50, r=5$ 의 경우에 비해

더 많은 고장개수를 갖고서도 추정의 정밀도가 열세임을 볼 수 있다.

### 5.3 노후화 경향(형상모수)의 영향

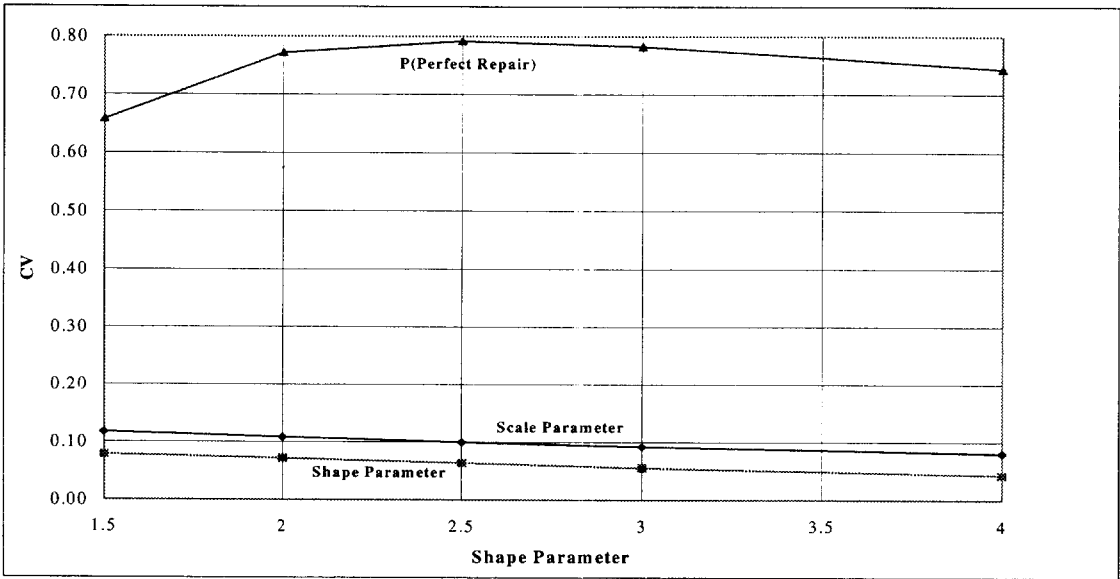
PM 회수  $m=20$ , PM 주기당 고장개수  $r=5$ , 완전 PM 확률  $p=0.5$ 로 고정하고, 형상모수  $\alpha=1.5, 2, 2.5, 3, 4$ 에 대하여 실험한 결과는 [표 3]과 같다.

[표 3] 노후화 경향(형상모수)의 증가에 따른 추정 결과

$\alpha$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{p}$	$re(\beta)$	$re(\alpha)$	$re(p)$	$cv(\beta)$	$cv(\alpha)$	$cv(p)$
1.5	0.56	1.15	1.01	1.52	0.54	0.01	0.01	0.08	0.12	0.08	0.66
2	0.37	1.12	1.01	2.03	0.51	0.01	0.02	0.01	0.11	0.07	0.77
2.5	0.28	1.06	1.01	2.54	0.50	0.01	0.02	0.01	0.10	0.06	0.79
3	0.22	1.01	1.01	3.04	0.50	0.01	0.01	0.01	0.09	0.06	0.78
4	0.16	0.93	1.00	4.06	0.50	0.00	0.01	0.01	0.08	0.04	0.74

(\*)  $re(\cdot)$  : 상대오차(relative error),  $cv(\cdot)$  : 변동계수(coefficient of variation)

(\*\*)  $\hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_1$  : 완전 PM ( $p=1$ ) 가정 하에서 척도모수와 형상모수 추정치



[그림 3] 노후화 경향 (형상모수)의 증가에 따른 변동계수의 변화

[표 3]을 살펴보면  $\alpha = 1.5$ 일 때 완전수리 확률  $p$ 의 상대오차가 유독 큰 반면, 변동계수는 상대적으로 작게 나왔다. 이 결과는 시스템 노후화 경향이 작을 때는 완전수리 확률의 추정치가 편이(bias)됨을 암시한다. 극단적인 경우로서 상수고장률을 갖는 경우에는 완전수리 확률을 추정할 수 없다[14]. 변동계수만을 다시 그린 [그림 3]을 살펴보면 일반적으로 시스템 노후화 경향이 클수록 추정의 정밀도가 향상되나, 그 효과

는 미미함을 알 수 있다.

#### 5.4 완전 PM 확률의 영향

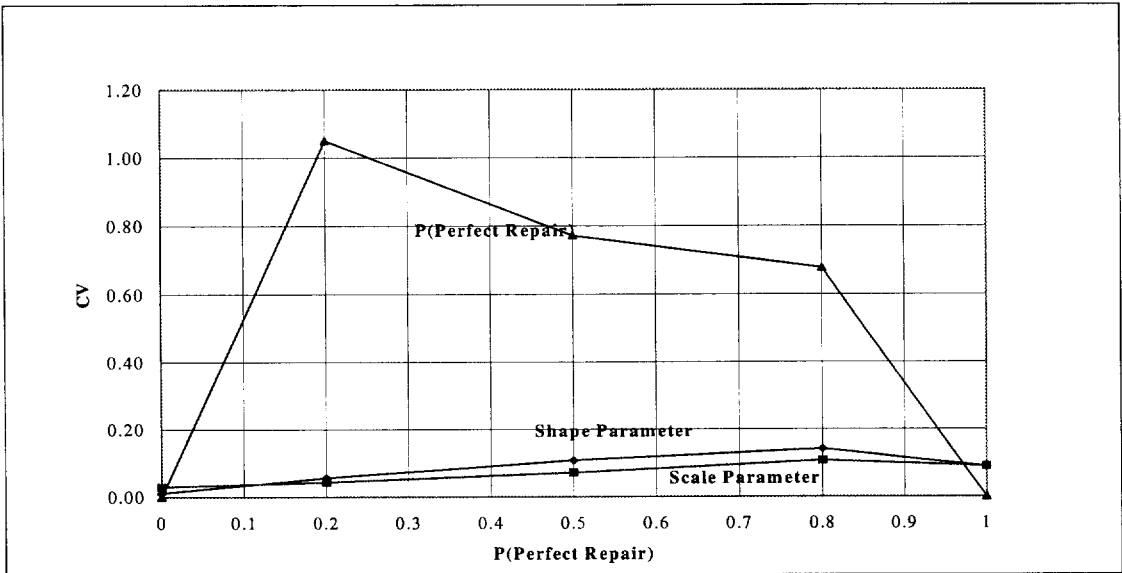
PM 회수  $m = 20$ , PM 주기당 고장개수  $r = 5$ , 형상모수  $\alpha = 2$ 로 고정하고, 완전 PM 확률  $p = 0, 0.2, 0.5, 0.8, 1$ 에 대하여 실험한 결과는 [표 4]와 같고, [그림 4]는 완전 PM 확률의 증가에 따른 변동계수의 변화를 보이고

[표 4] 완전 PM 확률의 증가에 따른 추정 결과

$p$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{p}$	$re(\beta)$	$re(\alpha)$	$re(p)$	$cv(\beta)$	$cv(\alpha)$	$cv(p)$
0	0.07	0.82	1.04	2.03	0.00	0.04	0.02	0.00	0.01	0.03	0.00
0.2	0.16	0.89	1.02	2.03	0.20	0.02	0.02	0.02	0.06	0.04	1.05
0.5	0.37	1.12	1.01	2.03	0.51	0.01	0.02	0.01	0.11	0.07	0.77
0.8	0.69	1.53	1.01	2.03	0.80	0.01	0.02	0.01	0.14	0.11	0.68
1	1.01	2.03	1.01	2.03	1.00	0.01	0.02	0.00	0.09	0.09	0.00

(\*)  $re(\cdot)$  : 상대오차(relative error),  $cv(\cdot)$  : 변동계수(coefficient of variation)

(\*\*)  $\hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_1$  : 완전 PM ( $p = 1$ ) 가정 하에서 척도모수와 형상모수 추정치



[그림 4] 완전 PM 확률의 증가에 따른 변동계수의 변화

있다.

추정의 정밀도는 완전수리확률  $p = 0$ 인 경우에 가장 좋으며,  $p = 1$ 인 경우가 그 다음이고, 0과 1 사이에서는 상대적으로 좋지 않은 것으로 나타났다. 그러나 상대오차는 모든 경우에 있어서 안정된 것으로 보인다.

## 6. 결론

본 연구를 통하여 PM의 유형 (완전 PM과 최소 PM), 즉 상태변수가 관측되지 않은 경우에도 완전 PM 확률과 수명분포를 추정하는 알고리즘을 제시하였다. PM 후의 고장시간 간격은 이전 PM의 효과에 대한 정보를 제공하며, 이러한 정보를 이용하여 EM 원리를 적용한 MLE 추정 알고리즘을 제안하였다. 모의실험 결과 추

정의 정확성과 정밀도가 만족할 만한 것으로 나타났다. 본 연구에서 제시된 추정 방법은 불완전 PM 모형에 기초한 최적 PM 정책들을 실제 시스템에 활용할 수 있는 가교 역할을 담당할 것으로 기대된다. 추후에는 PM 효과가 종속성을 갖는 경우나 공변량(covariate)에 의해 설명되는 경우[2]에 대해서도 추정 방법을 제안하고자 한다.

## REFERENCES

- [1] Bagai, I. and K. Jain, "Improvement, Deterioration and Optimal Replacement under Age-Replacement with Minimal Repair," *IEEE Trans. Rel.*, R-43 (1994) pp.156-162
- [2] Block, H., W. Borges and T. Savits, "Age

- Dependent Minimal Repair," *J. Appl. Prob.*, 22 (1985) pp.370-385.
- [3] Brown, M. and F. Proschan, "Imperfect Repair," *J. Appl. Prob.*, 20 (1983) pp.851-859.
- [4] Dempster, A.P., N.M. Laird and D.B. Rubin, "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm," *J. Royal Stat. Soc., Series B*, 39 (1977) pp.1-22.
- [5] Engel, C., and J.D. Hamilton, "Long Swings in the Dollar: Are they in the data and do markets know it ?" *The American Economic Review*, 80 (1990) pp.689-713.
- [6] Hamilton, J.D., "Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime," *J. Econometrics*, 45 (1990) pp.39-70.
- [7] Lange, K., "A Gradient Algorithm Locally Equivalent to the EM Algorithm," *J. Royal Stat. Soc., Series B*, 57 (2) (1995) pp.425-437.
- [8] Lim, T.J., "Estimating System Reliability with Fully masked data under Brown-Proschan Imperfect Repair Model," *Reliability Engineering and Systems Safety*, (1997) to appear..
- [9] Malik, M., "Reliable Preventive Maintenance Scheduling," *AIIE Trans.*, 11 (1979) pp.221-228
- [10] Nakagawa, T., "Optimum Policies When Preventive Maintenance Is Imperfect," *IEEE Trans. Rel.*, R-28 (4) (1979) pp.331-332
- [11] Nakagawa, T. and K. Yasui, "Optimum Policies for a System with Imperfect Maintenance," *IEEE Trans. Rel.*, R-36 (5) (1987) pp.631-633
- [12] Shaked, M. and J.G. Shantikumar, "Multivariate Imperfect Repair," *Oper. Res.*, 34 (4) (1986) pp.437-448
- [13] Shin, I.S., T.J. Lim and C.H. Lie, "Estimating Parameters of Intensity Function and Maintenance Effect for Repairable Unit," *Reliab. Eng. & Sys. Safety*, 54, (1996) pp.1-10
- [14] Whitaker, L. R. and F.J. Samaniego, "Estimating the Reliability of Systems Subject to Imperfect Repair," *J. Am. Stat. Assoc.*, 84 405 (1989) pp.301-309.

## 부 록

식 (19b)의 증명

$$\begin{aligned}
 pz(i, k) &= P_0(H_{i,k} | \underline{x}_m) \\
 &= f_0(\overrightarrow{x}_m, \dots, \overrightarrow{x}_{i+1}, H_{i,k} | \underline{x}_i) / f_0(\overrightarrow{x}_m, \dots, \overrightarrow{x}_{i+1} | \underline{x}_i) \\
 &= P_0(H_{i,k} | \underline{x}_i) f_0(\overrightarrow{x}_m, \dots, \overrightarrow{x}_{i+1} | H_{i,k}, \underline{x}_i) / f_0(\overrightarrow{x}_m, \dots, \overrightarrow{x}_{i+1} | \underline{x}_i)
 \end{aligned}$$

여기서  $P_0(H_{i,k} | \underline{x}_i) = fp(i, k)$ 이므로 (19b)가 성립한다.

식 (21a)의 증명

$$\begin{aligned}
 dz(m-1, k) &= f_0(\overrightarrow{x}_m | H_{m-1,k}, \underline{x}_{m-1}) \\
 &= p_0 f_0(\overrightarrow{x}_m | Z_m=1, H_{m-1,k}, \underline{x}_{m-1}) + (1-p_0) f_0(\overrightarrow{x}_m | Z_m=0, H_{m-1,k}, \underline{x}_{m-1}) \\
 &= p_0 g_0(\overrightarrow{x}_m) + (1-p_0) g_{k+1}(\overrightarrow{x}_m)
 \end{aligned}$$

식 (21b)의 증명

$$\begin{aligned}
 dz(i, k) &= f_0(\overrightarrow{x}_m, \dots, \overrightarrow{x}_{i+1} | H_{i,k}, \underline{x}_i) \\
 &= \sum_{j=0}^1 P_0(Z_{i+1}=j | H_{i,k}, \underline{x}_i) f_0(\overrightarrow{x}_m, \dots, \overrightarrow{x}_{i+1} | Z_{i+1}=j, H_{i,k}, \underline{x}_i) \\
 &= \sum_{j=0}^1 P_0(Z_{i+1}=j) f_0(\overrightarrow{x}_{i+1} | Z_{i+1}=j, H_{i,k}, \underline{x}_i) \\
 &\quad \times f_0(\overrightarrow{x}_m, \dots, \overrightarrow{x}_{i+2} | Z_{i+1}=j, H_{i,k}, \underline{x}_{i+1}) \\
 &= p_0 g_0(\overrightarrow{x}_{i+1}) dz(i+1, 0) + (1-p_0) g_{k+1}(\overrightarrow{x}_{i+1}) dz(i+1, k+1)
 \end{aligned}$$

마지막 등식은  $Z_{i+1}$ 이 1인 경우와 0인 경우로 나누어 표현한 것이며, 다음의 관계식을 사용한 것이다.  $\{Z_{i+1}=0\} \cap H_{i,k} = H_{i+1,k+1}$

식 (22)의 증명

$$\begin{aligned}
 f_0(\overrightarrow{x}_m, \dots, \overrightarrow{x}_{i+1} | \underline{x}_i) &= f_0(\overrightarrow{x}_m | \underline{x}_{m-1}) f_0(\overrightarrow{x}_{m-1} | \underline{x}_{m-2}) \cdots f_0(\overrightarrow{x}_{i+1} | \underline{x}_i) \\
 &= cp(m-1) cp(m-2) \cdots cp(i)
 \end{aligned}$$