

조기 준비기간과 후공정을 갖는 생산시스템의 분석

김승찬* · 이호우** · 윤승현 · 안부용*** · 박노익***

Analysis of a Production System with Early Set-up and Post-operation

S.C. Kim* · H.W. Lee** · S.H. Yoon · B.Y. Ahn*** · N.I. Park***

Abstract

We consider a production system with post-operation and early set-up. As soon as there are no more units(raw materials) to process and the machine becomes idle, it undergoes a post-operation. After the post-operation, if the number of waiting units is greater than or equal to m , it begins a set-up. After the set-up, if the number of units is greater than or equal to $N(\geq m)$, it begins to process the units.

We first analyze the system by employing the decomposition property of the vacation queue. We, then, propose an algorithm that finds the optimal threshold values (m^*, N^*) . Finally we present some numerical examples and interpret the system behavior.

1. 서론

후공정과 두 단계의 제어정책이 있는 단일기계의 생산시스템을 고려하자. 더 이상 가공할 부품(원자재)이 없으면 기계는 후공정(post-operation)을 갖는다. 후공정의 예를 들자면 기계의 정비시간을 들 수 있을 것이다. 후공정이 끝나면 기계

는 가공할 부품의 수가 m 개가 될 때까지 기다렸다가(준비대기기간(build-up)) 준비기간을 갖는다(만약 후공정기간 직후에 이미 가공할 부품의 수가 m 개 이상이 되면 즉시 준비기간을 갖는다.) 준비기간이 끝나면 기계는 부품의 수가 N 이 될 때까지 휴지기간(stand-by period)을 갖고 N 개 이상이 되면 부품의 가공을 시작한다(준비기간 직후에 부품의 수가 N 개 이상이

* (주) 기술

** 성균관대학교 산업공학과 교수

*** 성균관대학교 산업공학과 박사과정

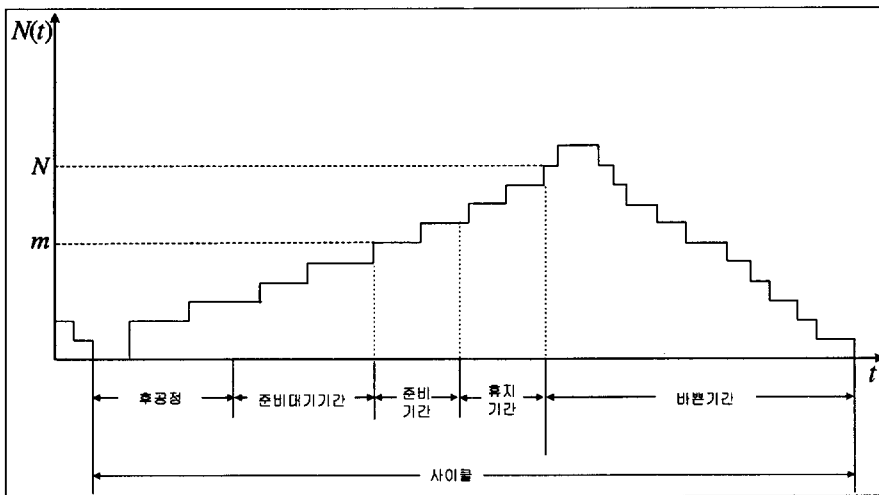
면 즉시 가공을 시작한다). 가공될 부품은 도착률 λ 의 포아송과정(Poisson process)을 따른다고 가정하고 후공정시간, 준비시간, 가공시간은 서로 독립적인 일반분포(general distribution)를 따른다고 가정한다. 이제 기계를 서버버로, 도착하는 가공품들을 고객으로 표현하면 대기행렬 시스템이 구성되며 이 시스템을 " $M/G/1/PO/(m, N)$ -정책"이라 표기하기로 하고 "후공정과 (m, N) -정책을 갖는 시스템"이라고 부르기로 한다. 여기서 'PO'는 후공정을 의미하며, (m, N) 은 준비시간과 서비스 시작점에 대한 임계점(threshold)이다. 이 시스템의 샘플경로가 <그림 1>에 나타나 있다.

이 (m, N) -정책은 대기행렬 안의 고객수가 N 명이 되어야 준비시간을 갖는 보통의 N -정책(보통의 N -정책에서는 N 명이 모여야 준비시간을 시작한다)보다 더 일반적이다. 보통의 N -정책에 대한 연구는 Yadin 과 Naor [17], Hersh-Brosh [3], Bell [1] 그리고 Winston [16] 등에 의해 이루어졌다. Lee 와 Srinivasan [6],

Lee et al. [7]은 집단도착의 경우에 대하여 분석하였다.

준비시간이 있는 N -정책의 경우, Takagi [14]는 서버버 상태, 대기고객수, 경과시간에 대한 시간중속 결합과정의 라플라스 변환식을 구했다. 또한 Takagi [13]는 N -정책과 준비시간이 있는 $M/G/1$ 유한대기행렬에서 안정상태의 행태를 분석하였다. Minh [11]은 N -정책과 준비시간을 고려한 $M/G/1$ 대기행렬에서 각 고객에 대한 도착시간과 대기시간에 대한 결합확률 분포를 유도하였다. 후공정이 없는 (m, N) -정책은 Lee 와 Park [10]에 의해 연구되었다.

Hofri [4] 와 Kella [5]는 N -정책과 서버버의 휴가를 동시에 고려한 대기행렬을 연구하였고, Lee et al. [8] [9]은 단일휴가와 복수휴가를 고려한 집단도착이 있는 N -정책에 대하여 연구하여 Fuhrmann 과 Cooper [2]의 확률적 분해성질을 확인하였다. Park and Taaffe[12]는 서버버가 휴가에서 돌아온 후 고객수가 L 미만이면 다시 휴가를 떠나고 L 이상 M 미만이면 M



<그림 1> 후공정이 있는 (m, N) -정책하의 대기행렬

이상이 될 때까지 기다리고 M 이상 U 미만이면 즉시 서비스를 시작하되 휴가중이라도 고객수가 U 이상이 되면 즉시 휴가를 중단하고 서비스를 시작하는 시스템을 분석하였다. 휴가형 대기행렬에 대한 좀더 포괄적인 논의는 Takagi [15]를 참고하기 바란다.

본 논문에서는 휴가형 대기행렬의 확률적 분해성질을 적용하여 위에서 언급한 생산시스템의 다양한 성능척도들을 유도하였다. 또한 1차 선형 비용 하에서 평균운용비용을 최소화하는 최적의 (m, N) 값을 찾는 방법을 개발하였다.

2. 분 석

본 절에서는 시스템내 고객수에 대한 분포의 확률생성함수(PGF , Probability Generating Function)를 구한다. 확률적 분해성질에 의해 휴가형 $M/G/1$ 대기행렬의 임의시점에서의 시스템 고객수에 대한 PGF 는 다음과 같다.

$$P(z) = P_{M/G/1}(z) \cdot X(z), \tag{1}$$

여기서 $P_{M/G/1}(z)$ 는 보통의 $M/G/1$ 대기행렬의 시스템 고객수분포에 대한 PGF 이고 $X(z)$ 는 서어버가 서비스를 제공하지 않는 동안의 시스템 고객수분포에 대한 PGF 이다 (Takagi[15]). Lee, et al. [7][8][9]은 이 특성을 집단도착과 N -정책이 있는 휴가형 대기행렬에 적용하였다. 만약 시스템이 완전서비스정책(exhaustive service)을 갖는다면(즉, 바쁜 서어버는 서비스를 제공할 고객이 있는 한 유힬해질 수 없다) 식(1)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$P(z) = P_{M/G/1}(z) \cdot \frac{1 - J_{(m,M)}(z)}{(1-z)E(J_{(m,M)})}, \tag{2}$$

여기서 $J_{(m,M)}(z)$ 는 바쁜기간 시작점에서의 시스템 고객수분포에 대한 PGF 이다. 식 (2)에서 우변의 두 번째 항은 이산형 재생과정에서의 $J_{(m,M)}$ 에 대한 후방향재귀시간이 된다.

다음의 기호들을 정의하자.

- λ : 고객의 도착률
- $V, V(t), V^*(\theta)$: 후공정에 대한 확률변수, 분포함수, 라플라스-스틸체스 변환(LST, Laplace-Stieltjes Transform)
- $S, S(t), S^*(\theta)$: 준비시간에 대한 확률변수, 분포함수, LST
- $Y, Y(t), Y^*(\theta)$: 서비스시간에 대한 확률변수, 분포함수, LST

확률적 분해성질을 적용하기 위하여 시스템의 상태가 후공정기간, 준비대기기간, 준비기간, 휴지기간에 있을 확률을 찾아야 한다. 확률값들은 후공정기간과 준비기간의 길이에 의존적임은 명백하다.

다음을 정의하자.

- $\gamma_i = Pr(\text{후공정기간 동안 } i\text{명의 고객이 도착}),$
- $\delta_n = Pr(\text{준비대기기간이 상태 } n\text{을 거침}).$

그러면 다음을 얻는다.

$$\gamma(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!} dV(t) \right\} \cdot z^i = V^*(\lambda - \lambda z), \tag{3}$$

γ_i 는 식(3)에서 얻어지는 z^i 의 계수이다.

준비대기기간이 상태 n 을 거치기 위해서는 n 또는 그보다 적은 수의 고객이 후공정기간 내에 도착하여야 한다. 따라서 다음을 얻는다.

$$\delta_n = \sum_{j=0}^n \gamma_j. \tag{4}$$

지시확률변수 I_n 를 다음과 같이 정의하면,

$$I_n = \begin{cases} 1, & \text{준비대기기간 중에 상태 } n \text{을} \\ & \text{거치면,} \\ 0, & \text{아니면,} \end{cases} \tag{5}$$

$\sum_{n=0}^{m-1} I_n$ 는 준비대기기간 동안 방문하는 상태의 수가 된다. $Pr(I_n = 1) = E(I_n) = \delta_n$ 로부터, $E\left(\sum_{n=0}^{m-1} I_n\right) = \sum_{n=0}^{m-1} E(I_n) = \sum_{n=0}^{m-1} \delta_n$ 를 얻을 수 있다.

<보조정리 1>

$\sum_{n=0}^{m-1} \delta_n$ 은 준비대기기간 동안 평균적으로 거처가는 상태의 수이다. ■

이제 α_k 와 β_n 을 다음과 같이 정의하자

$$\alpha_k = Pr(\text{준비시간 동안 } k \text{명의 고객이 도착}),$$

$$\beta_n = Pr(\text{휴지기간이 상태 } m+n \text{을 거쳐감}).$$

그러면, 식 (3)과 유사하게 다음을 얻는다.

$$\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k = S^*(\lambda - \lambda z). \tag{6}$$

휴지기간이 상태 $n+m$ 을 거쳐가기 위해서는, 다음 두 가지중의 한 가지 사건이 발생해야 한다:

1) 후공정기간중에 도착하는 고객수가 m 명

보다 작고 준비기간 동안 n 명 이하의 고객이 도착하거나

2) 후공정기간중에 도착하는 고객수가 m 명 이상이고, 그 고객들의 수와 준비기간 동안 도착한 고객수의 합이 $n+m$ 명 이하이어야 한다.

그러면 다음을 얻게되고

$$\beta_n = \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \sum_{j=0}^n \alpha_j + \sum_{i=m}^{m+n} \gamma_i \sum_{j=0}^{m+n-i} \alpha_j. \tag{7}$$

<보조정리 1>과 유사하게 다음을 얻는다.

<보조정리 2>

$\sum_{n=0}^{N-m-1} \beta_n$ 은 휴지기간 동안 평균적으로 거처가는 상태의 수이다. ■

<보조정리 1> 과 <보조정리 2> 에 의해 다양한 성능척도들을 유도해낼 수 있다.

2.1 유희기간

$D_{(m, N)}$ 을 유희기간의 길이라 하자. 고객의 도착은 도착률 λ 의 포아송과정을 따르므로 한 상태에 머무르는 평균 시간은 $1/\lambda$ 이 된다. 그러면 <보조정리 1> 과 <보조정리 2>로부터 다음을 얻는다.

<정리 1>

$$E(D_{(m, N)}) = E(V) + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + E(S) + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{N-m-1} \beta_n. \tag{8}$$

■

2.2 고객수에 대한 PGF

식 (2)에서 주어진 고객수에 대한 PGF, $P(z)$ 를 얻기 위해서는 바쁜기간 시작점에서의 고객수분포에 대한 PGF, $J_{(m,N)}$ 를 구해야 한다. 우선 준비기간이 끝난 시점에서의 고객수가 N 보다 작은 경우 $J_{(m,N)} = N$ 임을 알 수 있다. 이 경우가 발생할 확률은 다음과 같다.

$$Pr(J_{(m,N)} = N) = \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \sum_{j=0}^{N-i} \alpha_j + \sum_{i=m}^N \gamma_i \sum_{j=0}^{N-i} \alpha_j = \beta_{N-m} \quad (9)$$

$k > N$ 인 경우는 다음과 같다.

$$Pr(J_{(m,N)} = k) = \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \alpha_{k-m} + \sum_{i=m}^k \gamma_i \alpha_{k-i} = \beta_{k-m} - \beta_{k-m-1}, \quad (k > N). \quad (10)$$

이로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} J_{(m,N)}(z) &= z^N Pr(J_{(m,N)} = N) + \sum_{k=N+1}^{\infty} Pr(J_{(m,N)} = k) z^k \\ &= z^N \beta_{N-m} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \{\beta_{k-m} - \beta_{k-m-1}\} z^k \\ &= z^m \left[\beta_{N-m} z^{N-m} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \{\beta_{k-m} - \beta_{k-m-1}\} z^{k-m} \right] \\ &= z^m \left[\sum_{k=N}^{\infty} \beta_{k-m} z^{k-m} - z \sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_{k-m-1} z^{k-m-1} \right] \\ &= z^m (1-z) \sum_{k=N}^{\infty} \beta_{k-m} z^{k-m} \\ &= z^m (1-z) \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \beta_{k-m} z^{k-m} - \sum_{k=m}^{N-1} \beta_{k-m} z^{k-m} \right\} \\ &= z^m (1-z) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k - \sum_{k=0}^{N-m-1} \beta_k z^k \right\} \\ &= z^m \left[S^*(\lambda - \lambda z) \left\{ \sum_{i=0}^m \gamma_i + z^{-m} \left\{ V^*(\lambda - \lambda z) - \sum_{i=0}^m \gamma_i z^i \right\} \right\} + (z-1) \sum_{k=0}^{N-m-1} \beta_k z^k \right], \quad (11) \end{aligned}$$

위에서 마지막 등식은 <보조정리 1>, <보조정리 2> 그리고 식 (7)을 이용한 결과이다. 이것을 미분하면 다음을 얻는다.

$$E(J_{(m,N)}) = \lambda E(V) + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \lambda E(S) + \sum_{n=0}^{N-m-1} \beta_n. \quad (12)$$

그러면 식 (2)로부터 증명없이 다음을 얻을 수 있다.

<정리 2>

$P(z)$ 와 L 을 임의의 시점에서의 시스템내 고객수의 PGF와 평균이라고 하면,

$$P(z) = \frac{(1-\rho)(z-1)Y^*(\lambda-\lambda z)}{z-Y^*(\lambda-\lambda z)} \cdot X_{(m,N)}(z), \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{2\rho(1-\rho) + \lambda^2 E(Y^2)}{2(1-\rho)} \\
 & + \frac{\lambda^2 E(V^2) + \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \{m(m-1) - k(k-1)\} + 2[\lambda E(V) + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k] \lambda E(S)}{2E(J_{(m,N)})} \\
 & + \frac{\lambda^2 E(S^2) + 2 \sum_{j=0}^{N-m-1} (m+j) \beta_j}{2E(J_{(m,N)})}
 \end{aligned} \tag{14}$$

위에서

$$\begin{aligned}
 X_{(m,N)}(z) = & \frac{\lambda E(V)}{E(J_{(m,N)})} \cdot \frac{1 - V^*(\lambda - \lambda z)}{E(V)(\lambda - \lambda z)} + \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \delta_k z^k}{E(J_{(m,N)})} \\
 & + \frac{\lambda E(S)}{E(J_{(m,N)})} \cdot \frac{1 - S^*(\lambda - \lambda z)}{E(S)(\lambda - \lambda z)} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k z^m + \sum_{k=m}^{\infty} \gamma_k z^k \right\} + \frac{z^m \sum_{j=0}^{N-m-1} \beta_j z^j}{E(J_{(m,N)})},
 \end{aligned} \tag{15}$$

그리고 $\rho = \lambda E(Y)$. ■

2.4 평균 사이클길이와 바쁜확률

2.3 바쁜기간

$B_{(m,N)}$ 과 $B^*_{(m,N)}(\theta)$ 를 바쁜기간의 평균과 LST라고 하자. 바쁜기간 시작점에서 $J_{(m,N)}$ 명의 고객들중 i 번째 고객은 $M/G/1$ 에서의 바쁜기간을 발생시키므로 다음의 랜덤합을 만들 수 있다.

$$B_{(m,N)} = B_1 + B_2 + \dots + B_{J_{(m,N)}} \tag{16}$$

그러므로 다음의 <정리 3>이 성립한다.

<정리 3>

$$B^*_{(m,N)}(\theta) = J_{(m,N)} [B^*(\theta)] \tag{17}$$

$$E(B_{(m,N)}) = \frac{E(Y)}{1-\rho} \cdot E(J_{(m,N)}) \tag{18}$$

여기서 $B^*(\theta)$ 는 보통의 $M/G/1$ 의 바쁜기간에 대한 LST이다. ■

<정리 1>, <정리 2>와 <정리 3>으로부터, 사이클의 평균길이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 E(T_C) &= E(D_{(m,N)}) + E(B_{(m,N)}) \\
 &= \frac{\lambda E(V) + \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i + \lambda E(S) + \sum_{k=0}^{N-m-1} \beta_k}{\lambda(1-\rho)}
 \end{aligned} \tag{19}$$

서버가 바쁜 확률은 다음과 같다.

$$Pr(\text{busy}) = \frac{E(B_{(m,N)})}{E(T_C)} = \rho \tag{20}$$

본 시스템에서는 도착한 모든 고객들이 서비스를 받은 후 떠나므로 일량보존(work conservation)이 성립되고 따라서 식 (20)의 결과는 예상되었던 결과이다.

3. 최적 임계값

본 절에서는 선형 비용모형 하에서 전체적인 운영비용을 최소화 하는 최적의 m 과 N 을 결정한다. 발생 비용들을 정의하면 다음과 같다.

- C_S : 사이클당 준비비용
- C_H : 단위시간 동안 한 고객으로부터 발생되는 대기비용
- C_O : 단위시간당 운영비용
- C_I : 단위시간당 휴지기간 동안 발생하는 비용

$TC(m, N)$ 을 단위시간당 발생하는 평균비용이라고 하자. 그러면 다음을 얻을 수 있다.

$$TC(m, N)$$

$$= \frac{C_S}{E(T_O)} + C_H \cdot L + C_O \cdot \rho + C_I \cdot$$

$(1 - \rho) \cdot Pr$ (시스템이 휴지기간에 있음|서버가 유향)

$$= \frac{A + C_H \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \{m(m-1) - k(k-1)\} + 2\lambda E(S) \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + 2 \sum_{j=0}^{N-m-1} \beta_j (m+j) \right\}}{2E(J_{(m,N)})} + \frac{C_I(1-\rho) \sum_{j=0}^{N-m-1} \beta_j}{E(J_{(m,N)})} + B \tag{21}$$

여기서

$$A = C_S \cdot 2\lambda(1-\rho) + C_H \cdot \{\lambda^2 E(V^2) + \lambda^2 E(S^2) + 2\lambda^2 E(V)E(S)\},$$

$$B = C_O \cdot \rho + C_H \cdot L_{M/G/1},$$

$L_{M/G/1}$ = 보통의 $M/G/1$ 대기행렬에서의 평균 시스템 고객수.

최적 제어값 (m^*, N^*) 는 비용의 정수공간에서 2차원 추적을 통하여 찾을 수 있다. 비용함수 $TC(m, N)$ 의 볼록성(convexity) 또는 단봉성(unimodality) 여부를 증명하기가 수학적으로 상당히 어렵다. 그렇지만 컴퓨터를 통한 다양한 실험을 통하여 비용함수가 볼록함수임을 확신할 수 있다. 이제 Lee 와 Park [10]이 개발한 후공정이 없는 시스템에서의 최적 제어값을 찾는 알고리즘을 응용하기로 하자.

다음을 정의하면

$$J_k = \sum_{j=0}^{k-m} \beta_j$$

$$M_k = \sum_{j=0}^{k-m} j\beta_j$$

다음을 얻는다.

$$TC(m, k+1) - TC(m, k) = \frac{\beta_{k-m}}{\left\{ \lambda E(V) + \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i + \lambda E(S) + J_k \right\} \left\{ \lambda E(V) + \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i + \lambda E(S) + J_{k-1} \right\}} \cdot H_{(m,k)}$$

여기서 $H(m, k)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H(m, k) = & -\frac{A}{2} + C_I(1-\rho) \left\{ \lambda E(V) + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \lambda E(S) \right\} \\ & + C_H \left[k \left\{ \lambda E(V) + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \lambda E(S) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \{m(m-1) - k(k-1)\} \right. \\ & \left. - \lambda E(S) \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \sum_{i=0}^{k-m-1} (k-m-i) \beta_i \right]. \end{aligned}$$

다음의 부등관계가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\frac{\beta_{k-m}}{\left\{ \lambda E(V) + \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i + \lambda E(S) + J_k \right\} \left\{ \lambda E(V) + \sum_{i=0}^{m-1} \delta_i + \lambda E(S) + J_{k-1} \right\}} > 0.$$

따라서 $H(m, k)$ 의 부호가 $TC(m, k)$ 의 k 에 대한 증가, 감소여부를 결정함을 알 수 있다. n 을 $H(m, k) > 0$ 을 만족시키는 최초의 k 라고 하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} H(m, n+1) = & -\frac{A}{2} + C_I(1-\rho) \left\{ \lambda E(V) + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \lambda E(S) \right\} \\ & + C_H \left[(n+1) \left\{ \lambda E(V) + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \lambda E(S) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \{m(m-1) - k(k-1)\} \right. \\ & \left. - \lambda E(S) \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \sum_{i=0}^n (n+1-m-i) \beta_i \right] \\ = & -\frac{A}{2} + C_I(1-\rho) \left\{ \lambda E(V) + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \lambda E(S) \right\} \\ & + C_H \left[n \left\{ \lambda E(V) + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \lambda E(S) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \{m(m-1) - k(k-1)\} \right. \\ & \left. - \lambda E(S) \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \sum_{i=0}^{n-m-1} (n-m-i) \beta_i \right] + C_H \left\{ \lambda E(V) + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \lambda E(S) + J_n \right\} \\ = & H(m, n) + C_H \left\{ \lambda E(V) + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \lambda E(S) + J_n \right\} > 0 \end{aligned}$$

따라서 m 이 주어진 조건하에서 $k > n$ 에 대하여 $TC(m, k) > TC(m, n)$ 임을 알 수 있다. 즉 m 이 주어진 조건하에서 비용함수는 일단 증가하기 시작하면 계속 증가한다. 따라서 다음을 얻는다.

<정리 4>

$N^*(m)$ 를 m 이 주어진 상태에서 N 의 최

적값이라 하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} N^*(m) = & \min \left[k \geq 1 \mid k \left\{ \lambda E(V) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=0}^{m-1} \delta_k + \lambda E(S) \right\} \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^{k-m-1} (k-m-i) \beta_i \right] > B(m), \end{aligned} \quad (22)$$

여기서

$$B(m) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j \{m(m-1) - j(j-1)\} + \lambda E(S) \sum_{j=0}^{m-1} \delta_j + \frac{\frac{A}{2} - C_I(1-\rho) \left\{ \lambda E(V) + \sum_{j=0}^{m-1} \delta_j + \lambda E(S) \right\}}{C_H}$$

$$A = C_S \cdot 2\lambda(1-\rho) + C_H \cdot \{ \lambda^2 E(V^2) + \lambda^2 E(S^2) + 2\lambda^2 E(V)E(S) \}.$$

비용함수가 블록함수라고 가정하였으므로 $TC(m+1, N^*(m+1))$ 를 처음으로 증가시키는 m 과 N 을 찾기만 하면 된다.

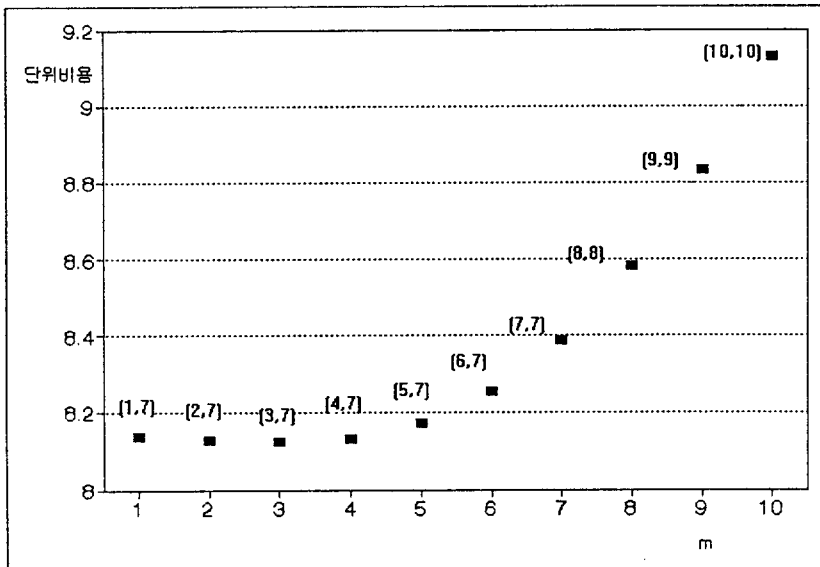
4. 성능분석

몇 가지 수치예를 보기로 하자. 이를 위하여 후공정시간, 준비시간, 서비스시간은 각각 계차

-2인 일랑분포(Erlang distribution)를 이용하고 도착률은 모든 경우에 대해 1로 고정한다. <그림 2>는 $C_S=50, C_O=1, C_H=1, C_I=0.5, \lambda=1, E(V)=2, E(Y)=2, E(S)=0.5$ 인 경우에 있어서 m 값의 변화에 따른 $TC(m, N^*(m))$ 의 변화를 나타낸다. <정리 4>를 적용하면 이 경우에 있어서 최적의 임계값들은 $(m^*, N^*) = (3, 7)$ 임을 알 수 있다.

4.1 준비비용의 변화에 따른 분석

<표 4.1>에서 볼 수 있듯이, 준비비용이 증가함에 따라 m 과 N 이 증가함을 알 수 있다. 이것은 준비비용이 높을 때는 단위시간당 발생하는 준비기간의 수를 줄이는 것이 더 경제적이라는 것을 의미하는데 이를 성취하는 방법은 되도록 늦게 서비스를 시작하는 것이다.



<그림 2> m 의 변화에 따른 $TC(M, N^*)$ 의 변화

〈표 4.1〉 준비비용의 변화에 따른 최적 제어값

$$C_0=1, C_H=1, C_I=0.1, E(V)=0.5, E(Y)=E(S)=0.5$$

(m^*, N^*) : (m, N) -정책하에서 최적값

\hat{N}^* : 보통의 N -정책하에서 N 의 최적값

준비비용	(m^*, N^*)	$TC(m^*, N^*)$	\hat{N}^*	$TC(\hat{N}^*)$
10	(1,3)	4.080560	3	4.145463
20	(3,4)	5.394758	4	5.417016
30	(4,5)	6.390571	5	6.409157
40	(4,6)	7.223985	6	7.250015
50	(5,7)	7.961180	7	8.000004
80	(7,9)	9.830430	8	9.867647
100	(8,10)	10.885592	10	10.916667
150	(10,12)	13.133084	12	13.150000

4.2 휴지비용의 변화에 따른 분석

〈표 4.2〉에서 볼 수 있듯이 휴지비용이 증가함에 따라 m 과 N 의 차이가 적어짐을 알 수 있다. 이것은 휴지비용이 커짐에 따라 조기준비의 효과가 줄어들음을 의미한다.

4.3 대기비용의 변화에 따른 분석

〈표 4.3〉은 대기비용이 커질수록 (m^*, N^*)

값이 작아짐을 보여준다. 이것은 서비스를 일찍 시작하게 되면 고객의 대기시간이 줄고 따라서 고객의 대기비용도 줄어들기 때문이다.

4.4 평균 준비시간의 변화에 따른 분석

〈표 4.4〉는 평균 준비시간이 커짐에 따라 준비시간을 일찍 시작하려는 경향을 보여준다. 이것은 준비시간이 커지면 준비시간중에 도착하는

〈표 4.2〉 휴지비용의 변화에 따른 최적 제어값

$$C_0=1, C_H=1, C_S=60, E(V)=0.5, E(Y)=E(S)=0.5$$

휴지비용	(m^*, N^*)	$TC(m^*, N^*)$	\hat{N}^*	$TC(\hat{N}^*)$
0.001	(3,8)	8.625351	7	8.666668
0.010	(4,8)	8.627465	7	8.666668
0.100	(6,8)	8.639351	7	8.666668
0.500	(7,8)	8.663392	7	8.666668
1.000	(7,7)	8.666668	7	8.666668
1.500	(7,7)	8.666668	7	8.666668

〈표 4.3〉 대기비용의 변화에 따른 최적 제어값

$$C_0=1, C_S=60, C_I=0.1, E(V)=0.5, E(Y)=E(S)=0.5$$

대기비용	(m^*, N^*)	$TC(m^*, N^*)$	\hat{N}^*	$TC(\hat{N}^*)$
0.1	(24,24)	2.988265	24	2.988265
0.5	(9,11)	6.173142	10	6.184524
1.0	(6,8)	8.639351	7	8.666668
1.5	(4,6)	10.579623	6	10.625023
3.0	(2,4)	15.154828	4	15.251048
5.0	(1,4)	19.937133	3	20.152303
10.0	(1,3)	29.571938	2	30.105678
30.0	(1,2)	60.896791	1	62.329268

〈표 4.4〉 평균 준비시간의 변화에 따른 최적 제어값

$$C_0=1, C_S=60, C_I=0.1, C_H=1, E(V)=E(S)=0.5$$

평균준비시간	(m^*, N^*)	$TC(m^*, N^*)$	\hat{N}^*	$TC(\hat{N}^*)$
0.01	(8,8)	8.625946	8	8.625946
0.10	(7,8)	8.631382	8	8.635186
1.00	(4,8)	8.648746	7	8.718753
2.00	(1,8)	8.667439	6	8.872011
5.00	(1,8)	9.069702	4	9.680785
10.00	(1,10)	11.183212	1	11.840664
20.00	(1,16)	17.365317	1	18.072611
50.00	(1,37)	38.340136	1	39.743938

고객이 많아지고 따라서 고객의 대기비용이 더 많이 발생하기 때문이다.

는 가능한 빨리 서비스를 시작하는 것이 경제적이다.

4.5 서버 이용률의 변화에 따른 분석

〈표 4.5〉는 서버 이용률의 변화에 따른 최적 제어값들을 보여준다. 서버 이용률이 증가함에 따라 평균 시스템 고객수가 증가함을 볼 수 있다. 그러므로 고객의 대기비용을 줄이기 위해서

5. 요약

본 논문은 후공정과 다중제어정책 (m, N) -정책을 갖는 생산시스템을 대상으로 한다. 우선

〈표 4.5〉 서어버 효율의 변화에 따른 최적 제어값

$$C_0=1, C_S=60, C_I=0.1, C_H=1, E(V)=0.5, E(Y)=0.5$$

ρ	(m^*, N^*)	$TC(m^*, N^*)$	\hat{N}^*	$TC(\hat{N}^*)$
0.100	(9,10)	10.920079	10	10.930952
0.300	(7,9)	9.777595	9	9.800376
0.500	(6,8)	8.639351	7	8.666668
0.700	(4,6)	7.737579	6	7.792328
0.900	(1,4)	10.087427	3	10.130461
0.950	(1,3)	16.569694	2	16.623068
0.990	(1,1)	75.449573	1	75.449573
0.999	(1,1)	750.113555	1	750.113555

임의의 시점에서의 평균고객수를 휴가형대기형렬의 분해성질을 이용하여 구하였다. 이를 이용하여 선형비용구조하에서 단위시간당 평균비용을 표현하였으며 이를 최소화하는 최적 제어값을 찾는 방법을 정리로서 제시하였다.

참 고 문 헌

[1] Bell, C., "Optimal Operation of an $M/G/1$ Priority Queue with Removable Server", *Opns. Res.*, 21(6), 1281-1289 (1973)

[2] Fuhrmann, S.W. and Cooper, R.B., "Stochastic Decompositions in the $M/G/1$ Queue with Generalized Vacations", *Opns. Res.*, 33(5), 1117-1129 (1985)

[3] Hersh, M., and Brosh, I., "The Optimal Strategy Structure of an Intermittently Operated Service Channel", *European J. Opns. Res.*, 5, 133-141 (1980)

[4] Hofri, M., "Queueing System with a Procrastinating Server", *Performance Evaluation Review*, 14(1), 245-253 (1986)

[5] Kella, O., "The Threshold Policy in the $M/G/1$ Queue with Server Vacations", *Naval Res. Logist.*, 36, 111-123 (1989)

[6] Lee, H.S., and Srinivasan, M.M., "Control Policies for the $M^X/G/1$ Queueing System", *Mgmt. Sci.*, 35(6), 708-721 (1989)

[7] Lee, H.W., Lee, S.S., Chae, K.C., "Operating Characteristics of $M^X/G/1$ Queue with N -policy", *Queueing Systems: Theory and Application*, 15, 387-399 (1994)

[8] Lee, H.W., Lee, S.S., Park, J.O., Chae, K.C., "Analysis of $M^X/G/1$ Queue with N -policy and Multiple Vacations", *J. Appl. Prob.*, 31, 467-496 (1994)

[9] Lee, S.S., Lee, H.W., Yoon S.H., Chae, K.C., "On a Batch Arrival Queue with N -policy and Single Vacation", *Compu.*

- & *Oper. Res.*, 22(2), 173-189 (1994)
- [10] Lee, H.W. and Park, J.O., "Optimal strategy in N -policy system with early set-up", *J. of Oper Res Soc*, 47, 1-8 (1996)
- [11] Minh, D.L., "Transient Solutions for Some Exhaustive $M/G/1$ Queues with Generalized Independent Vacations", *European J. Opns. Res.* 36, 197-201 (1988)
- [12] Park, J.H. and Taaffe, M.R., "The Hybrid Server Vacation Policy for the $M^X/G/1$ Queue", Tech. Report, Dept. of Operations and Management Science, Univ. of Minnesota, 1994
- [13] Takagi, H., " $M/G/1/K$ Queues with N -policy and Setup Times", *Queueing Systems: Theory and Application*, 14, 79-98 (1993)
- [14] Takagi, H., "Time-dependent Analysis of $M/G/1$ Vacation Models", *Queueing Systems: Theory and Application*, 6, 369-390 (1990)
- [15] Takagi, H., *Queueing Analysis: A Foundation of Performance Evaluation, Vol. I, Vacation and Priority Systems, Part I*, North-Holland (1991)
- [16] Winston, W., "Optimality of Monotonic Policies for Multiple Server Exponential Queueing Systems with State-dependent Arrival Rates", *Opns. Res.*, 26(6), 1089-1094 (1978)
- [17] Yadin, M. and Naor, P., "Queueing System with Removable Service Station", *Opns. Res. Quarterly*, 14, 393-405 (1963)