韓國經營科學會誌
第22卷 第1號
1997年 3月

수율을 고려한 다단계 생산라인의 Stochastic LP 모형*

최인찬** · 박광태***

A Stochastic LP Model for a Multi-stage Production System with Random Yields

In-Chan Choi · Kwangtae Park

Abstract

In this paper, we propose a stochastic LP model for determining an optimal input quantity in a single-product multi-stage production system with random yields. Due to the random yields in our model, each stage of the production system can result in defective items, which can be re-processed or scrapped at certain costs. We assume that the random yield at each stage follows an independent discrete empirical distribution. Compared to dynamic programming models that prevail in the literature, our model can easily handle problems of larger sizes.

1. 서 론

본 연구에서는 다단계 생산시스템에서의 단계별 수율분포를 고려하여 각 단계별 투입량을 결정하는 문제를 다루고 있다. 여기서 다단계 생산시스템에서의 각 단계별 수율(yield rate)은 불확실하여 재작업을 필요로 하는 경우가 발생할 수 있다.

재작업이 허용되지 않고 수요가 확실하게 주어지는 다단계 생산시스템에 대해서는 Lee와 Yano[7]가 최적 투입량 결정규칙을 제시하고 있다. 이들의 연구를 박과 김[11]은 확장하여 재작업이 허용되고 수요가 불확실한 경우까지 고려할 수 있는 모형을 제시하고 있다. 또한 박과 안[10]은 이를 한 단계 더 확장하여 재작업이 어느 단계에서든 이루어지도록 허용되고 재작업 회수도 여러 번 허용될 수 있는 모형을 제시하

* 본 논문의 심사를 맡아 유익한 의견을 제시하여 주신 익명의 심사자들께 감사드립니다.
** 고려대학교 공과대학 산업공학과 부교수
***고려대학교 경영대학 경영학과 부교수

고 있다.

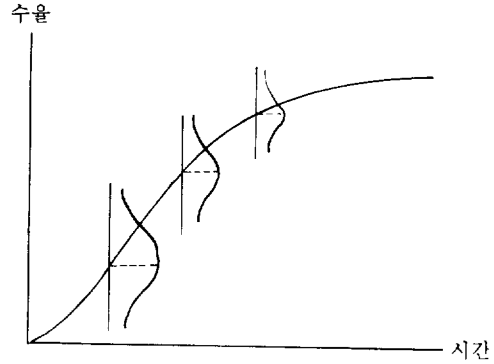
본 논문에서는 보다 일반적인 모형을 만들기 위한 사전작업으로 앞의 연구내용과는 달리 수율의 평균개념 대신 경험적 수율분포를 고려할 수 있는 모형을 제시하고자 한다. 또한 이 모형은 기존의 논문들에서 제시된 것처럼 DP에 의존하는 것(Gerchak, Wang과 Yano[4], Mazzola, McCoy와 Wagner[8], Wein[18] 등)이 아니라 Stochastic LP를 적용하여 보다 간결하게 해를 제시할 수 있다는 데 그 의의가 있다. 주지하는 바와 같이 DP인 경우 모형은 만들 수 있으나 단계가 많아질 경우 일반적으로 해를 찾기가 힘들다.

본 논문은 모두 4장으로 구성되어 있다. 2장에서는 개발된 모형을 제시할 것이며 3장에서는 이 모형을 적용한 예를 보여주고자 한다. 끝으로 4장에서는 본 연구의 결론 및 추후 연구방향을 제시하고자 한다.

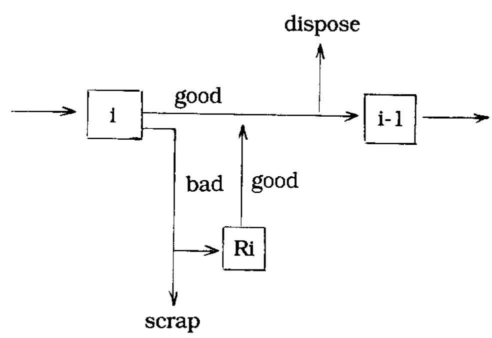
2. 모형의 개발

본 논문에서 고려하는 모형도 기존의 연구와 같이 다단계(N단계) 생산시스템이다. 각 단계에서의 수율은 불확실하여 어떤 분포를 따르는 것으로 가정되고 필요한 경우 재작업을 하게 된다. 여기서는 수율분포 그 자체를 다루고 있으며 이 수율분포는 각 단계마다 서로 독립적인 분포를 따르는 것으로 가정한다.

수율의 분포를 고려하기 위하여 여기서는 기존에 이용된 DP와는 달리 Stochastic LP를 이용하여 접근해 보고자 한다. 수율의 분포를 고려하는 경우에도 기존의 논문(Singh, Abraham과 Akella[16])에서는 beta 함수를 이용하였는데 이는 beta 함수가 0과 1사이의 정의역에서 정의되어 수율을 잘 나타낼 수 있기 때문이다. 그러나 Fromm, Dillenberger와 Wollensak[2]에 따르면 수율은 학습곡선처럼 시간이 지날수록 S자 형태를 따라 계속 향상된다고 한다. 즉 [그림 1]에서 보는 것처럼 S 곡선의 어떤 점에서의 수율분포는 시간이 지남에 따라 산포가 더욱 작은 정규분포를 가짐을 알 수 있다. 따라서 수율의 분포를 모르는 경우 무조건 0과 1사이의 값을 갖는 beta 분포를 이용하는 것보다는 S 곡선상의 수율위치에 따라 몇 가지 값을 갖는 수율분포를 고려하는 것이 바람직하다고 할 수 있다. 이렇게 되면 stochastic LP를 이용하여 각 수율의 가능값에 대해 확률을 부여함으로써 수율분포를 쉽게 고려할 수 있다.



[그림 1] 수율분포



[그림 2] 제품흐름

본 연구에서는 경험적 수율분포의 근사분포를 고려하여 생산비용, 재작업비용, 재고처분비용 그리고 재고품절비용으로 구성된 총비용을 최소로 하는 각 단계별 투입량을 결정하려고 하는 것이다. 이 모형은 또한 newsboy 문제를 복수기간(multi-period)으로 일반화시킨 형태로서의 의의가 있다. 즉 newsboy 문제의 수요분포를 수율분포로 생각하면 stochastic LP 를 이용해 복수기간 일반화 newsboy 문제도 풀 수 있다.

이제 본 연구에서 다루고자 하는 다단계 생산시스템에서의 제품흐름을 특정한 단계를 중심으로 나타내면 [그림 2]와 같다.

각 단계는 N에서 1까지 역순으로 표시되어 단계 1은 생산의 마지막 단계를 의미하도록 되어 있다. 단계 i에서의 결정사항은 단계 i에서의 투입량이다. 그리고 모든 반제품의 초기재고는 0으로 가정한다.

모형의 개발을 위해 고려되는 변수들은 다음과 같다.

I ≡ {1, 2, ⋯, N} 즉 I는 단계 1, 2, ⋯,N을 나타내는 index set

K_i ≡ {j = 1, 2, ⋯, k_i} 즉 K_i는 단계 i에서의 수율분포가 가질 수 있는 값의 개수를 나타내는 index set

q_{ij} : 단계 i의 수율분포에서 j번째 수율 (i = 1, 2, , N; j = 1, 2, ⋯, k_i)

p_{ij} : 단계 i에서 수율 q_{ij}를 가질 확률

w_i : 단계 i에서의 단위당 생산비용

h_i : 단계 i에서 생산되었지만 다음단계에서 사용되지 않은 단위당 재고처분비용

s_i : 단계 i에서의 단위당 재작업비용

r_i : 단계 i에서의 재작업후 수율

g_i : 단계 i에서의 단위당 폐기비용

π : 최종단계에서의 품절비용

h : 최종단계에서의 재고유지비용

$x_{a_N a_{N-1} \cdots a_{i+1}}$ = 단계 i까지의 수율경로가 $a_N, a_{N-1}, \cdots, a_{i+1}$을 따를 때 단계 i에서의 투입량 여기서 단계 1의 투입량은 Q로 둔다.

$y_{a_N a_{N-1} \cdots a_i}$ = 단계 i까지의 수율경로가 $a_N, a_{N-1}, \cdots, a_i$을 따를 때 단계 i에서의 폐기량

$z_{a_N a_{N-1} \cdots a_{i+1}}$ = 단계 i까지의 수율경로가 $a_N, a_{N-1}, \cdots, a_i$을 따를 때 단계 i에서의 재고처분량

$u_{a_N a_{N-1} \cdots a_1}$ = 단계 1까지의 수율경로가 $a_N, a_{N-1}, \cdots, a_1$을 따를 때 수요충족후 남은 재고량

$v_{a_N a_{N-1} \cdots a_1}$ = 단계 1까지의 수율경로가 $a_N, a_{N-1}, \cdots, a_1$을 따를 때 수요를 충족시키지 못한 고갈량

$\tilde{p}_{a_N a_{N-1} \cdots a_{i+1}}$ = 단계 i까지의 수율경로가 $a_N, a_{N-1}, \cdots, a_{i+1}$을 따를 확률
여기서

$\tilde{p}_{a_N a_{N-1} \cdots a_{i+1}} \equiv p_{N a_N} p_{N-1 a_{N-1}} \cdots p_{i+1 a_{i+1}}$로 정의한다 (p_{ia_i}는 단계 i에서의 수율이 단계 i에서의 수율분포 중 j번째 값을 가질 확률을 의미한다)

여기서는 모형유도의 편의를 위해 재작업은 한 번 허용되고 재작업 후 수율은 분포를 갖는 것이 아니라 정해진 한 값을 갖는 것으로 가정한다. 물론 여러번의 재작업 허용과 재작업 후 수율의 분포 고려는 약간의 모형확장을 통해 쉽게 해결될 수 있다.

이제 우리가 고려하는 상황을 위의 변수들을 이용해 다음과 같이 모형화할 수 있다.

$$\min \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{a_N \in K_N \\ \cdots \\ a_{i+1} \in K_{i+1}}} \tilde{p}_{a_N a_{N-1} \cdots a_{i+1}} x_{a_N a_{N-1} \cdots a_{i+1}} w_i \text{ (모든 단계의 생산비용)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{a_N \in K_N \\ \cdots \\ a_i \in K_i}} \tilde{p}_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} y_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} g_i \text{(모든 단계의 폐기비용)}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{a_N \in K_N \\ \cdots \\ a_i \in K_i}} [(1-q_{ia_i}) x_{a_N a_{N-1} \cdots a_{i+1}} - y_{a_N a_{N-1} \cdots a_i}] \tilde{p}_{a_N a_{N-1} \cdots a_{i+1}} s_i \text{(모든 단계의 재작업비용)}$$

$$+ \sum_{i=2}^{N} \sum_{\substack{a_N \in K_N \\ \cdots \\ a_i \in K_i}} \tilde{p}_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} z_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} h_i \text{(단계 1을 제외한 모든 단계의 재고처분비용)}$$

$$+ h \sum_{\substack{a_N \in K_N \\ \cdots \\ a_1 \in K_1}} \tilde{p}_{a_N a_{N-1} \cdots a_1} u_{a_N a_{N-1} \cdots a_1} + \pi \sum_{\substack{a_N \in K_N \\ \cdots \\ a_1 \in K_1}} \tilde{p}_{a_N a_{N-1} \cdots a_1} v_{a_N a_{N-1} \cdots a_1} \text{(단계 1에서의 재고비용과 고갈비용)}$$

subject to

$$y_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} - (1-q_{ia_i}) x_{a_N a_{N-1} \cdots a_{i+1}} \le 0 \quad i = 1,2,\cdots,N$$

(단계 i의 폐기량에 대한 제약식)

$$x_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} = [(1-q_{ia_i}) x_{a_N a_{N-1} \cdots a_{i+1}} - y_{a_N a_{N-1} \cdots a_i}] r_i + q_{ia_i} x_{a_N a_{N-1} \cdots a_{i+1}} - z_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} \quad i = 1,2,\cdots,N$$

(단계 i의 투입량에 대한 제약식)

$$u_{a_N a_{N-1} \cdots a_1} \ge (x_{a_N a_{N-1} \cdots a_1} - D) \quad i=1,2,\cdots,N$$

(단계 1의 재고량에 대한 제약식)

$$v_{a_N a_{N-1} \cdots a_1} \ge (D - x_{a_N a_{N-1} \cdots a_1}) \quad i=1,2,\cdots,N$$

(단계 1의 고갈량에 대한 제약식)

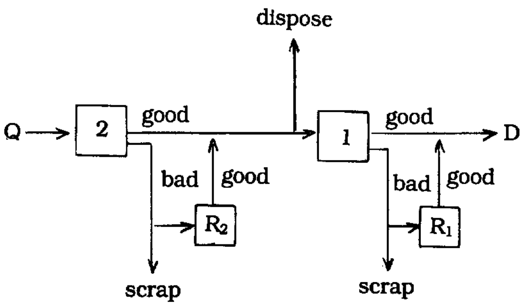
$$x_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} \ge 0 \quad i = 1,2,\cdots,N$$
$$y_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} \ge 0 \quad i = 1,2,\cdots,N$$
$$z_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} \ge 0 \quad i = 1,2,\cdots,N$$
$$u_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} \ge 0 \quad i = 1,2,\cdots,N$$
$$v_{a_N a_{N-1} \cdots a_i} \ge 0 \quad i = 1,2,\cdots,N$$

여기서 $\tilde{p}_{N+1} \equiv 1$, $x_{N+1} \equiv Q$, $a_{N+1} \equiv 0$, $z_{a_N a_{N-1} \cdots a_1} = 0$으로 정의한다.

참고로 변수의 수의 증가는 $5 \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{i} k_{N+j-i}$ 를 따른다. 예를 들어 단계의 수가 10이고 수율을 나타내는 확률변수가 각 단계별로 3개의 값을 가질 수 있을 때 stochastic LP에 사용되는 총결정 변수의 수는 $(\frac{3^{11}-1}{2}) = 442,865$ 개로 OSL, *Cplex*® 등 현재 이용가능한 LP Package로 처리할 수 있다. 이 정도의 규모면 현실적인 문제는 충분히 모형화될 수 있고 이보다 큰 문제일 경우 분해해법(decomposition method)과 modeling할 때 총괄해법(aggregation method)을 적절히 이용하여 해결할 수 있다.

3. 수치예

[그림 3]에서 보여지는 2단계 시스템을 고려해보자. 만족시켜야 할 최종수요는 1000개로 주어져 있다. 단계 2에서의 수율은 0.8이 될 확률이 2/3이고 0.85가 될 확률은 1/3이라고 하자. 그리고 단계 1에서의 수율은 0.8이 될 확률이 1/3이고 0.9가 될 확률이 2/3라고 하자. 그리고 단계 1과 단계2에서 불량으로 판명된 것은 각 단계별로 재작업을 할 지 아니면 폐기처분을 할 지를 결정하여야 한다. 재작업을 하는 경우에 수율은 단계 1에서는 0.75, 단계 2에서는 0.8로 가정한다. 기타 필요한 자료는 [표 1]에 주어져 있다.



[그림 3] 수치예 그림

[표 1] 수치예 자료

단계 / 비용및 비율	단계 2	단계 1
단위당 생산비용	0.5	0.55
단위당 재작업비용	0.2	0.35
단위당 폐기비용	0.03	0.03
위당 재고처분(유지)비용	0.05	0.2
단위당 재고고갈비용	N/A	2.5

해를 구하기 위해 아래와 같이 stochastic LP 형태로 모형화한다.

Min $0.5367Q + 0.4135\,x_1 + 0.1833\,x_2 - 0.1133\,y_1 - 0.0567\,y_2$
$- 0.071\,y_{11} - 0.1423\,y_{12} - 0.0356\,y_{21} - 0.0711\,y_{22}$
$+ 0.0333\,z_1 + 0.0167\,z_2 + 0.0444\,u_{11} + 0.0889\,u_{12} + 0.0222\,u_{21} + 0.0444\,u_{22}$
$+ 0.5555\,v_{11} + 1.1112\,v_{12} + 0.2777\,v_{21} + 0.5555\,v_{22}$

subject to

$-0.2Q + y_1 \leq 0$ (첫 단계에서의 수율이 0.8인 경우의 폐기량에 대한 제약식)

$-0.15Q + y_2 \leq 0$ (첫 단계에서의 수율이 0.85인 경우의 폐기량에 대한 제약식)

$-0.96Q + x_1 + 0.8\,y_1 + z_1 = 0$
(첫 단계에서의 수율이 0.8인 경우의 최종단계의 투입량에 대한 제약식)

$-0.97Q + x_2 + 0.8\,y_2 + z_2 = 0$
(첫 단계에서의 수율이 0.85인 경우의 최종단계의 투입량에 대한 제약식)

$-0.2\,x_1 + y_{11} \leq 0$

$-0.1\,x_1 + y_{12} \leq 0$

$-0.2\,x_2 + y_{21} \leq 0$

$-0.1\,x_2 + y_{22} \leq 0$

$-0.95\,x_1 + 0.75\,y_{11} + x_{11} = 0$

$-0.975\,x_1 + 0.75\,y_{12} + x_{12} = 0$

$-0.95\,x_2 + 0.75\,y_{21} + x_{21} = 0$

$-0.975\,x_2 + 0.75\,y_{22} + x_{22} = 0$

$-u_{11} + x_{11} \leq 1000$ (최종단계에서의 재고량에 대한 제약식)

$-u_{12} + x_{12} \leq 1000$
$-u_{21} + x_{21} \leq 1000$
$-u_{22} + x_{22} \leq 1000$
$v_{11} + x_{11} \geq 1000$ (최종단계에서의 고갈량에 대한 제약식)
$v_{12} + x_{12} \geq 1000$
$v_{21} + x_{21} \geq 1000$
$v_{22} + x_{22} \geq 1000$
$x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, x_{11}, x_{12}, z_{21}, x_{22}, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22} \geq 0$
$u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22} \geq 0$
(참고 : 위의 제약식에서 설명이 되지 않은 부분은 같은 방식으로 의미를 해석하면 됨)

위의 stochastic LP를 푼 결과 14 step만에 다음과 같이 해를 얻었다.

$Q = 1068.38,\ x_1 = 1025.64,\ x_2 = 1036.33,$
$y_1 = 0,\ y_2 = 0,$
$y_{11} = 0,\ y_{12} = 0,\ y_{21} = 0,\ y_{22} = 13.89,$
$z_1 = 0,\ z_2 = 0,$
$u_{11} = 0,\ u_{12} = 0,\ u_{21} = 0,\ u_{22} = 0,$
$v_{11} = 25.64,\ v_{12} = 0,\ v_{21} = 15.49,\ v_{22} = 0,$
$x_{11} = 974.36,\ x_{12} = 1000,\ x_{21} = 984.51,$
$x_{22} = 1000$

이 경우에 생산비용, 폐기비용, 재작업비용, 재고처분비용과 최종단계에서의 재고비용 및 고갈비용으로 이루어진 총비용은 1205.01로 최소가 된다.

4. 결론 및 추후 연구방향

이상으로 stochastic LP를 이용하여 수율의 분포자체를 보다 현실적으로 고려할 수 있는 모형을 제시하였다는 데 본 연구의 의의가 있다. 이처럼 stochastic LP를 이용하는 경우 평균수율을 이용한 DP접근방법과는 달리 실제수율 결과에 따라 최적 policy를 제시할 수 있음을 예제를 통해 보여주고 있다. 끝으로 이 모형을 통해 newsboy 문제를 복수기간인 경우에도 쉽게 일반화시킬 수 있음을 알 수 있다.

추후 연구방향으로는 복수제품의 경우까지 고려한 보다 일반적인 모형을 도출해볼 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] Dance, D. and R. Jarvis, "Using Yield Models to Accelerate Learning Curve Progress," ***IEEE Trans. on Semiconductor Manufacturing,*** Vol. 5 (1992), pp. 41-46.

[2] Fromm, H., C. Dillenberger and A. Wollensak, "Optimization in Microelectronics Manufacturing," ***Optimization in Industry,*** John Wiley & Sons, West Sussex, England, 1993.

[3] Gerchak, Y., R.G. Vickson and M. Parlar, "Periodic Review Production Models with Variable Yield and Uncertain Demand," ***IIE Trans.,*** Vol. 20 (1988), pp. 144-150.

[4] Gerchak, Y., Y. Wang and C.A. Yano,

"Lot Sizing in Assembly System with Random Component Yields," ***IIE Trans.***, Vol. 26 (1994), pp. 19-24.

[5] Henig, M. and Y. Gerchak, "The Structure of Periodic Review Policies in the Presence of Random Yield," ***Opns. Res.***, Vol. 38 (1990), pp. 634-643.

[6] Johnson, L.A. and D.C. Montgomery, ***Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control***, John Wiley & Sons, New York, 1974.

[7] Lee, H.L. and C.A. Yano, "Production Control in Multistage Systems with Variable Yield Losses," ***Opns. Res.***, Vol. 36 (1988), pp. 269-278.

[8] Mazzola, J.B., W.F. McCoy and H.M. Wagner, "Algorithms and Heuristics for Variable Yield Lot Sizing," ***Naval Research Logistics Quarterly***, Vol. 34 (1987), pp. 67-86.

[9] Moinzadeh, K. and H.L. Lee, "A Continuous Review Inventory Model with Constant Resupply Time and Defective Items," ***Naval Research Logistics Quarterly***, Vol. 34 (1987), pp. 457-468.

[10] Park, Kwangtae and Bong-Geun Ahn, "A Model for determining Optimal Input Quanity in a Semiconductor Production Line considering Yield Randomness and Demand Uncertainty," ***J. of Korean ORMS Society***, Vol. 20 (1995), pp. 27-34.

[11] Park, Kwangtae and Yun Sang Kim, "Input Quantity Control in a Multi-Stage Production System with Yield Randomness, Rework and Demand Uncertainty," ***J. of Korean ORMS Society***, Vol. 18 (1993), pp. 151-157.

[12] Pentico, D.W., "Multistage Production System with Random Yield : Heuristics and Optimality," ***Int. J. of Prod. Res.***, Vol. 32 (1994), pp. 2455-2462.

[13] Rosenblatt, M.J. and H.L. Lee, "Economic Production Cycles with Imperfect Production Processes," ***IIE Trans.***, Vol. 18 (1986), pp. 48-55.

[14] Sepehri, M., E.A. Silver and C. New, "A Heuristic for Multiple Lot Sizing for an Order under Variable Yield," ***IIE Trans.***, Vol. 18 (1986), pp. 63-69.

[15] Shih, W., "Optimal Inventory Policies when Stockouts Result from Defective Products," ***Int. J. Prod. Res.***, Vol. 18 (1986), pp. 677-686.

[16] Singh, M.R., C.T. Abraham and R. Akella, "A Wafer Design Problem in Semiconductor Manufacturing for Reliable Customer Service," IEEE Trans. on CHMT, Vol. 13 (1990), pp. 103-108.

[17] Stapper, C.H., "Fact and Fiction in Yield Modeling," ***Microelectronics J.***, Vol. 20 (1989), pp. 129-151.

[18] Wein, A.S., "Random Yield, Rework and Scrap in a Multistage Batch Manufacturing Environment," ***Opns. Res.***, Vol. 40 (1992), pp. 551-563.

[19] Yao, D.D., "Optimal Run Quantities for an Assembly System with Random Yields," ***IIE Trans.***, Vol. 20 (1988), pp. 399-403.

[20] Zhang, X. and Y. Gerchak, "Joint Lot Sizing and Inspection Policy in an EOQ Model with Random Yield," ***IIE Trans.***, Vol. 22 (1990), pp. 41-47.