

# 강성 변경에 따른 연속체 구조물의 동특성 변화 예측

이 정 윤\*

## Prediction of Dynamic Characteristics of Continuous Structures due to the Modification of Stiffness

Jung Youn Lee\*

### Abstract

This paper derives the generalized stiffness to find dynamic characteristics and its derivatives of a continuous system. And a new sensitivity analysis method is presented by using the amount of change of generalized stiffness and vibrational mode caused by the variation of stiffness. In this paper, to get or detect appropriate results, cantilever beam and stepped beam are used. Deviations of sensitivity coefficient, natural frequency, and vibrational mode are calculated as result, and compared with the theoretical exact values.

Keywords : Natural Frequency(고유진동수), Vibration Mode(진동모드), Generalized stiffness(일반강성), Generalized mass(일반질량), Sensitivity Analysis(감도해석)

### 1. 서 론

구조물에서의 결함, 예를 들어 부식, 피로, 파괴 그리고 생산 공정 중의 잘못된 조립 등은 흔히 발생되며 그 결함은 겉으로 잘 드러나지 않아 발견하기 힘든 경우가 많다. 이를 해결하기 위하여 엑스레이, 초음파 그리고 응력 해석 등 많은 방법들이 연구되어져 왔고 그들은 나름대로 구조물의 결함을 찾는데 장단점을 가지고 있다.

최근 수십 년간 진동을 이용하여 구조물의 결함 및 위

치를 찾는 여러 가지의 시도가 있어 왔다. 구조물 내에서 균열(crack)이 생기면 이의 변화는 구조물 전체 질량에 주는 영향보다는 구조물의 강성(stiffness)에 더 많은 변화를 야기시키게 된다. 하지만 고유진동수는 강인하여 그 위치가 잘 변하지 않아 눈에 보이는 변화를 얻었을 때에는 이미 구조물이 큰 결함을 가진 후가 된다.

균열이 있는 구조물의 동특성 변화에 대한 연구로는 T.G.Chondros 등<sup>(1)</sup>이 용접된 구조물에서의 균열 깊이 변경에 따른 고유진동수 변화에 대해 연구하였으며 Cawley 등<sup>(2)</sup>은 고유진동수 변화로부터 균열 깊이와 위치를 예측하기 위한 실험 기술을 발전시켰다. 유한요소

\* 경기대학교 기계공학과

법을 이용한 구조 재해석은 Hagiwara 등<sup>(3)-(5)</sup>이 구조 재해석으로부터 고유진동수와 고유 모드 감도 해석을 하였다. 연속계의 구조 재해석은 Seto<sup>(6)</sup>가 연속계에 부가 질량 부착 후 동특성 변화율로부터 등가질량을 산출하여 동흡진기에 응용하였다. 이 정운 등<sup>(7)</sup>은 Γ형 구조물에 부가 질량 부착 후 동특성 변화로부터 질량 감도를 구하여 등가 질량을 산출하고 임의의 점 사이에 부가 질량과 등가 질량 관계를 규명하였다.

본 연구에서는 구조물의 손상된 위치를 구하기 위한 기초적인 연구로써 강성 감도해석하였으며, 연속체의 진동 모드를 구하여 일반 강성을 유도하였고 강성 변경에 따른 일반 강성 변화량을 산출하여 새로운 강성 감도해석 방법을 제안하였으며, 타당성을 검증하기 위해 외팔보, 계단보에 적용하여 감도계수, 고유진동수, 진동모드의 변화량을 예측하고 이론 치와 비교하였다.

## 2.0 이론

### 2.1 경계 조건을 이용한 진동모드 계산

보는 Euler보로 가정하였으며 Fig.1에 나타난 요소의 양단의 처짐과 기울기를 이용하여 진동모드를 구하였다.

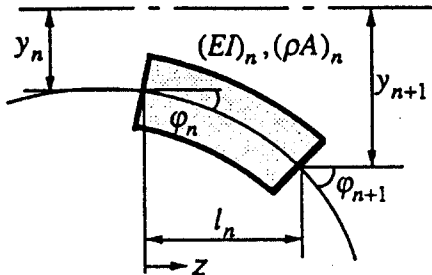


Fig.1 Definition of coordinate and variables for a beam

미분방정식은

$$EI = \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = -\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dots\dots\dots (1)$$

이며 EI는 굽힘강성, ρ는 밀도, A는 단면적이다.

식(1)의 i번째 진동모드를 y<sub>i</sub>라 하면 다음과 같다.

$$y_i(z) = C_1 \cos(\lambda_i z) + C_2 \sin(\lambda_i z) + C_3 \cosh(\lambda_i z) + C_4 \sinh(\lambda_i z) \dots\dots\dots (2)$$

여기서 Fig.1에 나타난 경계 조건

$$y_i(0) = y_n, y_i(l_n) = y_{n+1}, y_i'(0) = \varphi_n, y_i'(l_n) = \varphi_{n+1} \dots\dots (3)$$

을 식(2)에 대입하면 다음과 같다.

$$C_1 = (b_1 a_4 - b_2 a_2) / (a_1 a_4 - a_2 a_3), C_2 = (a_1 b_2 - b_3 a_1) / (a_1 a_4 - a_2 a_3), C_3 = y_n - C_1, C_4 = (\varphi_n - \lambda_i C_2) / \lambda_i$$

여기서

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(\lambda_i l_n) - \cosh(\lambda_i l_n), a_2 = -\lambda_i (\sin(\lambda_i l_n) - \sinh(\lambda_i l_n)), \\ a_3 &= -\lambda_i (\sin(\lambda_i l_n) + \sinh(\lambda_i l_n)), a_4 = \lambda_i (\cos(\lambda_i l_n) - \cosh(\lambda_i l_n)), \\ b_1 &= y_{n+1} - y_n \cosh(\lambda_i l_n) - \varphi_n / \lambda_i \sinh(\lambda_i l_n), \\ b_2 &= \varphi_{n+1} - \lambda_i y_n \sinh(\lambda_i l_n) - \varphi_n \cosh(\lambda_i l_n) \end{aligned}$$

이다.

### 2.2 진동모드를 이용한 일반강성 계산

Fig.1의 n번째 요소의 일반강성을 k<sub>ii</sub>(n)이라고 하고 전체 요소 수를 n, 전체 요소의 일반강성을 k<sub>ii</sub>라 하면

$$\begin{aligned} k_{ii}(n) &= \int_0^{l_n} EI(z) y_n'^2 dz \dots\dots\dots (4) \\ &= \int_0^{l_n} EI(z) \{ (C_1 \cos \lambda_i z + C_2 \sin \lambda_i z + C_3 \cosh \lambda_i z + C_4 \sinh \lambda_i z)^2 \} dz \\ &= \int_0^{l_n} EI(z) \lambda_i^4 \{ C_1^2 \cos^2 \lambda_i z + C_2^2 \sin^2 \lambda_i z + C_3^2 \cosh^2 \lambda_i z + C_4^2 \sinh^2 \lambda_i z + 2C_1 C_2 \cos \lambda_i z \sin \lambda_i z + 2C_1 C_3 \cos \lambda_i z \cosh \lambda_i z - 2C_1 C_4 \cos \lambda_i z \sinh \lambda_i z - 2C_2 C_3 \sin \lambda_i z \cosh \lambda_i z - 2C_2 C_4 \sin \lambda_i z \sinh \lambda_i z + 2C_3 C_4 \cosh \lambda_i z \sinh \lambda_i z \} dz \dots\dots (5) \end{aligned}$$

여기서 EI(z) = EI(n)

$$\begin{aligned} k_{ii}(n) &= EI(n) \lambda_i^4 \{ C_1^2 / 2 (l_n + \sin(\lambda_i l_n) \cos(\lambda_i l_n) / \lambda_i) + C_2^2 / 2 (l_n - \sin(\lambda_i l_n) \cos(\lambda_i l_n) / \lambda_i) + C_3^2 / 2 (l_n + \sinh(\lambda_i l_n) \cosh(\lambda_i l_n) / \lambda_i) + C_4^2 / 2 (-l_n + \sinh(\lambda_i l_n) \cosh(\lambda_i l_n) / \lambda_i) - C_1 C_2 (\cos(\lambda_i l_n)^2 - \sin(\lambda_i l_n)^2 - 1) / (2\lambda_i) - C_1 C_3 (\sinh(\lambda_i l_n) \cos(\lambda_i l_n) + \cosh(\lambda_i l_n) \sin(\lambda_i l_n)) / \lambda_i - C_1 C_4 (\cosh(\lambda_i l_n) \cos(\lambda_i l_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sinh(\lambda_{i1n})\sin(\lambda_{i1n})-1\}/\lambda_i \\
 & - C_2C_3\{\sinh(\lambda_{i1n}) \sin(\lambda_{i1n}) \\
 & - \cosh(\lambda_{i1n})\cos(\lambda_{i1n}) + 1\}/\lambda_i \\
 & - C_2C_4\{\cosh(\lambda_{i1n}) \sin(\lambda_{i1n}) \\
 & + \sinh(\lambda_{i1n}) \cos(\lambda_{i1n})\}/\lambda_i \\
 & + C_3C_4 \{\cosh(\lambda_{i1n})^2 \\
 & + \sinh(\lambda_{i1n})^2 - 1\}/(2\lambda_i) \\
 \\
 k_{ii} = & \sum_{n=0}^{\infty} k_{ij}(n) \dots\dots\dots (6)
 \end{aligned}$$

### 2.3 반복법에 의한 감도 해석

#### 2.3.1 강성 변화에 의한 일반강성의 변화

Fig.2와 같이 강성 변화  $\Delta EI$ 가 a,b점 사이에 분포되어 있다고 하면 일반강성  $k_{ij}$ 는 다음<sup>(8)</sup>과 같다

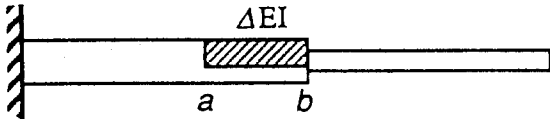


Fig.2 Model of stiffness modification beam

$$\begin{aligned}
 k_{ii}^2 = & \int_0^1 EI(z)y_i^2 dz \dots\dots\dots (7) \\
 = & \int_0^1 EI_o(z)(y_{oi} + \Delta y_{oi})^2 dz \\
 & + \int_a^b \Delta EI(y_{oi} + \Delta y_{oi})^2 dz
 \end{aligned}$$

여기서  $\int_b^a \Delta EI y_{oi} y_{oj} dz = \Delta EI_{ij}$

$$\Delta y_{oi} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} y_{ok} \dots\dots\dots (8)$$

로 나타내면 다음과 같다.

$$k_{ij} = k_{oji} + 2\alpha_{ii}k_{oji} + \sum_{k=1}^n k_{okk} \alpha_{ki}^2 + \Delta EI_{ij} +$$

$$2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta EI_{ik} + \sum_{p=1}^n \alpha_{pi} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta EI_{pk} \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned}
 k_{ij} = & \int_0^1 EI(z)y_i y_j dz \dots\dots\dots (10) \\
 = & \int_0^1 EI_o(z)(y_i + \Delta y_{oi})(y_j + \Delta y_{oj}) dz \\
 & + \int_a^b \Delta EI(y_{oi} + \Delta y_{oi})(y_{oj} + \Delta y_{oj}) dz \\
 = & k_{oji} + \alpha_{ij}k_{oji} + \alpha_{ji}k_{oji} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} k_{okk} \\
 & + \Delta EI_{ij} + \sum \alpha_{ki} \Delta EI_{ik} \\
 & + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta EI_{jk} + \sum_{p=1}^n \alpha_{pi} \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta EI_{pk}
 \end{aligned}$$

여기서  $k_{ij} = k_{oji} = 0, k_{oii} = \omega_{oi}^2, k_{oji} = \omega_{oj}^2$  이므로

$$\begin{aligned}
 \omega_{oi}^2 \alpha_{ij} + \omega_{oj}^2 \alpha_{ji} = & - \{ \Delta EI_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta EI_{ik} + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \\
 \Delta EI_{jk} + \sum_{p=1}^n \alpha_{pi} \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta EI_{pk} \} - \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 \alpha_{ki} \alpha_{kj} \\
 \dots\dots\dots (11)
 \end{aligned}$$

#### 2.3.2 강성 변경에 따른 일반질량의 변화

Fig.2에서 일반질량  $m_{ii}$ 는 다음<sup>(8)</sup>과 같다

$$m_{ii} = \int_0^1 m(z)y_i^2 dz \dots\dots\dots (12)$$

질량은 변화가 없으므로

$$m_{ii} = \int_0^1 m_o(z)(y_{oi} + \Delta y_{oi})^2 dz$$

$$\Delta y_{oi} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} y_{ok} \text{ 로 나타내면}$$

$$m_{ii} = m_{oii} + 2\alpha_{ii}m_{oii} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2 m_{oii}$$

$$\alpha_{ii} = \frac{-1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2 \dots\dots\dots (13)$$

$$m_{ij} = \int_0^1 m(z)y_i y_j dz \dots\dots\dots (14)$$

$$= \int_0^1 m_o(z)(y_i + \Delta y_{oi})(y_{oj} + \Delta y_{oj}) dz$$

$$= m_{oij} + \alpha_{ij} m_{oii} + \alpha_{ji} m_{ojj} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} m_{okk}$$

여기서  $m_{ij} = m_{oij} = 0$ ,  $m_{oii} = m_{oij} = 1$  이므로

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} \dots\dots\dots (15)$$

### 2.3.3 반복법에 의한 감도 계수 해석

강성 변경에 의한 진동모드 변화가 없다고 가정하여 1 차 감도 계수  $\alpha_{ij}$ 를 구하고 이것을 이용하여 식 (11),(13),(15)에 의해 2차  $\alpha_{ij}$ 를 구하였고 이 작업을 반복하여 감도 계수를 구하였다. 강성 변경에 의한 진동 모드의 변화가 초기 값을 구할 때 없다고 가정하여 식(13)으로부터

$$\alpha_{ii}(1) = 0 \dots\dots\dots (16)$$

식(11)과 식(15)으로부터

$$\alpha_{ij}(1) = \frac{\Delta EI_{ij}}{\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2} \dots\dots\dots (17)$$

$$\alpha_{ii}(m+1) = - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2(m) \dots\dots\dots (18)$$

$$\alpha_{ij}(m+1) =$$

$$\frac{-1}{\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2} \left\{ \Delta EI_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta EI_{ik} + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj}(m) \Delta EI_{jk} + \sum_{p=1}^n \alpha_{pi}(m) \sum_{k=1}^n \alpha_{kj}(m) \Delta EI_{pk} + \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 \alpha_{ki}(m) \alpha_{kj}(m) \right\} + \frac{\omega_{oi}^2}{\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \alpha_{kj}(m) \dots\dots\dots (19)$$

여기서  $\alpha_{ij}(m)$ 은 m번 반복했을 때의 감도계수이다.  $\alpha_{ii}(1), \alpha_{ij}(1)$ 의 결과는 유한요소법의 Fox이론과 유사함을 알 수 있다.

### 2.3.4 고유진동수 변화

Rayleigh의 계수(Rayleigh quotient)로부터  $\omega_i^2 = k_{ii}/m_{ii}$ 이며 일반질량  $m_{ii}=1$ 로 정규화 하면 고유진동수는 식(9)로부터 다음과 같이 된다

$$\omega_i^2 = \omega_{oi}^2 \{ 1 + 2\alpha_{ii} \} + \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 \alpha_{ki}^2 + \Delta EI_{ii} + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta EI_{ik} + \sum_{k=1}^n \alpha_{pi} \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta EI_{pk} \dots\dots (20)$$

### 2.3.5 진동모드 변화

Fox 이론으로부터  $\Delta y_{oi} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} y_{ok}$  이므로 구조 변경 후의 진동모드는 식(8)로부터 다음과 같이 된다

$$y_i = y_{oi} + \Delta y_{oi} = y_{oi} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} y_{ok} \dots\dots\dots (21)$$

여기서  $y_i$ 는 구조 변경 후의 진동모드이다.

## 3. 적용예

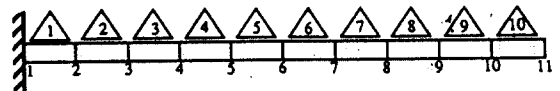
위의 이론을 검증하기 위해 무차원화된 외팔보와 계단 보에 적용하여 검토한다.

### 3.1 외팔보

Fig.3은 외팔보의 모델을 나타낸다. 등간격으로 분할한 11점 10개 요소로 좌측(절점1)을 완전히 고정했다. 길이  $L = 1$ , 단면적  $A = 1$ , 굽힘강성  $EI = 1$ , 질량  $m = 1$ 로 무차원화로 하였다. 강성 변화는 8번 요소에 현재 강성 값의 100% 증가한 경우 감도계수, 고유진동수, 진동모드의 변화를 검토하였으며 변화량에 대한 예측 정도  $E_{st}$ 는 다음 식으로 나타내었다.

$$E_{st} = \frac{(z_p - z_o)}{(z_e - z_o)} \dots\dots\dots (22)$$

여기서  $z_p$ 는 구조 변경 후의 예측치,  $z_e$ 는 구조 변경 후의 이론치,  $z_o$ 는 구조 변경 전의 이론치이며,  $E_{st}$ 가 1에



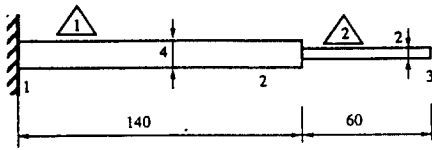
$L = 1$ (length),  $M = 1$ (mass),  $EI = 1$ (stiffness),  $\Delta$ : element  
Fig.3 Model of cantilevered beam

가까울수록 정도가 양호한 것을 나타낸다.

### 3.2 계단보

Fig.4는 계단보의 모델을 나타낸다. 2개의 단면 성질이 다른 요소를 결합하여 감도 해석을 하였으며, 2번 요소에 현재 강성 값을 10%증가한 경우 감도계수, 고유진동수, 진동모드의 변화를 검토하였다.

Unit : mm



Width : 10mm,  $\rho : 7850\text{kg/m}^3$ ,  $E : 2.0 \times 10^{11}\text{N/m}^2$

Fig.4 Model of stepped beam

## 4. 결과 및 고찰

### 4.1 강성 변경에 따른 감도 계수의 변화

Fig.5는 계단보에 강성 변화를 주고 10개의 모드를 택하고 10번 반복했을 때 식(19)의 감도계수 변화를 나타낸 것으로 2번 반복해도 일정한 값에 수렴하는 것을 알 수 있다.

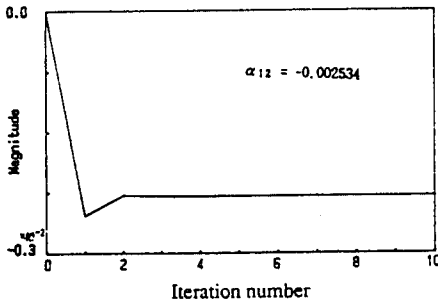


Fig.5 Variation of sensitivity coefficient by stiffness modification in stepped beam

### 4.2 고유진동수 변화

Fig.6은 외팔보의 8번째 요소에 강성 변화를 하였을 때 강성 변화 크기에 따른 1차 및 4차 고유진동수 예측 정도를 나타낸 그림으로 고유진동수 예측 정도가 기존에 발표된 Fox 이론보다 효과적임을 알 수 있다.

강성 변경 량이 전체 강성의 260% 까지는 고유치를 잘 예측하나 280%에서는 발산하며 300%에서는 값을

못 찾음을 알 수 있다. 이는 식 (18),(19)에서  $\alpha_{ij}$  가 1보다 커 수렴하지 않고 발산하기 때문이다. 1번 반복의 경우 300%에서도 예측한 것은 부가 질량에 따라 진동모드가 영향을 받지 않는다고 가정했기 때문이다.

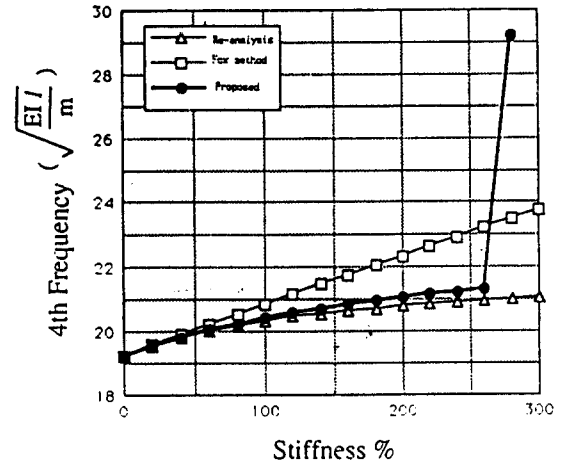
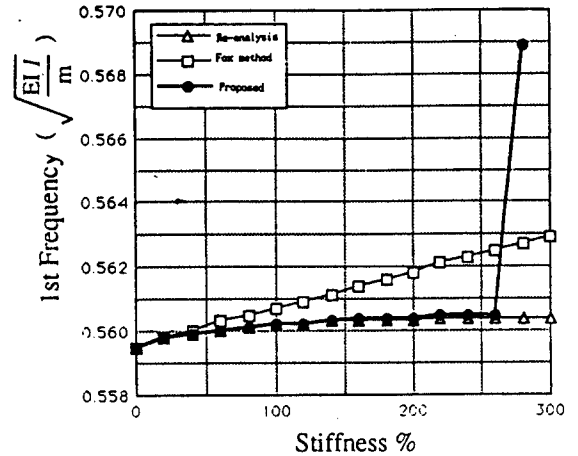


Fig.6 Variation of natural frequency by stiffness modification in cantilever beam

Table 1은 모드 수를 10개로 하였을 때 외팔보 및 계단보의 고유진동수 예측을 나타낸 것으로 4차 고유진동수 까지 외팔보는 최대 10.6%, 계단보는 0.3% 오차 이내에 잘 일치함을 알 수 있다. 특히 외팔보 8번 요소에 강성을 변화시킨 경우 오차가 증가한 이유는 짧은 구간에서 강성이 변했기 때문으로 생각되며, 더 많은 모드 수를 사용하면 오차가 감소될 것으로 생각된다.

Table 1 Prediction of natural frequencies by stiffness modification

(a) Cantilever beam (Hz)

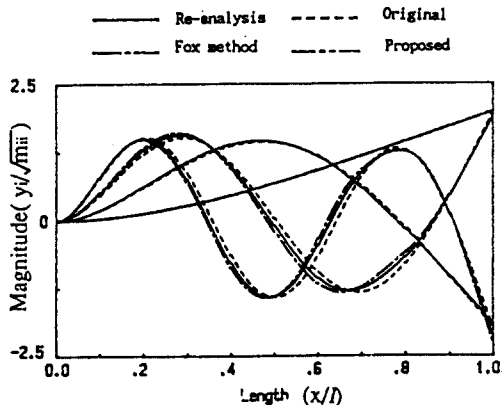
mode	original	modify		
		exact	predict	Est
1st	0.55959	0.56105	0.56021	1.107
2nd	3.50690	3.56973	3.57572	1.095
3rd	9.81942	10.35902	10.40823	1.092
4th	19.24142	20.30274	20.41534	1.106

(b) Stepped beam (Hz)

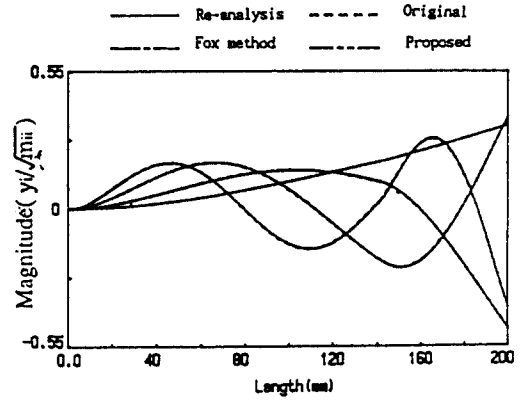
mode	original	modify		
		exact	predict	Est
1st	102.896	103.014	103.104	1.000
2nd	455.926	465.541	465.572	1.003
3rd	1074.782	1094.878	1094.904	1.001
4th	2314.731	2347.436	2347.495	1.002

### 4.3 진동 모드의 변화

Fig.7 (a),(b)는 모드 수를 10개로 하였을 때 외팔보 및 계단보의 1차 - 4차까지 진동 모드를 예측한 것으로 두 경우 모두 기존에 발표된 Fox 이론보다 재해석한 진동 모드와 잘 일치함을 알 수 있다. 이는 반복법에 의해 감도 계수를 정확히 구할 수 있기 때문이다.



(a) Cantilever beam



(b) Stepped beam

Fig.7 Variation of vibrational mode by stiffness modification in cantilever and stepped beam

## 5. 결론

강성 변경에 따른 연속체의 강성 감도 해석을 위하여 새로 제안한 반복법을 사용하였으며 외팔보 및 계단보에 사용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 감도 계수는 반복할 수록 일정한 값에 수렴함을 알았다.
- 2) 고유진동수 변화가 4차 고유진동수까지 외팔보는 최대 10.6%, 계단보는 최대 0.3% 이내에 잘 일치함을 알 수 있었다.
- 3) 고유 모드의 변화도 재해석치와 잘 일치함을 알 수 있었다.
- 4) 새로 제안한 방법이 기존의 Fox 이론보다 동특성 변화를 매우 효과적으로 정도 높게 구할 수 있음을 알 수 있었다.

## 후기

이 논문은 1996년도 경기 대학교 교내 학술 연구 조성비로 연구되었으며 이에 감사를 드립니다.

### 참 고 문 헌

1. T.G.Chondros and A.D.Dimarogons, "Identification of cracks in welded joints of complex structures", ASME Design Engineering Technical Conference, St. Louis, Paper 79-DET-106, 1980
2. P.Cawley and R.D.Adams, "Defect location in structures by a vibration technique." ASME Design Engineering Technical Conference, St. Louis, Paper 79-DET-46, 1979
3. L.Hagiwara, A.Arai and K.Nagabuchi, "A Study of a Structure Identification Method using Sensitivity Analysis," Trans. of JSME, Vol.54, No.505, pp.2101-2106,1989
4. I.Hagiwara and K.Nagabuchi, "Optimum Analysis for Structural Vibration Character" Trans. of JSME, Vol.52, No.482, pp.2607-2616,1986
5. I.Hagiwara and K.Nagabuchi, "Sensitivity Analysis for Structural Frequency Response Characteristics", Trans. of JSME, Vol.54, No.497, pp.124-133,1988
6. K. Seto, "Vibration Control of Multi-Degree of Freedom Systems by Dynamic Absorbers," trans. of JSME, Vol. 50, No. 458 pp. 339-1969, 1985
7. 이 정윤, 박 호, 오 재응, "질량 감도 해석에 의한 2차원 연속계의 진동특성에 관한 연구", 대한기계학회 논문집, 제14권, 제2호 pp. 339-348, 1990
8. 김광식의 5인 공역, "기계진동학", 보성문화사, 1984