

불연속 금속복합체에서의 탄성거동에 관한 미세구조역학적 해석

김 홍 건

A Micromechanical Analysis on the Elastic Behavior in Discontinuous Metal Matrix Composites

Hong Gun Kim

Abstract

A micromechanics model to describe the elastic behavior of fiber or whisker reinforced metal matrix composites was developed and the stress concentrations between reinforcements were investigated using the modified shear lag model with the comparison of finite element analysis (FEA). The rationale is based on the replacement of the matrix between fiber ends with the fictitious fiber to maintain the compatibility of displacement and traction. It was found that the new model gives a good agreement with FEA results in the small fiber aspect ratio regime as well as that in the large fiber aspect ratio regime. By the calculation of the present model, stress concentration factor in the matrix and the composite elastic modulus were predicted accurately. Some important factors affecting stress concentrations, such as fiber volume fraction, fiber aspect ratio, end gap size, and modulus ratio, were also discussed.

Keywords : Stress Concentration (응력집중), Micromechanics (미세구조역학), Shear Lag Theory (전단지연 이론), Metal Matrix Composite (MMC : 금속복합체), Fiber Aspect Ratio (섬유형상계수), Reinforcement (보강재)

1. 서 론

금속복합체는 동일성질을 가지는 타재료에 비해 비강도, 비강성이 매우 높기 때문에 최근 들어 그 중요성이 더

해가고 있는 실정이다.⁽¹⁾ 따라서 이의 응력해석을 통한 복합체의 성질 예측은 중요한 해석분야의 하나라 할 수 있다. 일반적으로 섬유나 휘스커로 복합체에 있어서 하중은 강화제인 섬유로 직접 전달되지 않고 모재에서 보강재 양

* 전주대학교 기계공학과

단을 통하여 하중이 전달된다. 이 때 보강재의 길이가 긴 장섬유일 경우에는 양단의 수직응력전달은 전체에 비하여 매우 작기 때문에 무시할 수 있으며 하나의 연속섬유로 간주할 수 있다.⁽¹⁾ 그러나 단섬유 보강의 경우, 이러한 양단효과는 매우 커서 무시할 수 없으며 그 효과는 보강재 길이의 함수로 볼 수 있다.⁽²⁾

장섬유 보강의 경우, 재료역학적 접근으로서의 응력해석을 위해서 유도된 전단지연이론(Shear Lag Theory: SL)⁽³⁾이라 불리는 잘 정리된 공식이 존재하나 단섬유 보강의 경우 이 이론은 잘 맞지 않는 것으로 알려져 있다.⁽⁴⁾ 더구나, 보강재 사이에 위치하는 모재에는 상당한 응력집중이 발생되며 따라서 장섬유 보강 및 단섬유 보강 모두에 잘 맞는 이론이 필요하다고 할 수 있다. 일찍이 Cox⁽³⁾와 Outwater⁽⁵⁾는 보강재 표면을 따라서 전단응력의 분포를 계산하였으며 Dow⁽⁶⁾와 Rosen⁽⁷⁾은 이를 잘 정리한 바 있다.

이 후 Muki와 Sternberg⁽⁸⁾ 그리고 Sternberg와 Muki⁽⁹⁾는 Integro-Differential Equations를 사용하여 더 정확한 응력의 계산을 시도하였으나 그들은 보강재 내부의 응력만 제시했을 뿐 기지재 내부의 응력집중은 고려하지 않았고 보강재 중앙의 응력은 혼합물 법칙(Rule of Mixture)에 의거하여 계산하였기 때문에 엄격히 말하면 장섬유 보강의 경우에만 해당된다고 할 수 있다.

한편, Nardone과 Prew⁽¹⁰⁾ 그리고 Nardone⁽¹¹⁾은 복합체의 항복응력을 계산하기 위하여 모재의 전면항복상태를 가정하였으며 보강재 단의 응력에 이 항복응력을 적용하였다. 그러나 이러한 응력계산은 거시적인 복합체 응력상승효과의 근사적 해석에는 도움이 되나 순수 탄성영역인 인장 초기단계에는 적용할 수가 없다. 또 Taya와 Arsenault⁽¹²⁾는 보강재 단의 응력을 모재의 평균응력으로 가정하여 계산하였다. 즉, 보강재단의 응력집중이 없다고 가정한 것이다. 이러한 단점들을 보완하기 위해 Kim과 Nair⁽²⁾는 유한요소법(FEM)으로 구한 보강재 단의 모재 응력값을 사용하여 전단지연이론에 대입하여 적용함으로써 보강재의 응력계산을 수행하였다. 이러한 결과치는 FEM으로 구한 보강재의 응력값들과 잘 일치하였으나 Closed Form으로 공식화시키지는 못하였다. 최근에 Kim⁽⁴⁾은 Full Closed Form인 수정전단지연이론(Modified Shear Lag Theory: MSL)을 공식화시켰으며, 이의 기본원리는 응력집중이 심하게 일어나는 부분인 보강재와 보강재 사이의 모재에서의 거동이 보강재의 거동과 유사성을 보이므로 이곳에 가상의 보강재를 투입시

켜 불연속 섬유를 연속 섬유화시키는 것이다. 즉, 가상섬유를 사용하여 실제섬유에 적용했던 지배방정식을 가상섬유에도 동시에 적용하며 물성치 제어를 통해 구별하는 것이다.

이 논문의 목적은 이러한 MSL 모델을 사용하여 불연속인 부분의 응력집중 현상이 어느 정도로 발생하는지 정량적으로 식을 유도하고, 복합체의 탄성계수를 정량적으로 해석하여 응력-변형을 관계를 예측하며, 또 보강재 근처에서의 모재에서 응력집중으로 인한 항복현상을 해석하는데 있다. 복합체 대표모형(Representative Volume Element : RVE)로써는 축대칭 모델을 사용하였으며 이 모델의 개념은 종전의 연구내용과 동일하다.^(13,14) 이러한 MSL 모델을 적용하여 계산한 결과, 섬유형상계수가 큰 범주에서는 물론 매우 작은 범주에서도 미세구조역학적 탄성해석을 통한 복합체 거동의 정확한 예측이 가능하다는 것이 밝혀졌다.

2. 이론 해석

복합체 설계 및 해석시의 일반적 미세구조역학 모델은 Fig. 1에서 보는 바와 같이 주어지는 기하학적, 재료 물성치, 복합체 Type 등에 따라 주로 수치해석적 방법에 의존한다. 그러나 본 연구에서는 재료역학적 접근방법으로서 전단지연이론에 근거를 둔 이론적 발전을 제시하고 이를 수치해석적으로 검증하는데 그 목표가 있다. 이론적 미세구조역학적 접근으로서, 복합체에서는 보강재인 단섬유들이 축방향과 동일하게 정렬되어 인장하중을 받고 있는 것과 같으며 보강재와 모재간의 결합력은 완전한 것으로 가정하였다. 이는 실제의 MMC(Metal Matrix Composite)에서 실험적으로 유사하게 관측된 바 있으며⁽¹⁵⁾ 슬립이 없는 선형탄성에 근거하였다. 이 SL(Shear Lag) 및 MSL(Modified Shear Lag) 모델링의 개념은 Kim⁽⁴⁾에 상세히 기술되어 있다. Kim⁽⁴⁾에 기술되어 있는 바와 같이 SL 모델의 개념은 보강재와 모재 접촉경계에서의 전단응력에 의존하며 MSL 모델의 개념은 위와 같은 전단응력 뿐 아니라 보강재 단에서의 수직응력 전달도 동시에 포함시킨다. 즉, MSL 모델에서는 보강재 단에서의 변위 및 트랙션 Compatibility 조건을 모두 만족시키도록 하는 것이 SL 모델과 다른 점이다. 이에 관한 개념적 도해는 Fig. 2에서 보여지고 있다.

Fig. 3에는 MSL 모델의 기하학적 변수 및 진섬유(Real Fiber or Real Whisker)와 가상섬유(Fictitious

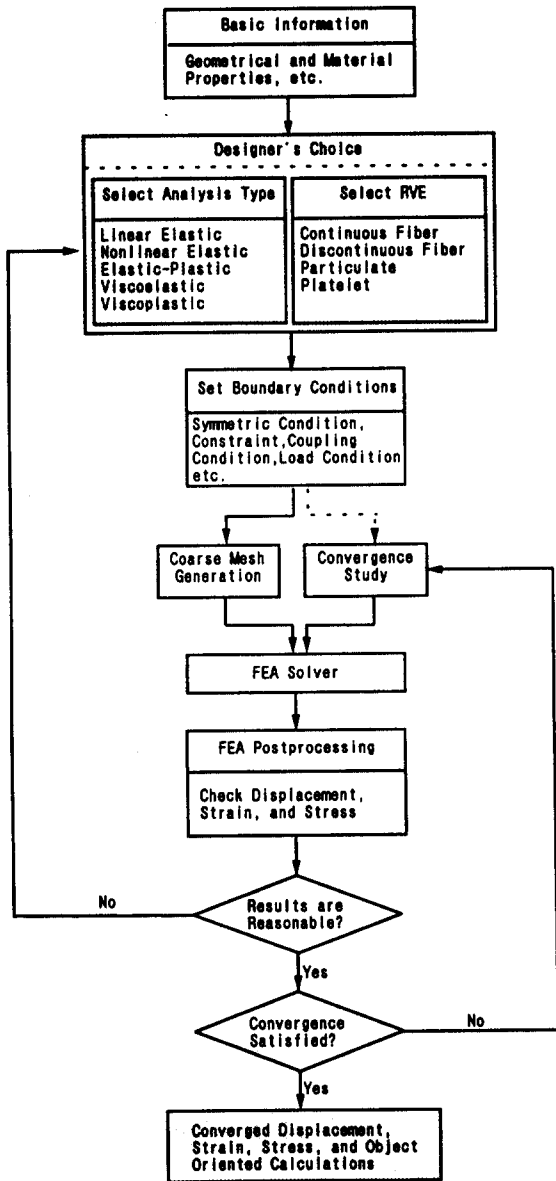


Fig. 1 Overall computational procedure for composite analysis and design.

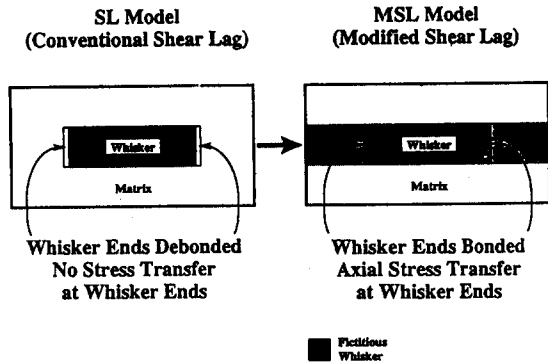


Fig. 2 Concept of the SL and MSL models. Matrix end gap regions were replaced by fictitious fiber or whisker to maintain the displacement and traction compatibility in the MSL model.

Fiber or Fictitious Whisker)가 명시되어 있다. 그림에서 보이는 바와 같이 진섬유의 중앙은 x축으로 정의되어 있고 진섬유단, 즉 가섬유 시작부분부터는 x*축으로 정의하였다. 이와 같이 서로 상이한 원점이 필요한 것은 진섬유와 가섬유 부분에서 지배방정식이 서로 다르기 때문이다. 즉, 진섬유 부분에서의 지배방정식은

$$\frac{d^2 \sigma_f}{dx^2} = \frac{n^2}{r^2} (\sigma_f - E_f \epsilon_c) \quad (1)$$

여기서

$$n^2 = \frac{E_m}{E_f (1 + \nu_m) \ln(R/r)} \quad (2)$$

이고, 가섬유 부분에서의 지배방정식은

$$\frac{d^2 \sigma_f^*}{dx^{*2}} = \frac{n^{*2}}{r^2} (\sigma_f^* - E_f \epsilon_c^*) \quad (3)$$

이 되고 $E_f^* = E_m$ 이 되므로 아래의 조건을 만족시킨다.

$$n^{*2} = \frac{1}{(1 + \nu_m) \ln(R/r)} \quad (4)$$

이 된다. 그러므로 이 두 영역의 경계에서는 $x=L$ 혹은 $x^*=0$ 이 적용되는 것이다.

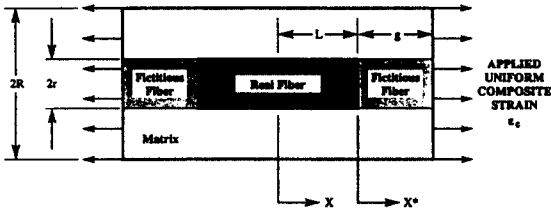


Fig. 3 Schematic of the proposed composite RVE containing a single fiber or whisker in a cylindrical matrix volume. Matrix end gap regions were replaced by fictitious fiber or whisker.

또 동일한 맥락으로서 가섬유와 관련된 모든 변수는 상첨자로 *표시가 되어 있다. RVE 양단, 즉 $x^*=g$ 에는 균일분포하중인 ϵ_c 로 인장을 받고 있다. 이와 같은 진섬유 및 가섬유 부분에서 지배방정식을 풀면 그 수직응력 및 전단응력의 해는 각각 아래와 같이 된다.⁽⁴⁾

$$\sigma_f = E_f \epsilon_c + A \sinh (nx/r) + B \cosh (nx/r) \quad (5)$$

$$\sigma_f^* = E_m \epsilon_c + A^* \sinh (n^* x^*/r) + B^* \cosh (n^* x^*/r) \quad (6)$$

$$\tau_s = -\frac{n}{2} D \sinh (nx/r) \quad (7)$$

$$\tau_s^* = -\frac{n^*}{2} [C^* \cosh (n^* x^*/r) + D^* \sinh (n^* x^*/r)] \quad (8)$$

여기서

$$A = 0 \quad (9)$$

$$B = \frac{(E_m - E_f) \epsilon_c}{\cosh (ns) + (n/n^*) \sinh (ns) \coth (n^* s^*)} \quad (10)$$

$$A^* = -B^* \tanh (n^* s^*) \quad (11)$$

$$B^* = -B (n/n^*) \sinh (ns) \coth (n^* s^*) \quad (12)$$

여기에서 E_m 과 E_f 는 각각 Young's Modulus, V_f 는 보강재 체적함유율, ϵ_c 는 RVE의 균일 인장 변형률, V_m 은 모재의 포아송비를 의미한다. 그리고 R은 대표모델의

반경, $s=(L/r)$ 는 진섬유 형상계수, $s^*(=g/r)$ 는 가섬유 형상계수를 의미한다. 한편 진섬유의 최대응력 σ_{fm} 은 위의 방정식 (1)로부터 $x=0$ 를 대입하면,

$$\sigma_{fm} = E_f \epsilon_c + B \quad (13)$$

이 되며, 같은 방법으로 진섬유 단의 응력 σ_i 를 계산하기 위해서 방정식 (2)로부터 $x^*=0$ 를 대입하면,

$$\sigma_i = E_m \epsilon_c + B^* \quad (14)$$

을 얻는다. 이 때 B^* 는 ϵ_c 의 함수로 표시할 수 있으며 그 결과는 아래와 같이 된다.

$$\sigma_i = (E_m + C) \epsilon_c \quad (15)$$

여기서

$$C = \frac{(E_m - E_f) (n/n^*) \sinh (ns) \coth (n^* s^*)}{\cosh (ns) + (n/n^*) \sinh (ns) \coth (n^* s^*)} \quad (16)$$

따라서 방정식 (14)는 진섬유와 가섬유의 경계응력을 나타내며 예측한 대로 복합체 변형률과 비례하는 것을 알 수 있다. 여기에서 응력집중계수 K_t 를 정의할 때 모재 최대응력인 σ_i 를 모재 평균응력으로 나눈 값으로 하면 위의 방정식들로부터 응력집중계수 K_t 를 구할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} K_t &= \frac{\sigma_i}{\sigma_m} \\ &= \frac{\sigma_i}{E_m \epsilon_c} \\ &= 1 + \frac{C}{E_m} \end{aligned} \quad (17)$$

이 되며 상기의 내용에서 보는 바와 같이 섬유내부의 응력을 알고, 또 응력집중 부위라 할 수 있는 보강재와 보강재 사이의 모재 응력을 가섬유 응력해석을 통해 계산하면 RVE의 응력을 계산할 수 있는 것이다.

3. 결과 및 고찰

본 연구에서 적용한 재료는 모재 Al 2124, 보강재 SiC Whisker로 하였으며 대표적인 값들은 $E_m=67.2$ GPa, $E_f=480$ GPa, $V_m=0.33$, $V_f=0.17$ 로서 물성치를

적용하였다.^(16,17) 유한요소계산도 동일조건하에서의 균일 분포를 가정하여 대표모델에 관한 계산을 수행하였고 $V_f=20\%$ 및 $V_f=0.5\%$ 두 경우에 대하여 검증하였으며 FEM 계산시 생성된 모델은 Kim⁽⁴⁾에 상세히 도시되어 있다. 경계조건으로는 $r=0$ 및 $x=0$ 에 대칭조건, $x^*=g$ 에 균일분포 변형률, $r=R$ 에는 반경방향으로의 변위를 Coupled Degrees of Freedom으로서 부과시켰다. 기타 여러 조건들은 Kim⁽⁴⁾에서 연구된 내용과 동일하다. 식 (5)에서 (12)까지의 계산결과를 FEM과 비교한 내용은 Kim(4)에 도시되어 있으며 FEM 계산결과와 잘 일치함을 보였다. 식 (13)의 해석결과는 보강재와 보강재간의 간격에 따라 영향을 받게 되므로 정성적 검증을 위해 $V_f=0.5\%$ 인 경우에 관하여 Fig. 4에 도시하였다. 이 결과에서 보는 바와 같이 MSL 모델이 SL모델에 비해 FEM 계산결과에 훨씬 더 근접함을 알 수 있으며 보강재 간 거리가 가까울수록 보강재 중앙부의 응력이 급격히 상승됨을 알 수 있다. 또 그림에서 보는 바와 같이 보강재 사이의 모재 응력값은 모재의 평균응력값보다 전반적으로 크다는 것을 알 수 있다.

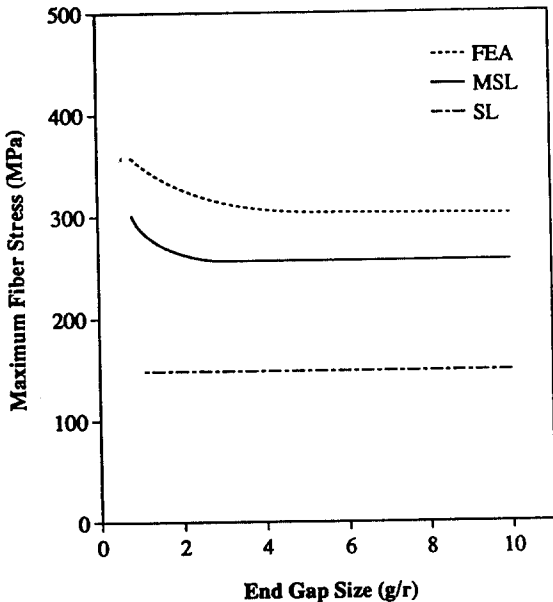
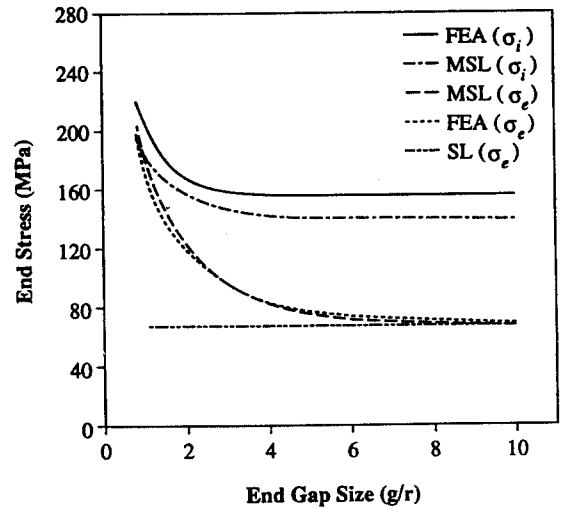


Fig. 4 Fiber Maximum stresses predicted by SL, MSL and FEA as a function of end gap size at $\epsilon_c = 0.1\%$ in case of $V_f = 0.5\%$.

그리고 Fig. 5에서 보이는 바와 같이 RVE 단의 응력인 σ_e 및 진섬유와 가섬유의 경계응력인 σ_i 는 축방향으로 보강재 사이의 거리가 가까워질수록 증가한다는 것을 알 수 있다. 이와 같은 보강재 사이에 있는 모재, 즉 가섬유의 응력은 복합체 인장시 응력집중에 의한 항복이 가장 먼저 발생하는 부위가 되므로 특히 중요하다고 할 수 있다. 여기에서 SL 모델의 가정 자체가 모재의 평균응력이 σ_e 및 σ_i 와 같다는 것이므로 SL 모델은 FEM 계산 결과와 거리가 멀다는 것을 알 수 있다.



SL, MSL and FEA as a function of end gap size at $\epsilon_c = 0.1\%$ in case of $V_f=20\%$.

Fig. 6는 보강재와 모재의 탄성계수비에 따른 섬유형상비 $s=4$ 및 5일 경우의 응력집중계수 K_t 를 보여준다. 여기에서도 마찬가지로 MSL 모델의 계산결과가 FEM 계산결과와 잘 일치된다는 것을 알 수 있다. 결과적으로 MSL 모델을 이용할 경우 단순하면서도 매우 정확한 국부 응력값들을 예측할 수 있으며 모재의 항복상태를 예측할 수 있는 응력집중을 정량적으로 계산할 수 있는 것이다.

Fig. 7은 섬유형상비 $s=4$ 및 5인 경우에 대하여 보강재와 모재의 탄성계수비 E_f/E_m 변화에 따른 표준화된 복합체의 탄성계수비 E_c/E_m 을 나타낸 것이다. 이 결과도 마찬가지로 MSL 모델의 계산결과가 FEM 계산결과와 잘 일치된다는 것을 알 수 있다. 이로부터 복합강화 효과를 예측할 수 있으며 섬유형상비가 매우 민감하게 작용한다

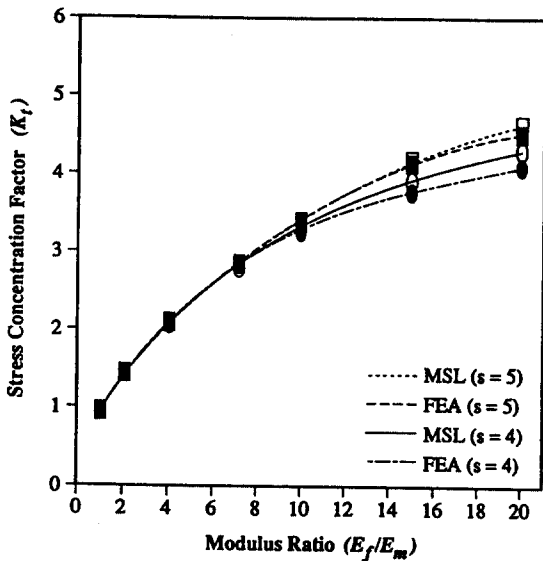


Fig. 6 Stress concentration factors predicted by SL, MSL and FEA as a function of modulus ratio at $\epsilon_c=0.1\%$ in case of $V_f=20\%$.

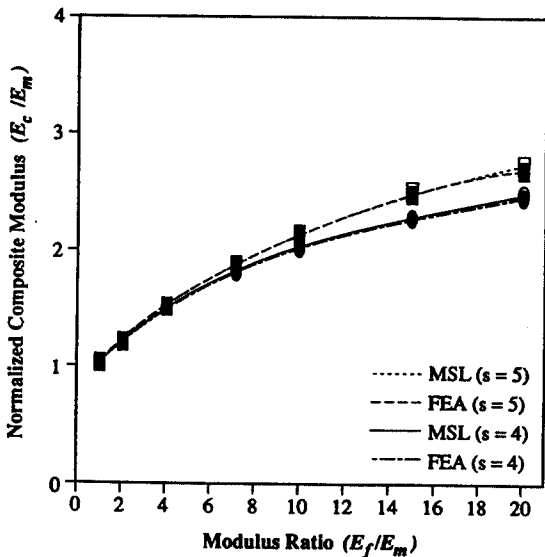


Fig. 7 Normalized composite longitudinal elastic modulus ratio E_c/E_m as predicted by MSL and FEA as a function of the modulus ratio E_f/E_m at the aspect ratios of 4 and 5.

는 것을 알 수가 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 종래의 SL 모델을 개선하여 수정 보완된 MSL 모델을 적용하여 수직응력 및 전단응력을 유도하였으며, 보강재 사이의 응력집중 정도를 정량적으로 예측하여 FEM으로 계산한 결과와 비교하였다. 비교결과, 매우 정확한 예측이 가능하다는 것을 보였다. 또 전단지연이론의 개념 자체는 매우 신빙성이 있으며 적절히 보완하면 장섬유뿐 아니라 단섬유로 보강된 경우에도 적용이 가능하다는 것을 검증하였다.

후 기

이 논문은 1996년도 전주대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

참고 문헌

1. Agarwal, B.D. and Broutman, L.J., "Analysis and Performance of Fiber Composites," John Wiley and Sons, New York, pp. 71-104, 1980.
2. Kim, H.G. and Nair, S.V., "Strengthening Analysis of SiC Whisker Reinforced Aluminum Alloys," Proceedings of the 11th World Korean Scientists and Engineers Conference, The Korean Federation of Science and Technology Societies, Seoul, Korea, June. 25-29, pp. 1737-1742, 1990.
3. Cox, H.L., "The Elasticity and Strength of Paper and Other Fibrous Materials," British Journal of Applied Physics, Vol. 3, pp. 72-79, 1952.
4. Kim, H.G., "Stress Transfer in Shear Deformable Discontinuous Composites," KSME Journal, Vol. 8, No. 4, pp. 475-484, 1994.
5. Outwater, J.O., "Modern Plastics," (March 1956), pp. 56, 1956.
6. Dow, N.F., "Study of Stresses near a Discontinuity in a Filament-Reinforced Composite

- Material," General Electric Co. Report No. TISR63SD61, 1963.
7. Rosen, B.W., "Mechanics of Composite Strengthening," in *Fiber Composite Materials* ASM, Metals Park, Ohio, 1964, Chapter 3, 1964.
 8. Muki, R. and Sternberg, E., "On the Diffusion of an Axial Load from an Infinite Cylindrical Bar Embedded in an Elastic Medium," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 5, pp. 587-605, 1969.
 9. Sternberg, E. and Muki, R., "Load-Absorption by a Filament in Fiber Reinforced Material," *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, Vol. 21, pp. 552-569, 1970.
 10. Nardone, V.C. and Prewo, K.M., "On the Strength of Discontinuous Silicon Carbide Reinforced Aluminum Composites," *Scripta Metallurgica*, Vol. 20, pp. 43-48, 1986.
 11. Nardone, V.C., "Assessment of Models Used to Predict the Strength of Discontinuous Silicon Carbide Reinforced Aluminum Alloys," *Scripta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 1313-1318, 1987.
 12. Taya, M. and Aresenault, R.J., "Metal Matrix Composites : Thermomechanical Behavior," Pergamon Press, pp. 25-28, 1989.
 13. Kim, H.G., "Assessment of Plastic Constraint Effects Induced by Whisker Interactions in Whisker Reinforced Metal Matrix Composites," *Journal of Korean Society of Composite Materials*, Vol. 7, No. 3, pp. 1-10, 1994.
 14. Kim, H.G., "A Numerical Study on the Evolution of Plasticity in a Heterogeneous Body," *Journal of Basic Science Research Institute, Jeonju University*, Vol. 7, No. 1, pp. 9-19, 1994.
 15. Aresenault, R.J., "Interfaces in Metal Matrix Composites," *Scripta Metallurgica*, Vol. 18, pp. 1131-1134, 1983.
 16. Nair, S.V., Tien, J.K. and Bates, R.C., "SiC-Reinforced Aluminum Metal Matrix Composites," *International Metals Review*, Vol. 30, No.6, pp. 275-290, 1985.
 17. Nair, S.V. and Kim, H.G., "Thermal Residual Stress Effects on Constitutive Response of a Short Fiber or Whisker Reinforced Metal Matrix Composite," *Scripta Metallurgica*, Vol. 25, No. 10, pp. 2359-2364, 1991.
 18. Nutt, S.R. and Needleman, A., "Void Nucleation at Fiber Ends in Al-SiC Composites," *Scripta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 705-710, 1987.