

컨테이너 크레인의 흔들림 제어 (Part II): 트롤리 주행속도 조절을 통한 진자운동의 제어

Sway Control of a Container Crane (Part II): Regulation of the Pendulum Sway through Patternizing Trolley Moving Velocity

홍 금 식, 손 성 철, 이 만 형

(Keum-Shik Hong, Sung-Chull Sohn, Man Hyung Lee)

Abstract : Six different types of velocity profiles of trolley movement of a container crane are investigated for the minimal sway angle at the target trolley position. Three velocity patterns which include trapezoidal, stepped and notched-type velocity patterns are obtained assuming constant rope length. The notched type velocity pattern is shown to be derived from the time-optimal bang-bang control. The stepped type velocity pattern can be shown to be derived as bang-off bang control as well. Considering the damping effect due to hoist motion a double stage acceleration pattern is also analyzed. The main objective of the paper is to show how much time-reduction can be obtained among several velocity patterns appearing in the literature.

Keywords : crane system, pendulum motion, time-optimal control, velocity patterns

I. 서론

크레인 제어에 관한 문헌들을 살펴보면 트롤리 주행에 대한 여러 가지의 속도선도(velocity profiles)들이 등장하고 있다[1]-[8]. 본 논문에서는 이러한 속도선도들이 상호 어떠한 관계에 있는지를 체계적으로 규명하고자 한다. 보다 빠른 시간에 물건을 이송시키고자 하는 산업 일선에서의 요구는 크레인 제어에 관한 활발한 연구를 가능케 하고 있다 [9]-[15]. 크레인 제어에 관한 문헌에서 나타나고 있는 속도선도들을 그 속도패턴이 만드는 형상에 따라 사다리꼴, 계단형, 노치형 및 다단계 가감속형 등으로 부르기로 한다.

크레인 흔들림 제어에 있어서 가장 큰 특징은 시스템이 보유하고 있는 자유도(degree of freedom)의 수가 시스템이 구사할 수 있는 제어입력의 수보다 많다는 데 있다. 즉, 일정 로우프 길이로서 트롤리가 수평이동할 경우 컨테이너의 위치를 나타내기 위해서는 트롤리의 위치 및 컨테이너의 트롤리에 대한 회전변위를 알아야만 하는데 비하여, 제어입력 으로서는 트롤리 모터에 가하는 입력뿐이다. 일반적으로 크레인 시스템은 비선형성이 매우 크며, 또한 항만에서 사용될 경우에는 바람 등과 같은 외란을 극복해야 하는 문제점도 있다.

본 논문에서는 트롤리의 수평방향 이송속도 조절을 통하여 트롤리가 목표위치에 도달했을 때 로우프 끝에 매달려 있는 컨테이너의 흔들림이 0 이 되도록 하는 다양한 주행속도 패턴을 단계적으로 유도하기로 한다. 먼저 일정 로우프의 길이를 가정하고 3 종류의 속도선도를 유도한다(사다리꼴, 계단형 및 노치형). 실제의 제어알고리즘의 구현(implementation) 측면에서는 로우프 길이가 변하는 것을 고려하기 위하여 어떤 일정한 로우프의 길이를 기준이 되는 로우프의 길이로 정하고, 기준 로우프의 길이에 따른 속도패턴이 기준속도선도가 되고 실제의 흔들림각과 기준속도선도

를 따를 때의 계산된 흔들림각사이의 오차를 피드백하여 트롤리 속도를 보정하도록 한다. 컨테이너 크레인의 모델링과 제어법칙에 대해서는 본 논문의 선행 논문인 Part I[6]을 참조 바란다.

사다리꼴 속도선도는 진자운동의 한 주기만에 가속 혹은 감속을 마치는 속도패턴이다. 계단형 속도선도는 트롤리의 초기정지위치에서 최대속도에 도달하는 가속구간(혹은 최대속도에서 정지까지의 감속구간)에서의 시간단축을 목적으로 단계적으로 가속(혹은 감속)을 반복하는 속도패턴을 말한다. 노치형 속도선도는 가감속 부분에 노치가 나타나는 속도패턴으로서 이는 시간최적제어(time-optimal control) 개념에서 bang-bang control 임이 입증된다. 계단형 속도선도중 2차 가속을 단진자 운동주기의 절반에서 시작하게 되면 이는 결과적으로 시간최적제어의 특별한 경우인 bang-off bang control 과 가속시간이 같게 됨이 증명된다. Bang-off bang 제어는 0 속력에서 최대속력 도달시까지 노치형에서와는 달리 감속은 하지 않고 다만 부분적으로 정속을 유지하게 되는데 나타나는 속도선도가 계단형의 형태를 이루게 된다. 다단계 가감속형 속도선도는 로우프 길이변화를 고려하기 위하여 도입된 감쇠항이 있는 2차방정식 모델로부터 유도된다. 사다리꼴, 노치형 및 다단계 가감속형 속도선도들은 가속 및 감속이 끝난 시점에서 흔들림이 0 이 되게 구성되어 있다.

본 논문의 목적은 크레인의 흔들림 제어에 등장하는 속도선도들이 어떠한 개념에서 유도되었는가를 체계적으로 밝히는데 있다. 진자운동의 시간최적제어와 속도선도들의 관계, 감쇠모델로부터의 속도선도 그리고 그들의 장단점을 분석하여 적합한 모델을 사용할 수 있게끔 하는데 있다.

본 논문의 순서는 다음과 같다. II장에서 일정 로우프길이에 대해서 사다리꼴, 계단형 및 노치형 속도선도를 해석한다. III장에서 변하는 로우프길이를 감쇠항으로 고려함으로써 얻어질 수 있는 속도선도를 유도한다. 마지막으로 IV장에서 결론을 언급한다.

II. 속도선도(일정 로우프의 길이)

로우프의 길이가 일정하다고 가정한 경우에 단순화된 진자계의 운동방정식은 다음과 같은 시불변 시스템(time-invariant system)으로 주어진다[6].

접수일자 : 1996. 3. 30., 수정완료 : 1996. 12. 5.

홍금식 : 부산대학교 기계기술연구소

손성철 : 부산대학교 대학원

이만형 : 부산대학교 기계기술연구소

* 산학연구를 지원하여 주신 현대중공업 플랜트사업부에 감사드립니다. 본 연구는 또한 교육부 학술연구조성비 (기계공학 : ME96-D-09)의 일부 지원을 받았습니다.

$$\ddot{\phi}(t) + \frac{g}{l} \phi(t) = -\frac{\ddot{x}(t)}{l}, \phi(0) = 0, \dot{\phi}(0) = 0 \quad (1)$$

여기서 l 은 로우프의 길이, g 는 중력가속도이다. 트롤리 가속도 $\ddot{x}(t)$ 는 제어입력이 되는데 취하는 값(상수)에 따라서 속도패턴의 형상이 사다리꼴, 계단형 및 노치형으로 나타나게 된다.

1. 사다리꼴 속도선도

먼저 트롤리의 속도를 아래와 같이 사다리꼴로 가감속할 경우 로우프 끝에 매달린 컨테이너의 흔들림을 해석해보자.

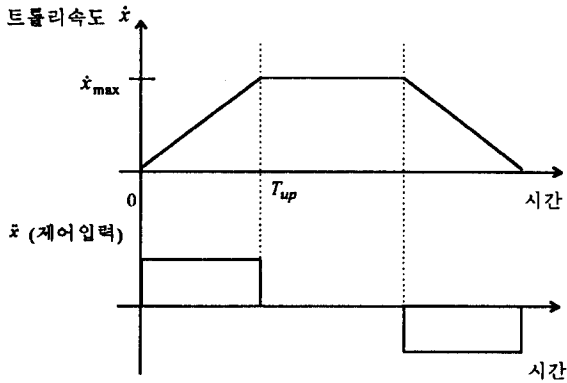


그림 1. 사다리꼴 속도선도.

Fig. 1. Trapezoidal velocity pattern.

그림 1에서 알 수 있듯이 등가감속구간에서 제어입력 $\ddot{x}(t)$ 는 상수가 된다. 즉 $\ddot{x}(t) = C$ (constant)인 경우를 고려해 보자. 그러면 (1)의 해는

$$\phi(t) = \frac{C}{g} (\cos \omega t - 1) \quad (2)$$

이 된다. 여기서 $\omega = \sqrt{g/l}$ 이다. $\phi(t)$ 는 진폭이 C/g 이며, 주파수가 ω 인 단진동운동이다. 따라서 $t = T_{up} = 2\pi/\omega$ 에서 완전히 1-cycle 이 끝나고 ϕ 가 0 이 됨을 알 수 있다. 만약 $t = T_{up}$ 에서 가하는 제어입력을 $\ddot{x}(t) = 0$ 으로 전환하면, 이 때의 초기조건이 $\phi(T_{up}) = \dot{\phi}(T_{up}) = 0$ 가 되어 $\phi(t) = 0, t \geq T_{up}$ 으로 지속됨을 알 수 있다. 즉, 제어입력은 $\ddot{x}(t) = \dot{x}_{max}/T_{up}$ 이 됨을 알 수 있다. 또한 가속구간 중 트롤리의 이동거리는

$$x_{travel} = \frac{1}{2} \dot{x}_{max} T_{up} = \pi \dot{x}_{max} \sqrt{l/g}$$

가 되고 따라서 감속구간에서도 최종위치로부터 x_{travel} 거리 만큼 떨어진 지점에서 감속작용에 들어가게 되면 정확히 원하는 위치에서 흔들림이 없이 정지하게 된다.

2. 계단형 속도선도

트롤리 모타의 속도증가를 계단형상으로 할 때 제어입력을 시간에 대해 나타내면 그림 2와 같다.

이 방법의 기본개념은 사다리꼴 속도선도에서는 로우프의 길이가 주어질 경우 가속력이 $(\dot{x}_{max} \sqrt{g/l})/2\pi$ 로 제한되는데 반하여, 계단형에서는 트롤리 모타가 낼 수 있는 보다 더 큰 가속력으로 시간 T_1 까지 가속하여 중간정속 V_1 에 도달하게 한 다음 제어입력을 제거하였다가 기다린 후 시간이 단진자운동의 주기의 절반(계단형 #1), 혹은 흔들림 각속도가 0 이 되는 지점(계단형 #2)에 이른 후 다시 같은 크기의 가속을 같은 시간만큼 가하면 최대속도에 도달한 후 잔류 흔들림을 최소화할 수 있다는 데 있다. 그림 2에서 나타난 가속구간의 제어입력은 다음과 같이 표시된다[2].

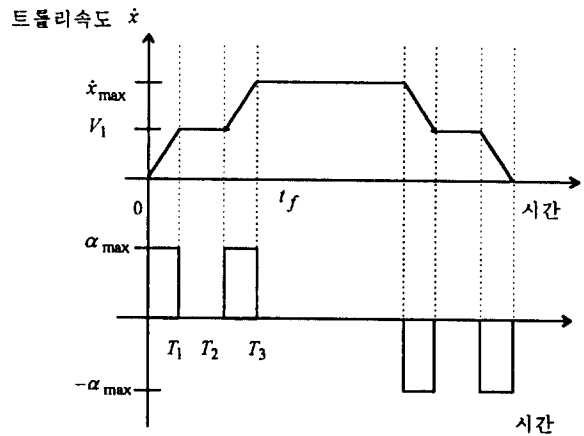


그림 2. 계단형 속도선도.

Fig. 2. Stepped velocity pattern.

$$\ddot{x}(t) = a(u_s(t) - u_s(t - T_1) + u_s(t - T_2) - u_s(t - T_3)) \quad (3)$$

여기서, a 는 가속도의 크기이고, $u_s(t)$ 는 단위스텝함수이다. 제어입력이 (3)과 같이 주어질 때 선형시스템 (1)의 해는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \phi(t) = \frac{a}{g} \{ & \cos \omega t - \cos \omega(t - T_1) + \cos \omega(t - T_2) \\ & - \cos \omega(t - T_3) - u_s(t) + u_s(t - T_1) \\ & - u_s(t - T_2) + u_s(t - T_3) \} \end{aligned} \quad (4)$$

2차 가속구간의 크기를 1차 가속구간의 크기와 같게 잡는다면, 즉 $T_1 = T_3 - T_2$ 이면 시간 $t \geq T_3$ 에서

$$\phi(t) = -4 \frac{a}{g} \sin \omega \frac{T_1}{2} \cos \omega \frac{T_2}{2} \sin \omega(t - \frac{T_3}{2}), t \geq T_3 \quad (5)$$

이 된다. 따라서 $t \geq T_3$ 에서 $\phi(t) = 0$ 이 되는 시간 t 가 존재함을 알 수 있다. 즉

$$\omega(t - \frac{T_3}{2}) = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

이 되는데, 이 중 $t \geq T_3$ 이면서 가장 작은 시간을 잡으면 $t = \frac{T_3}{2} + \frac{\pi}{\omega}$ 이 됨을 알 수 있다. 또한 (4)로부터 흔들림 각속도에 대한 식은

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) = -\frac{a}{g} \omega \{ & \sin \omega t - \sin \omega(t - T_1) + \sin \omega(t - T_2) \\ & - \sin \omega(t - T_3) \} \end{aligned} \quad (6)$$

이 된다.

2.1 계단형 #1

이제 2차 가속의 개시시점을 단진자 운동주기의 절반으로 잡으면 즉, $T_2 = \frac{\pi}{\omega}$ 이면 시간 $t = T_1, T_2$ 에서의 흔들림 각 및 흔들림 각속도는

$$\begin{aligned} \phi(T_1) &= \frac{a}{g} (\cos \omega T_1 - 1) \\ \phi(T_2) &= \frac{a}{g} \{ \cos \omega T_2 - \cos \omega(T_2 - T_1) \} \Big|_{T_2 = \frac{\pi}{\omega}} = \phi(T_1) \end{aligned}$$

$$\dot{\phi}(T_1) = -\frac{a}{g} \omega \sin \omega T_1 = -\dot{\phi}(T_2)$$

가 됨을 알 수 있다.

1-2차의 가속을 모두 같은 크기의 가속도(α)로 행한다

면 두 차례에 걸친 가속 후 최대속도는 $V_{max} = 2\alpha T_1$ 이 되므로, 1차 가속이 끝나는 시점 T_1 은

$$T_1 = \frac{V_{max}}{2\alpha}$$

로 구해짐을 알 수 있다. 또한 2차 가속이 끝나는 시간은

$$T_3 = T_2 + T_1 = \frac{\pi}{\omega} + \frac{V_{max}}{2\alpha}$$

이 되고, 2차 가속이 끝난 후 흔들림이 0이 되는 시점은

$$t = \frac{3}{2} \frac{\pi}{\omega} + \frac{V_{max}}{4\alpha}$$

가 됨을 알 수 있다. 일정 로우프의 경우에 감속과정은 가속과정의 역순으로 생각하면 되므로 감속개시 시점을 T_4 라 할 때 가속부분과 감속부분이 서로 대칭이 됨을 이용하면 트롤리가 이동한 전체 거리는 속도선도로 둘러싸인 면적이 되어

$$x_d = V_{max} \times T_4 = 2\alpha T_1 T_4$$

가 된다. 따라서 감속 개시시간 및 2차 감속 개시 시점은 다음과 같이 유도된다.

$$T_4 = \frac{x_d}{2\alpha T_1},$$

$$T_5 = T_4 + T_1,$$

$$T_6 = T_4 + \frac{T}{2}.$$

여기서 T 는 단진동 주기 $2\pi/\omega$ 이다.

2.2 계단형 #2

(6)으로부터 시간 $T_1 \leq t \leq T_2$ 에서의 흔들림각은 다음으로 표시된다.

$$\phi(t) = -2 \frac{\alpha}{g} \omega \cos \omega(t - \frac{T_1}{2}) \sin \omega \frac{T_1}{2}$$

따라서 $\phi(t) = 0$ 이 되는 시간 T_2' 은

$$T_2' = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega} + \frac{T_1}{2}$$

이 된다. 만약 $V_{max}/\alpha < T$ 이면

$$T_2 - T_2' = \frac{1}{4} (\frac{2\pi}{\omega} - \frac{V_{max}}{\alpha}) > 0$$

이 되어 T_2 보다 작은 시간 T_2' 에서 2차 가속을 실시할 수 있게 된다. 그림 3은 사다리꼴 속도선도와 계단형 속도선도를 비교한 것이다. 그림에서 보듯이 계단형 속도선도는 한 주기만에 가감속을 마치는 사다리꼴 속도선도에 비하여

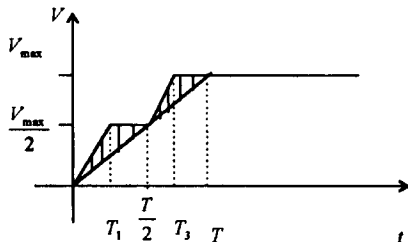


그림 3. 사다리꼴 및 계단형 속도선도의 비교.

Fig. 3. Comparison of trapezoidal and stepped velocity patterns.

더 짧은 시간에 가속을 마칠 수 있다는 장점이 있다. 빗금친 부분은 계단형 속도선도를 사용함으로써 얻어지는 속도 증대량을 표시하고 있다. 즉, 사다리꼴 속도선도는 주기 T 에서 최대속도에 도달하는 반면 계단형은 T_3 에서 최대속

도에 도달하고 있다.

3. 노치형 속도선도

본 절에서는 그림 4와 같은 노치형 속도선도의 가속패턴이 시간최적제어(time optimal control)로부터 유도됨을 해석하고자 한다.

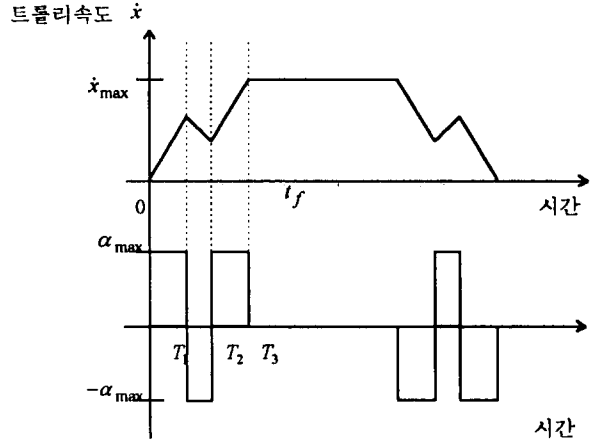


그림 4. 노치형 속도선도.

Fig. 4. Notched velocity pattern.

상태변수(state variable)로

x = 트롤리의 속도

ϕ = 컨테이너의 흔들림 각도

$\dot{\phi}$ = 컨테이너의 흔들림 각속도

을 도입하여 시스템 (1)을 상태방정식으로 나타내면

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \phi(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{l} \end{bmatrix} u(t) \\ &= AX(t) + bu(t) \end{aligned} \tag{7}$$

가 된다. 이제 가속의 초기시간을 0, 최종시간을 t_f 라 할 때 시간최적제어 문제는 가속시 소요되는 시간, 즉 성능지수(performance index)

$$J = t_f = \int_0^{t_f} dt \tag{8}$$

를 최소화하고 경계조건(boundary condition)

$$X(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}(0) \\ \phi(0) \\ \phi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X(t_f) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t_f) \\ \phi(t_f) \\ \phi(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{max} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

을 만족하는 최적입력 $u^*(t)$ 를 구하는 문제가 된다. 여기서 $X(0)$ 는 출발전 정지하고 있는 컨테이너의 초기상태를 표시하고, $X(t_f)$ 는 트롤리가 최고속도 \dot{x}_{max} 에 도달한 가속구간의 끝점을 나타낸다. 또한 트롤리가 낼 수 있는 최대 가감속도의 크기는 $\pm a_m$, 즉 $|u(t)| \leq a_m$ 이라고 가정한다. 최적제어 문제를 풀기 위한 Lagrange multiplier $p(t)$ 를 도입하고 성능지수 (8)에 대한 Hamiltonian을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} H(X(t), u(t), p(t), t) &= 1 + p^T(t)[AX(t) + bu(t)] \\ &= 1 + p_1(t)u(t) + p_2(t)\dot{\phi}(t) \\ &\quad + p_3(t)[-\frac{g}{l}\phi(t) - \frac{1}{l}u(t)]. \end{aligned} \tag{10}$$

X^*, u^*, p^* 가 최적이 되기 위한 필요조건은

$$\begin{aligned} \dot{X}^*(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(X^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \\ \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial X}(X^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \end{aligned} \quad (11)$$

을 만족해야 하므로, 보조변수 $p^*(t)$ 에 대한 미분방정식은

$$\dot{p}^*(t) = -A^T p^*(t)$$

가 된다. 이것을 풀게되면

$$\begin{bmatrix} p_1^*(t) \\ p_2^*(t) \\ p_3^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \omega \sin(\omega t - c_3) \\ c_2 \cos(\omega t - c_3) \end{bmatrix} \quad (12)$$

이 된다. 여기서 c_1, c_2, c_3 는 적분상수이다. 따라서 H 는

$$\begin{aligned} H &= 1 + c_1 u^*(t) + c_2 \omega \dot{\phi}^*(t) \sin(\omega t - c_3) \\ &+ c_2 \cos(\omega t - c_3) \left[-\frac{g}{l} \phi^*(t) \right] \\ &+ c_2 \cos(\omega t - c_3) \left[-\frac{1}{l} u^*(t) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

이다. 또한 minimum principle에 의하여 최적입력 $u^*(t)$ 는 다음의 관계식을 만족하여야 하는데

$$\begin{aligned} H(X^*(t), u^*(t), p^*(t), t) &\leq H(X^*(t), u(t), p^*(t), t), \\ &\text{for all admissible } u(t) \end{aligned} \quad (14)$$

제어입력 $u(t)$ 를 포함하는 항만을 고려하면

$$p^*(t) b u^*(t) \leq p^*(t) b u(t) \quad (15)$$

이 되고, 따라서 $u^*(t)$ 만을 포함하는 항만을 (13)에서 구하면

$$p^*(t) b u^*(t) = \left[c_1 - \frac{c_2}{l} \cos(\omega t - c_3) \right] u^*(t) \quad (16)$$

가 되어 $u^*(t)$ 의 계수를 살펴볼 때 이는 x축을 아래위로 오르내리는 여현파가 된다. 따라서 최적제어 $u^*(t)$ 를 사용할 때의 $p^*(t) b u^*(t)$ 의 값이 임의의 $u(t)$ 를 사용할 때의 $p^*(t) b u(t)$ 의 값보다 작은 값을 가지기 위해서는 $c_1 - \frac{c_2}{l} \cos(\omega t - c_3)$ 가 양의 값을 가질 때는 $u(t)$ 가 취할 수 있는 최소값, 즉 $-a_m$ 을 취하고 음일 때는 $+a_m$ 을 취하면 되겠다(bang-bang control). 즉 최적제어입력 $u^*(t)$ 는

$$u^*(t) = -a_m \operatorname{sgn} \left\{ c_1 - \frac{c_2}{l} \cos(\omega t - c_3) \right\} \quad (17)$$

가 된다. 그림 5에서 스위칭 시간을 각도로 나타내기 위해 횡축의 차원을 ωt 로 표시한다.

3.1 $\phi - \dot{\phi}/\omega$ 공간상에서의 상태계적

최적제어입력 $u^*(t)$ 를 구하기에 앞서 먼저 로우프계의 상태계적을 $\phi - \dot{\phi}/\omega$ 상태공간상에 나타내어 보자. 로우프의 흔들림이 다음 식으로 주어지고

$$\ddot{\phi}(t) + \frac{g}{l} \phi(t) = -\frac{u}{l}, \quad \phi(0) = \phi_0, \quad \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0 \quad (18)$$

제어입력 u 가 상수일 때 (18)의 해는 다음이 된다.

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_c + R \cos(\omega t + \theta) \\ \dot{\phi}/\omega &= -R \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 $\phi_c = -u/g$ 이고 R 및 θ 는 초기조건으로부터 결정되어지는 상수이다. 따라서 상태계적은 $(\phi_c, 0)$ 을 중심으로

로 하고 반경이 R 인 시계방향으로 회전하는 원호가 된다. 또한 중심 ϕ_c 에서 바라다 본 궤적의 각도는 ωt 가 된다. 만약 u 가 u_1 에서 u_2 로 순간적으로 스위칭한 경우 상태 궤적의 중심은 $\phi_{c1} = -u_1/g$ 에서 $\phi_{c2} = -u_2/g$ 로 전환되게 되며, 이때 반경 R_2 의 크기는 전환시점의 상태에서부터 계산될 수 있음을 알 수 있다. 그러나 반경 R_2 를 구하여 계산할 필요가 없음을 알 수 있는데, 이는 유한하고 구간별 연속인 제어입력 u 에 의한 선형 미분방정식 (18)의 해는 구간별 $\phi(t) \in C^1[0, \infty)$ 이고 스위칭시의 경계조건을 만족하여야 하기 때문이다. 따라서 $\phi - \dot{\phi}(t)/\omega$ 공간상에서 상태계적은 연속이 되어 중심이 ϕ_{c1} 과 ϕ_{c2} 에 의해 만들어지는 2개의 원호를 연결한 곡선이 된다. $\phi = \dot{\phi} = u = 0$ 인 점은 공간 상에서 원점이 되는데, 여기서 임의의 제어입력을 가할 경우 궤적은 원점을 출발하게 되고 다시 궤적이 원점에 도달하였을 때 $u=0$ 로 하면 그 이후의 흔들림은 존재하지 않게 된다.

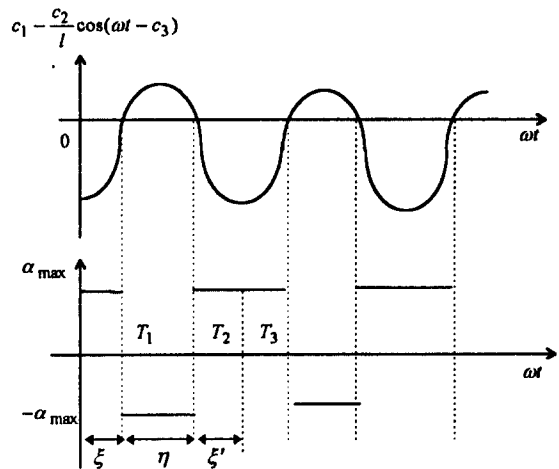


그림 5. Bang-bang 제어.
Fig. 5. Bang-bang control.

3.2 Bang-bang control

트롤리 모터의 수평주행에 대해서 다음과 같은 조건을 가정한다.

- (i) $-a_{\max} \leq u(t) \leq a_{\max}$
: 즉 최대가속, 최대감속의 크기가 같다고 가정한다. 물론 실제 사용할 가속도의 크기는 이 범위 안의 임의의 값을 취하면 되겠다.
- (ii) $0 \leq \dot{x}(t) \leq \dot{x}_{\max}, t \geq 0$
: 트롤리의 가속구간 동안에는 트롤리는 이동방향(목표 방향)으로만 주행한다. 물론 최대속도에 도달하면 정속운전한다.

(iii) $a_{\max} \geq \dot{x}_{\max} / T = (\dot{x}_{\max} \sqrt{g/l}) / 2\pi$

: 사다리꼴 속도선도의 경우에 최고속도 \dot{x}_{\max} 에 이르기 위하여 단진동주기(T)동안 등가속을 하게 됨을 앞에서 보았다. 그러나, 여기서의 가정은 실제의 크레인이 갖고 있는 최대가속력 a_{\max} 는 \dot{x}_{\max} / T 보다는 크다는 가정이다. 따라서 모타가 허용하는 a_{\max} 의 범위 내에서 \dot{x}_{\max} / T 보다 더 큰 가속을 행함으로써 최대속력에 도달하는 시간을 단진동주기 T 보다 작게 하는데 노치형 속도선도의 목적이 있다. 그리고 시간최적제어를 행한다면 모타가 갖고 있는 최대 가속력 $\pm a_{\max}$ 을 사용하게 될 것이다.

그림 5에서 횡축의 좌표가 $\omega t = \omega T$ 일 때의 그 값은 2π 가 된다. 또한 여현파의 한 주기도 2π 가 됨을 생각할 때, 가속시간이 단진동주기 T 보다 짧기 위해서는 스위칭이 최대 2번 이내이어야 함을 알 수 있다. 또한 가속패턴이 대칭이 되게 한다면 이는 $\xi = \xi'$ 가 됨을 의미한다. 따라서 첫 번째 스위칭까지의 경과시간은 $\Delta t_1 = \xi/\omega$, 두 번째 스위칭 시간까지의 경과 시간(Δt_2)은 $\Delta t_2 = \eta/\omega$, 그리고, 마지막 최대속도에 이를 때까지의 경과시간은 $\Delta t_3 = \xi/\omega = \Delta t_1$ 이 됨을 알 수 있다. 이제 bang-bang 제어법칙의 설계문제는 다음의 그림 6에서 경계조건 (9)에 의하여 원점출발, 원점도착 문제로서 각도 ξ, η 을 찾아내는 문제가 된다.

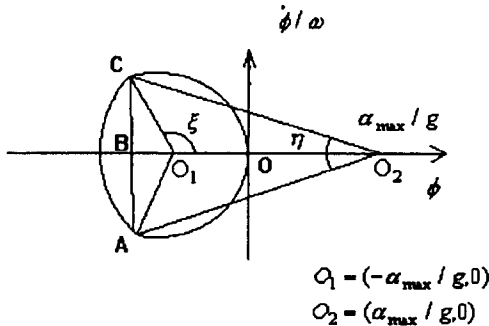


그림 6. Bang-bang control의 상태궤적선도.
Fig. 6. State trajectory of bang-bang control.

각도에 대한 관계식을 구하면 다음과 같다.

$$\eta = 2 \tan^{-1} \frac{\sin \xi}{2 - \cos \xi} \quad (20)$$

또한 경계조건을 만족하기 위해서는 다음의 관계식이 성립하여야 함을 알 수 있다(2번 스위칭, $\xi \rightarrow \eta \rightarrow \xi$, 후 최대속도에 이름).

$$\begin{aligned} \therefore 2\xi - \eta &= \frac{\dot{x}_{\max} \omega}{\alpha_{\max}} \\ &= K_l \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 K_l 은 로우프 길이에 따른 변수가 되겠다. 따라서 시간최적제어는 주어진 로우프의 길이 l 에 대해서 K_l 이 결정된 후 (20)과 (21)을 연립하여 푸는 문제가 된다.

3.3 Bang-off bang control

앞 절의 bang-bang 제어에서는 스위칭이 최대가속력 α_m 으로부터 최대감속력 $-\alpha_m$ 으로 일어나게 되나, 본 절에서는 bang-bang에 비교하여 가속시간이 늘어난다 하더라도 급격한 속도변경에 따른 진동이라든지, 에너지 손실 등을 방지하고자 가속구간 중에 감속을 하지 않고 대신 power-off 하여 정속을 유지한다는 개념이다. 따라서 bang-bang 제어에 비교하여 설정된 가정은 (i)항만 달라지게 된다.

가정

- (i) $0 \leq u(t) \leq \alpha_{\max}$
- (ii) Bang-Bang과 동일
- (iii) Bang-Bang과 동일

따라서 얻어지는 상태궤적은 그림 7과 같다.

그림 7로부터 각도에 대한 관계식을 유도하면 다음과 같다.

$$\tan \frac{\eta}{2} = \frac{AB}{OB} = \frac{\sin \xi}{1 - \cos \xi} \quad (22)$$

트롤리는 α_{\max} 으로의 2번의 가속구간(ξ)과 한번의 등속구간(η)후 \dot{x}_{\max} 에 도달하게 되므로

$$2\alpha_{\max} \left(\frac{\xi}{\omega}\right) + 1 \times 0 \times \left(\frac{\eta}{\omega}\right) = \dot{x}_{\max}$$

가 성립한다. 따라서 로우프의 길이 l 이 주어질 때, 첫 번째 가속시간

$$\Delta t_1 = \frac{\xi}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\dot{x}_{\max}}{\alpha_{\max}} = \Delta t_3 \quad (23)$$

이 결정된다. 그리고 가속시간 Δt_1 및 Δt_3 는 로우프길이와 무관하게 모터의 성능으로부터 결정됨을 알 수 있다. 그리고 (22)로부터 등속구간의 시간 Δt_2 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\Delta t_2 = \frac{\eta}{\omega} \quad (24)$$

따라서 bang-off bang 제어에서는 로우프 길이 l 이 유지하여야 하는 등속구간의 크기를 결정함을 알 수 있다.

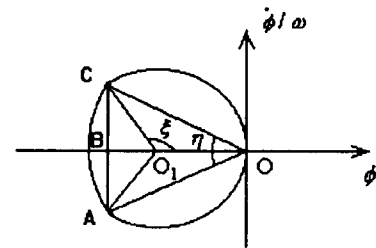


그림 7. Bang-off bang의 상태궤적 선도.
Fig. 7. State trajectory of bang-off bang control.

III. 감쇠모델을 이용한 속도선도

앞 절의 사다리꼴, 계단형 및 노치형 속도선도에서는 로우프의 길이가 일정한 단진동 운동방정식을 사용하였었다. 그러나 호이스트 운동이 있을 경우에는 다음과 같은 감쇠항이 있는 모델이 더 정확한 모델이 된다[6].

$$l(t)\ddot{\phi}(t) + 2\dot{l}(t)\dot{\phi}(t) + g\phi(t) = -u, \phi(0) = 0, \dot{\phi}(0) = 0 \quad (25)$$

로우프의 길이가 다음과 같이 일정속도로 변화한다고 가정한다.

$$l(t) = a + bt \quad (26)$$

여기서 a =초기 로우프 길이, b =호이스트 상승/하강 속도이다. 시변시스템인 (25)의 해는 Bessel함수로 나타낼 수는 있겠으나 복잡하다. 또한 감쇠계수 $\zeta(t) = \dot{l}(t)/l(t)$ 및 고유진동수 $\omega^2(t) = g/l(t)$ 도 로우프 길이변화에 따라서 각각 변화하고 있다. 주목할 것은 상승 시에는 $\dot{l}(t) < 0$ 이 되어 감쇠계수가 음이 되어 시스템이 불안정하여 흔들림각이 발산하는 경우가 되고, 하강 시에는 감쇠계수가 양이 되어 흔들림각을 줄이는 작용을 하게 된다. (25)를 근사화하기 위해 다음 값들을 정의한다.

$$\text{감쇠계수 공칭값: } \zeta = \left(\frac{b}{a} + \frac{b}{a+bT_d}\right)/2 \quad (27)$$

$$\text{고유진동수 공칭값: } \omega_0^2 = \frac{2g}{2a+bT_d} \quad (28)$$

$$\text{로우프길이 공칭값: } l_{ave} = (2a+bT_d)/2 \quad (29)$$

로 근사화한다. 여기서, T_d 는 아래의 (30)으로 정의되는 감쇠항이 있는 시불변시스템의 진동주기이다. 이 경우 식 (27) - (29)의 값들은 각각 가감속 개시시점과 시간 T_d 초 경과 후의 값들의 평균값이 되겠다. 이제 (25)의 근사식으로 다음과 같은 시불변시스템을 고려한다.

$$\ddot{\phi}(t) + 2\zeta\dot{\phi}(t) + \omega_0^2\phi(t) = -u/l_{ave}, \phi(0) = 0, \dot{\phi}(0) = 0 \quad (30)$$

제어입력이 $u = \alpha_{max}$ 일 때 (30)의 해는

$$\begin{aligned} \phi(t) &= -\frac{\alpha_{max}}{g} + \frac{\alpha_{max}}{g} e^{-\zeta t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \\ &= -\frac{\alpha_{max}}{g} + \frac{\alpha_{max}}{g} \frac{\sqrt{\zeta^2 + \omega_d^2}}{\omega_d} e^{-\zeta t} \cos(\omega_d t - \theta_d) \end{aligned} \quad (31)$$

가 된다. 여기서 $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \zeta^2$, $\theta_d = \tan^{-1} \zeta / \omega_d$ 이다. 또한 흔들림 각속도는

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{\alpha_{max}}{g} \frac{(\zeta^2 + \omega_d^2)}{\omega_d} e^{-\zeta t} \sin \omega_d t \quad (32)$$

가 된다. (31)로부터 감쇠진동하는 곡선의 진동주기는 $T_d = 2\pi/\omega_d$ 임을 알 수 있고, 시간 $t = T_d$ 에서 진동각 및 진동각속도를 계산하면

$$\begin{aligned} \phi(T_d) &= -\frac{\alpha_{max}}{g} (1 - e^{-\zeta T_d}) \\ \dot{\phi}(T_d) &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

가 되어 잔류 흔들림이 존재함을 알 수 있다. (31) 및 (32)를 $\phi - \dot{\phi}/\sqrt{\zeta^2 + \omega_d^2}$ 위상평면에 그리면 그림 8의 실선이 된다. 최대속도에 도달한 후 흔들림이 0으로 유지되기 위해서는 가속종료 시에 위상궤적이 원점에 위치하여야 하는데 로우프의 길이변화에 따른 감쇠영향으로 인하여 원점에서 이탈되어 있음을 알 수 있다. 따라서 $t = T_d/2$ 에서 가속도의 크기를 변경하여 $t = T_d$ 에서 궤적이 그림 8의 점선과 같이 원점을 통과하도록 하는 전략을 세운다. 변경된 가속도의 크기를 β 라 하자. 이제 시간 $t = T_d/2$ 에서

$$\begin{aligned} \phi(T_d/2) &= -\frac{\alpha_{max}}{g} (1 + e^{-\zeta\pi/\omega_d}) \\ \dot{\phi}(T_d/2) &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

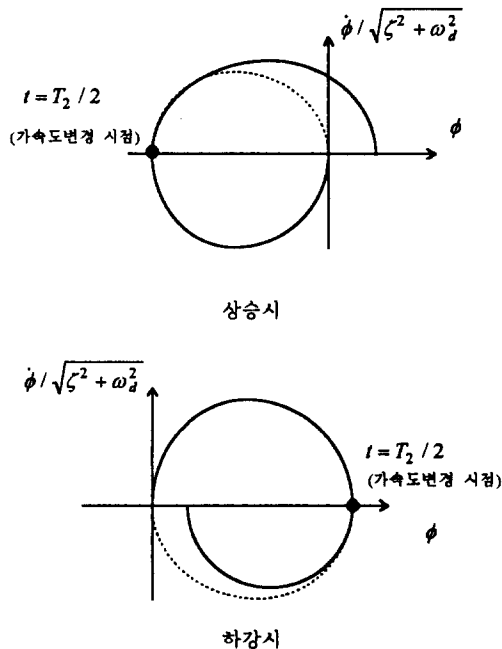


그림 8. 감쇠모델의 위상궤적.
Fig. 8. State trajectory of a damped model.

을 초기조건으로 할 때, (30)의 해가 시간 $t = T_d$ 에서 원점을 통과하기 위한 β 는

$$\beta = \alpha_{max} e^{-\zeta\pi/\omega_d} \quad (35)$$

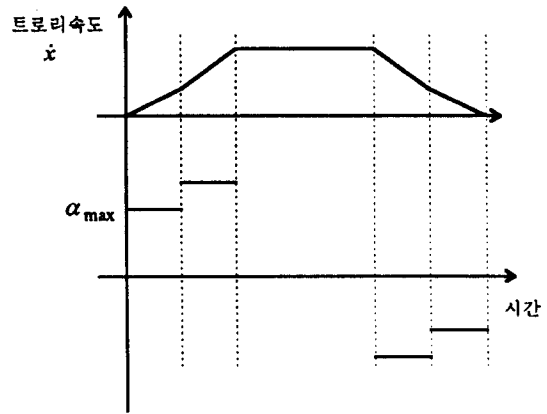


그림 9. 2단계 가감속형 속도선도.
Fig. 9. Double acceleration/deceleration velocity pattern.

가 된다. 감쇠진동 모델 또는 비선형의 원래 모델에 대해서는 완벽한 진동방지 실현은 가능하지 않으나 로우프의 길이가 변화함에도 불구하고 로우프의 길이가 일정한 모델을 사용하는 경우와 비교할 때 확실히 흔들림 오차를 크게 저감시킬 수 있음을 예상할 수 있다. 호이스트 하강시의 계산법도 동일하다.

다음의 표 1은 트롤리 및 호이스트 모터의 주행능력이 $x_{max} = 3m/sec$, $a_{max} = 1m/sec$, $b = 1m/sec$ 이라 가정할 때 가속에 걸리는 시간에 대한 비교이다. 가속시간은 트롤리가 최대 이송속도에 도달하는 시간이므로 이 최대 이송 속도 시간이 짧을수록 전체의 이송시간을 단축시킬 수 있다.

표 1. 가속시간의 비교.
Table 1. Comparison of acceleration times.

가속패턴 (로우프 길이 일정)	가속시간(sec)		
	$l = 20\text{ m}$	$l = 7\text{ m}$	
사다리꼴 속도선도	8.971	5.307	
계단형 속도선도 #1	5.986	4.154	
계단형 속도선도 #2	4.493	3.577	
시간최적제어	Bang-Bang	5.701	4.116
	Bang-Off Bang	5.986	4.154

가속패턴	로우프의 길이 변화(상승구간) $20\text{m} \rightarrow 7\text{m}$
2단계 가감속형 속도선도(감쇠모델)	7.418

IV. 결론

본 논문에서는 문헌상에 등장하는 다양한 속도선도들을 체계적으로 정리하여 보았다. 컨테이너를 주어진 지점에서 목표지점으로 이송시킬 때 가속종료 후와 감속종료 후 흔들림이 없는 여러 가지의 속도패턴을 고찰하고 그 과정을 유

도하였다. 속도선도란 트롤리부의 주행패턴을 말하며 가속, 최대정속 그리고 감속의 패턴을 가지도록 하면서, 가속이 끝난 최대정속의 시작시점에서 흔들림이 없고 또한 감속이 끝난 후 원하는 목표지점에 도달하여서도 흔들림이 없는 특징을 가지고 있다. 사다리꼴 속도선도와 계단형 속도선도는 미분방정식의 해로부터 그 패턴을 유도하였으며, 노치형 속도선도는 시간최적제어 개념으로부터의 bang-bang제어임을 보였다. 또한 계단형 속도선도 #1은 bang-off bang 제어임을 보였다. 노치형 속도선도는 시간단축 면에서 가장 우수하지만 크레인 구조물에 진동을 유발할 수도 있다. 보다 정교한 제어를 위해서는 단순화된 선형 미분방정식 대신에 원래의 비선형 미분방정식을 대상으로 한 비선형제어에 관한 연구도 필요하다 하겠다.

참고문헌

- [1] 윤지섭, 박병석, 이재철, "무진동 크레인의 제어 알고리즘 설계," 한국자동제어학술회의 논문집, vol. 1, pp. 260-265, 1989.
- [2] J. S. Yoon, B. S. Park, J. S. Lee and H. S. Park, "Controller design for the anti-swing crane," 한국자동제어학술회의 논문집, vol. 1, pp. 229-235, 1994.
- [3] 이태영, "퍼지이론을 적용한 overhead crane의 anti-swing 제어," 경북대학교 석사논문, 1994.
- [4] 홍형주, 이신섭, "크레인 진자계의 최적제어," 대한기계학회 춘계학술대회 논문집, pp. 832-837, 1995.
- [5] 윤지섭, 강이석, "천정크레인의 무진동/위치 제어기 개발에 관한 연구," 대한기계학회논문집, vol. 19, no. 6, pp. 1391-1401, 1995.
- [6] 홍금식, 손성철, 이만형, "컨테이너 크레인의 흔들림 제어 (Part I): 모델링, 제어전략, 기준선도를 통한 오차 피드백 제어," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, vol. 3, no. 1, pp. 23-31, 1997.
- [7] T. Mita and T. Kanai, "Optimal control of the crane system using the maximum speed of the trolley," 계측자동제어학회논문집 (일본), vol. 15, no. 6, pp. 125-130, 1979.
- [8] T. Date, T. Okawa, O. Yamaguchi, H. Nagai, T. Nakajima and N. Matsumoto, "Anti-sway control system for container handling crane," NKK 기보 (일본), no. 150, pp. 56-60, 1995.
- [9] J. W. Auernig and H. Troger, "Time optimal control of overhead cranes with hoisting of the load," *Automatica*, vol. 23, no. 4, pp 437-447, 1987.
- [10] G. A. Manson, "Time optimal control methods arising from the study of overhead cranes," Ph. D. Thesis, Univ. of Strathclyde, Glasgow, U. K., 1977.
- [11] 이호훈, 조성근, 조재성, 정영우, "2축 천정크레인의 무진동 제어," 한국자동제어학술회의 논문집, pp. 1428-1431, 1996.
- [12] 이종규, 이상용, "두 축이 동시에 운동하는 비선형 천정 크레인의 부분상태 제한제어 알고리즘 개발," 한국자동제어학술회의 논문집, pp. 395-398, 1996.
- [13] M. Bergerman and Y. Xu, "Robust joint and cartesian control of underactuated manipulators," *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 118, no. 3, pp. 557-565, 1996.
- [14] C. C. Chung and J. Hauser, "Nonlinear control of a swinging pendulum," *Automatica*, vol. 31, no. 6, pp. 851-862, 1995.
- [15] 정경채, 홍진철, 배진호, 이달해, 이석규, 이해영, "천정크레인의 진동저감을 위한 퍼지제어기 및 제어기 개발용 시뮬레이터 설계에 관한 연구," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, vol. 2, no. 2, pp. 96-101, 1996.



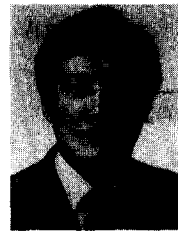
홍 금 식

1957년 8월 25일생. 1975년 3월 ~ 1979년 2월 서울대학교 기계설계학과 (공학사). 1985년 8월 ~ 1987년 1월 Columbia University 기계공학과 (공학석사). 1990년 6월 ~ 1991년 1월 University of Illinois (Urbana) 수학과 (이학석사). 1987년 1월 ~ 1991년 8월 University of Illinois (Urbana) 기계공학과 (공학박사). 1982년 ~ 1985년 대우중공업(인천) 근무. 1993년 ~ 현재 부산대학교 공과대학 조교수. 관심분야는 시스템이론, 적응제어, 비선형제어, 분포계수시스템의 제어.



손 성 철

1973년 1월 12일생. 1995년 부산대학교 정밀기계공학과(공학사). 1995년 ~ 현재 동대학원 석사과정 재학중. 관심분야는 불충분 작동기 시스템의 비선형제어.



이 만 형

1969년 부산대 전기공학과(공학사). 1971년 동대학원(공학석사). 1983년 Oregon State University(Corvallis) 전기, 컴퓨터공학과(공학박사). 1971년 ~ 1974년 육군사관학과 전자공학과 전임강사. 1975년 ~ 1978년 부산대학교 조교수. 1983년 ~ 현재 부산대 공과대학 부교수, 교수. 1995년 9월 ~ 현재 부산대학교 연구기획실 실장. 관심분야는 확률제어, 비선형제어.